

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л.СОБОЛЕВА

На правах рукописи

Александров Виктор Алексеевич

ИНЪЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И МЕТРИЧЕСКИЕ
СВОЙСТВА ИЗГИБАЕМЫХ МНОГОГРАННИКОВ

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание
ученой степени доктора физико-математических наук

Научный консультант —
д.ф.-м.н. И.Х.Сабитов

Новосибирск–2004

Содержание

Введение	4
Глава 1. Дифференциальные условия, гарантирующие гомеоморфность отображений плоскости в себя	16–24
§1. Формулировка результатов	16
§2. Доказательство теоремы 1.2	20
§3. Доказательство теоремы 1.4	23
Глава 2. Вложение локально-евклидовых и конформно-евклидовых метрик	25–41
§1. Определения и предварительные замечания	25
§2. Вложения локально-евклидовых метрик	28
§3. Вложения конформно-евклидовых метрик	38
Глава 3. Жесткие множества на евклидовой плоскости	42–53
§1. Основной результат	43
§2. Вспомогательные утверждения	45
Глава 4. Инъективность отображений, заданных в выпуклых многомерных областях	54–58
§1. Введение	54
§2. Доказательство теоремы 4.2	55
§3. Заключительные замечания	58
Глава 5. Инфинитезимальный вариант гипотезы кузнечных мехов для многогранников и поверхностей вращения	59–72
§1. Введение	60
§2. О связи вариации объема и потока	61
§3. Гипотеза Сабитова для многогранников	63
§4. Гипотеза Сабитова для поверхностей вращения	69
Глава 6. Новый класс изгибаемых многогранников, не использующих октаэдров Брикара	73–87
§1. Введение	73
§2. Построение рамы	75
§3. Построение колена	78
§4. Построение коленчатого вала	82
§5. Основной результат	85

Глава 7. Гипотеза кузнечных мехов в трехмерном сферическом пространстве	88–98
§1. Введение	88
§2. Предварительные соглашения	89
§3. Вспомогательный многогранник Q	90
§4. Построение многогранника R	91
§5. Об объеме многогранника R	93
§6. О средней кривизне многогранника R	93
§7. Основной результат	95
§8. Обобщения и замечания	96
Глава 8. Теорема о неявной функции для алгебраических систем уравнений с вырожденным якобианом и ее приложения к изучению изгибаемых многогранников	99–127
§1. Введение	99
§2. Достаточные условия существования неявной функции	100
§3. Необходимые условия существования неявной функции	108
§4. Применения к изучению изгибаемых многогранников и каркасов	119
Глава 9. Изгибаемые многогранники в пространстве Минковского	128–150
§1. Введение	128
§2. Существование	129
§3. Объем	135
§4. Ориентированный угол	137
§5. Средняя кривизна	143
Список литературы	151–160

Введение

Многие результаты «геометрии в целом» естественным образом могут быть переформулированы в терминах инъективности или сюръективности некоторых специальных отображений метрических пространств или даже областей в \mathbb{R}^n . Именно такая трактовка геометрических задач позволила А.Д.Александрову в его знаменитой книге «Выпуклые многогранники» [2] доказать теоремы существования и единственности для выпуклого многогранника в \mathbb{R}^3 с данной разверткой, а также теоремы Линделефа и Минковского. По сути тем же методом Е.М.Андреев доказал теорему о существовании многогранника с заданными двугранными углами в трехмерном пространстве Лобачевского [4]. Недавно Ж.-М.Шленкер вновь успешно применил этот метод для доказательства теоремы о существовании выпуклого многогранника с заданной разверткой в трехмерном пространстве Минковского [115].

Ядро диссертации составляют решения некоторых задач «геометрии в целом», и прежде всего — теории изгибаемых многогранников, в решении которых существенную роль играют теоремы о локальной или глобальной обратной или неявной функции. Впрочем, в диссертацию вошли как некоторые близкие по духу задачи «геометрии в целом», решаемые иными методами, так и некоторые специальные проблемы, связанные с инъективностью отображений, не нашедшие пока применения в геометрии.

Диссертация состоит из введения и девяти глав, в каждой из которых обсуждается более или менее замкнутый круг вопросов. Кратко опишем основные результаты, полученные в каждой главе.

В первой главе выводится новая формулировка дифференциального условия Н.В.Ефимова, гарантирующего гомеоморфность отображения $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. На этой основе с помощью теоремы Адамара–Леви–Джона о глобальной обратной функции даются дифференциальные условия, при выполнении которых отображение f не только инъективно, но и сюръективно. Изложение следует работам соискателя [A2] и [A8].

Если говорить более точно, то в работе [21] Н.В.Ефимов доказал следующую замечательную теорему.

Теорема 1.1. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ принадлежит классу C^1 , причем якобиан отображения f всюду отрицателен., т.е. $\det f'(x) < 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Пусть, кроме того, существуют положительная функция $a = a(x) > 0$ и неотрицательные постоянные C_1, C_2 такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство

$$|1/a(x) - 1/a(y)| \leq C_1|x - y| + C_2.$$

Тогда если для всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$|\det f'(x)| \geq a(x)|\operatorname{rot} f(x)| + a^2(x),$$

то $f(\mathbb{R}^2)$ есть выпуклая область и f отображает \mathbb{R}^2 на $f(\mathbb{R}^2)$ гомеоморфно. (Здесь $\operatorname{rot} f(x)$ означает, как обычно, ротор функции f в точке $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, т. е. $\operatorname{rot} f(x) = \partial f_2/\partial x_1(x) - \partial f_1/\partial x_2(x)$.)

В первой главе доказано несколько теорем, аналогичных теореме 1.1, среди которых мы выделим следующую.

Теорема 1.4 [A2], [A8]. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ принадлежит классу C^1 , причем $\det f'(x) < 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Пусть, кроме того, существуют положительная функция $b(x) > 0$ и неотрицательные постоянные C_1, C_2 такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство

$$|1/b(x) - 1/b(y)| \leq C_1|x - y| + C_2.$$

Тогда если для всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$|\mu_2(x)| \geq |\mu_1(x)| \geq b(x),$$

где $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ — собственные числа линейного отображения $f'(x)$, то $f(\mathbb{R}^2)$ есть выпуклая область и f отображает \mathbb{R}^2 на $f(\mathbb{R}^2)$ гомеоморфно.

Предложенное соискателем доказательство теоремы 1.4 состоит в том, чтобы убедиться, что из условий теоремы 1.4 вытекают условия теоремы 1.1. Н.С.Даирбековым было замечено что и наоборот, из условий теоремы 1.1 вытекают условия теоремы 1.4. В этом смысле обсуждаемые теоремы эквивалентны. Однако теорема 1.4, по нашему мнению, указывает направление, в котором следует искать многомерные аналоги теоремы Ефимова, что и было сформулировано в качестве гипотезы в работах соискателя 1990 и 1991 годов [A2] и [A8]: ограничения на рост спектрального радиуса обратного отображения от производной влечет инъективность многомерного отображения.

Любопытно отметить, что в 1998 году к этой же самой гипотезе (остающейся открытой до сих пор) независимо пришли некоторые зарубежные ученые, специализирующиеся в так называемой вещественной гипотезе якобиана [76], а в 2002 году другой группе зарубежных исследователей, занимающихся преимущественно динамическими системами, удалось обобщить теорему 1.4, показав, что отображение f остается инъективным даже если запретить приближаться к нулю собственным числам его производной лишь по вещественной оси (то есть разрешить им приближаться к нулю по другим направлениям), см. [77].

Во второй главе вопрос о вложимости локально-евклидовой метрики исследуется с помощью теоремы о глобальной обратной функции [74], [92], [98], [109]. Такой подход позволяет единообразно исследовать вложимость многомерных метрик. Кроме того мы показываем, что если погружение метрики уже построено, то задача о ее вложении может быть решена нашим методом при весьма слабых предположениях о гладкости погружения.

Отправной точкой наших исследований послужила статья И.Х. Сабитова [50] (см. также более позднюю статью [56] того же автора), в которой прослежено, в какой мере гладкость коэффициентов плоской локально-евклидовой метрики определяет гладкость изометрического погружения этой метрики в \mathbb{R}^2 , изучены вопросы о нахождении изометрического погружения в квадратурах и о том, когда такое погружение является вложением.

Допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что во второй главе мы переносим указанные результаты И.Х. Сабитова на многомерные метрики. В качестве типичного результата, полученного в этом направлении соискателем, укажем следующую теорему, дающую ограничения на коэффициенты локально-евклидовой метрики, при выполнении которых шар фиксированного радиуса заведомо допускает изометрическое вложение в евклидово пространство той же размерности.

Теорема 2.11 [A3]. *Пусть в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, задана локально-евклидова метрика $ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(u) du^i du^j$ класса C^m , $m \geq 1$. Для произвольной*

точки $w \in \mathbb{R}^n$ построим функции

$$N(t) = \sup_{|v-w| \leq t} V(v) \quad u \quad M(t) = \inf_{|v-w| \leq t} W(v),$$

где

$$V(v) = \sqrt{\prod_{i=1}^n g_{ii}(v)}, \quad W(v) = \frac{1}{V(v)} \sqrt{\frac{\det(g_{kl}(v))}{n \sum_{i=1}^n \frac{1}{g_{ii}(v)}}}.$$

Тогда для всякого положительного R , удовлетворяющего неравенству

$$RN(R) < \int_0^{+\infty} M(t) dt,$$

евклидов шар радиуса R с центром w , снабженный метрикой ds^2 , допускает изометрическое вложение в \mathbb{R}^n класса C^m .

Приводятся примеры, показывающие, что в утверждениях, приводимых в главе 2 и аналогичных цитированной выше теореме 2.11, интегральные ограничения на коэффициенты метрики, вообще говоря, не могут быть ослаблены.

В конце главы 2, мы применяем теоремы В.А. Зорича [23], [65] об устранимости изолированной особой точки локально-квазиконформного отображения к вопросу о вложении n -мерной конформно-евклидовой метрики в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$.

Результаты второй главы опубликованы в работе соискателя [А3].

Третья глава диссертации посвящена решению интересного вопроса, аналогичного традиционным проблемам «геометрии в целом», при решении которого ключевую роль сыграли теоремы о строении «в целом» 1-квази-изометрических или 1-квазиконформных отображений. Вопрос был инициирован польскими математиками К. Борсуком [72] и М. Мощинской [104] и может быть сформулирован так.

Пусть M — множество в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , любые две точки которого могут быть соединены спрямляемой кривой, целиком лежащей в M . Точную нижнюю границу длин всех таких кривых называют внутренним расстоянием ρ_M между данными точками.

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$, допускающее введение внутреннего расстояния, называется *жестким*, если для любого множества $N \subset \mathbb{R}^n$, допускающего введение внутреннего расстояния, любая изометрия $f : (M, \rho_M) \rightarrow (N, \rho_N)$ может быть продолжена до изометрии пространства \mathbb{R}^n с евклидовой метрикой на себя.

Вопрос состоит в том, может ли быть жестким множество $M \subset \mathbb{R}^n$, если его размерность меньше n ? Отметим, что дополнительную красоту этому вопросу придает отсутствие каких-либо априорных требований о наличии гладких структур у рассматриваемых множеств и отображений.

В третьей главе строится одномерное жесткое множество в \mathbb{R}^2 . Построение основывается на идеях и методах, опубликованных в работе автора 1993 года [A4], появление которой стимулировало И.Хербурт и С.Унгара к более детальному изучению жестких множеств, см. [96] и [97]. Уже после того, как диссертация была рассказана в Московском и Ростовском университетах, ПОМИ РАН и Институте низких температур НАНУ, К.В.Сторожук указал соискателю на элементарный прокол, имеющийся в работе [A4] и даже предложил, в качестве гипотезы, правильную формулировку результата. Пользуясь случаем, приношу благодарность К.В.Сторожуку за внимание к моей работе. Итак, с помощью незначительной модификации формулировок и рассуждений из статьи соискателя [A4], в главе 3 построено одномерное жесткое множество на плоскости.

В связи с исследованиями по теории игр нобелевский лауреат по экономике Д. Гейл в соавторстве с Х. Никайдо доказал следующую теорему, гарантирующую инъективность некоторых отображений.

Теорема 4.1 [90], [107]. Пусть Ω — прямоугольная область в \mathbb{R}^n , т. е. $\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$, где a_i, b_i — вещественные числа или $-\infty, +\infty$, и пусть отображение $F = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируемо и, кроме того, каждый главный минор матрицы Якоби

$$F'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

положителен. Тогда отображение F инъективно.

Некоторые вопросы, связанные с этой теоремой, долго оставались или все еще остаются открытыми, см. например [107]. Один из них таков: верна ли эта теорема для произвольной выпуклой области Ω ? В четвертой

главе мы даем отрицательный ответ на этот вопрос. А именно, мы даем геометрическое доказательство следующего утверждения.

Теорема 4.2 [А5]. *Для любого целого $n \geq 2$ существуют эллипсоид $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ и C^∞ -отображение $F = (f_1, \dots, f_n) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что каждый главный минор его матрицы Якоби $F'(x)$ положителен, но F не инъективно.*

Результаты четвертой главы диссертации опубликованы в статье [А5] соискателя.

Более двадцати лет оставалась открытой так называемая гипотеза кузнечных мехов, согласно которой всякий изгибаемый многогранник сохраняет свой объем в процессе изгибания [26]. Ее положительное решение было дано И.Х. Сабитовым в 1996 году [54]. Один из возможных подходов к гипотезе кузнечных мехов состоял в том, чтобы исследовать ее инфинитезимальный аналог, предложенный в [81], а именно — доказать, что объем нежесткого многогранника стационарен при его бесконечно малых изгибаниях. В пятой главе мы показываем, что такой инфинитезимальный аналог неверен. Точнее, мы показываем, что у нежесткого многогранника, построенного А.Д. Александровым и С.М. Владимировой [3], объем не стационарен при бесконечно малом изгибании. Вместе с тем в этой же главе мы показываем, что объем всякой поверхности вращения стационарен при ее бесконечно малых изгибаниях.

Эти результаты опубликованы в работе соискателя [А1]. Они тесно связаны с более поздними работами А.Д. Милки [39], [40], [103], где вводится новый тип непрерывных изгибаний многогранников, названных им линейными изгибаниями, и более детально изучаются бесконечно малые изгибания нежесткого многогранника А.Д. Александрова и С.М. Владимировой; с работами Л.С. Велимирович [119]–[121], где более детально изучен вопрос о стационарности объема и других подобных характеристик для некоторых поверхностей вращения; и со статьями Ю.Д. Бураго и В.А. Залгаллера [9], [22], в которых изучаются вопросы кусочно-линейного изометрического вложения в \mathbb{R}^3 компактных двумерных многообразий с полиэдральной метрикой (но не требуется наличия непрерывного семейства таких вложений). Упомянем также следующую родственную теорему, полученную Н.П. Долбилиным, М.А. Штанько и М.И. Штогриным в [17] и

[18]: погруженная многогранная сфера или тор заведомо не изгибается, если каждая ее грань является параллелограммом.

В шестой главе диссертации описывается пример изгибаемого многогранника, в построении которого не используются октаэдры Брикара. Этот пример был построен еще до получения И.Х. Сабитовым в 1996 году его знаменитого положительного решения гипотезы кузнечных мехов [54]. Все известные на тот момент изгибаемые многогранники содержали в качестве составной части какой-нибудь из октаэдров Брикара и, казалось, сохраняют свой объем именно благодаря этому обстоятельству. Сейчас ясно, что строить контрпример к гипотезе кузнечных мехов было бессмысленно, но иметь новые примеры изгибаемых многогранников оказалось полезным, по крайней мере, для постановки новых задач.

Результаты шестой главы опубликованы в работе соискателя [A6].

До сих пор остается довольно много интересных открытых вопросов, так или иначе связанных с гипотезой кузнечных мехов. Один из них состоит в том, сохраняется ли объем изгибаемого многогранника в трехмерных пространствах постоянной ненулевой кривизны. Легко понять, что в трехмерном пространстве Лобачевского всякий идеальный симплекс (т.е. симплекс в вершинах на абсолюте) является изгибаемым и не сохраняет в процессе изгибания ни объем, ни среднюю кривизну. Так что в пространстве Лобачевского интерес представляют компактные изгибаемые многогранники и вопрос о постоянстве объема таких многогранников остается открытым (ясно только что, как это вытекает из формулы Шлефли, сохраняется некоторая линейная комбинация объема и средней кривизны).

Оказывается, в трехмерном сферическом пространстве ситуация иная. В седьмой главе построен изгибаемый многогранник, лежащий в открытой полусфере $\mathbb{S}_+^3 \subset \mathbb{R}^4$, и не сохраняющий в процессе изгибания ни объем, ни среднюю кривизну. (Тот факт, что в евклидовом пространстве любой размерности $n \geq 3$ замкнутый изгибаемый многогранник сохраняет свою интегральную среднюю кривизну, был впервые установлен Р. Александером [66]). Используя этот пример, можно «слегка подпортить» любой изгибаемый многогранник в трехмерном сферическом пространстве так, что он перестанет сохранять объем (и среднюю кривизну) в процессе изгибания.

Результаты главы 7 опубликованы в работах соискателя [A7] и [A9].

В восьмой главе изучается вопрос о существовании локальной неявной функции для систем нелинейных алгебраических уравнений в случае, когда определитель матрицы Якоби зануляется в рассматриваемой точке. Найдены как некоторые достаточные условия, гарантирующие существование локальной неявной функции, так и достаточные условия, гарантирующие ее отсутствие. Развита при этом техника применяется для доказательства новых и классических теорем об изгибаемости или жесткости многогранников и каркасов.

Результаты главы 8 опубликованы в работах соискателя [A9] и [A11]. Опишем эти результаты более подробно.

Пусть $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — дифференцируемое отображение; $t, t_0 \in \mathbb{R}^l$; $X, X_0 \in \mathbb{R}^m$ и пусть $F(t_0, X_0) = 0$. Классическая теорема о неявной функции дает условия, при которых уравнение $F(t, X) = 0$ определяет неявную функцию $X = X(t)$ в некоторой окрестности точки (t_0, X_0) . Главное из этих условий состоит в том, чтобы оператор $F'_X(t_0, X_0)$ был обратим.

Теорема о неявной функции имеет многочисленные приложения и обобщена в самых разных направлениях. В частности, известны варианты этой теоремы, в которых существование неявной функции гарантируется в случае, когда оператор $F'_X(t_0, X_0)$ не обратим, см., например, [68], [105] и [86]. В главе 8 мы приводим свой вариант теоремы о неявной функции при вырождении производной и приводим примеры ее использования в геометрических задачах.

Наши исследования мотивированы изучением изгибаемых многогранников и каркасов. Возникающие при этом отображения F вообще не зависят от параметра t . Именно на этом частном случае мы и сосредотачиваем свое внимание. Типичным примером системы нелинейных алгебраических уравнений, к которой применимы наши рассуждения, может служить следующая:

$$F_1(t, x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0,$$

$$F_2(t, x_1, x_2, x_3) \equiv 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 = 0, \quad (1)$$

$$F_3(t, x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 - 3x_2 + x_3 + 3 = 0.$$

Параметр t в эту систему явным образом не входит. Точка $X_0 = (5, 5, 7)^T$ удовлетворяет системе (1). Определитель матрицы Якоби системы (1) обращается в нуль в точке $X_0 = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\det F'_X(t, X_0) = \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 & -2x_3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & -14 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому классическая теорема о неявной функции не применима. Тем не менее, из излагаемых ниже результатов будет следовать, что решение X_0 системы (1) не является изолированным, а принадлежит непрерывному семейству решений $X = X(t)$, которое и является неявной функцией, определяемой системой (1) в окрестности точки X_0 .

Пусть $X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и пусть $F(X) = (F_1(X), \dots, F_n(X))$, причем каждая из функций F_k ($k = 1, \dots, n$) является многочленом. Не умаляя общности можем считать, что степень каждого многочлена F_k не превосходит 2. В таком случае F_k можно записать в виде

$$F_k(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}^k x_i x_j + \sum_{i=1}^m \beta_i^k x_i + \gamma^k,$$

где $\alpha_{ij}^k = \alpha_{ji}^k$, β_i^k и γ^k — некоторые вещественные числа.

Определим билинейное отображение $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ по правилу: если $X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $Y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, то k -я компонента вектора $B(X, Y)$ равна

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}^k x_i y_j, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Определим также линейное отображение $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ по правилу: если $X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, то k -я компонента вектора $A(X)$ равна

$$\sum_{i=1}^m \beta_i^k x_i, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Определим, наконец, линейное отображение $C : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой $CX = B(X_0, X) + B(X, X_0) + AX$.

Допустим, что в \mathbb{R}^m нам дан конечный набор векторов Y_0, Y_1, \dots, Y_q .
Выражение

$$Y(t) = \sum_{p=0}^q Y_p t^p$$

будем называть *приближенным порядка q решением* полиномиальной системы уравнений $F(X) = 0$, если для каждого $p = 1, 2, \dots, q$ коэффициент при t^p в разложении функции $F(Y(t))$ в ряд Мак-Лорена равен нулю.

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие существования неявной функции, определяемой системой алгебраических многочленов.

Теорема 8.1 [A11]. *Пусть*

$$Y(t) = \sum_{p=0}^q Y_p t^p \tag{2}$$

является приближенным порядка q решением полиномиальной системы уравнений $F(X) = 0$. Пусть существует число k ($0 \leq k < q$) такое, что для всех $i = 1, 2, \dots, q$ и всех $j = k, k + 1, \dots, q$ уравнение

$$CY = -B(Y_i, Y_j) - B(Y_j, Y_i)$$

имеет решение, лежащее в линейной оболочке векторов Y_k, Y_{k+1}, \dots, Y_q . Тогда система уравнений $F(X) = 0$ имеет аналитическое семейство решений $X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} X_p t^p$, начальный отрезок которого совпадает с приближенным решением (2), т. е. такое семейство, что для всех $p = 0, 1, \dots, q$ справедливо равенство $X_p = Y_p$.

Поясним смысл теоремы 8.1 «на пальцах». Если известно приближенное решение $\sum_{p=0}^{q-1} X_p t^p$ порядка $q - 1$ полиномиальной системы уравнений $F(X) = 0$, то для того, чтобы продолжить его в приближенное решение порядка q , мы должны решить (относительно X_q) следующую линейную алгебраическую систему уравнений:

$$CX_q = - \sum_{p=1}^{q-1} B(X_p, X_{q-p}).$$

Теорема 8.1 дает условия, при которых решив конечное число таких линейных алгебраических систем уравнений, мы можем быть уверены в существовании интересующего нас точного решения, представляющего из себя сумму сходящегося степенного ряда.

В главе 8 приведены примеры, показывающие, что, с одной стороны, условия теоремы 8.1 заведомо являются избыточными, а с другой стороны — их нельзя просто отбросить. Эти примеры показывают, насколько существенны условия теоремы 8.1.

В терминах введенных выше операторов B и C мы указываем также некоторые необходимые условия существования неявной функции, определяемой системой полиномиальных уравнений $F(X) = 0$ (см. теорему 8.9 в диссертации). Пример 8.10 показывает, как можно эффективно применять эти условия.

Развитая в восьмой главе аналитическая техника позволяет доказать ряд классических результатов о бесконечно малых изгибаниях многогранников и их обобщений, называемых каркасами. Например, мы единообразно доказываем, что многогранник, обладающий жесткостью второго порядка, неизгибаем (см. теорему 8.13) и что проективный образ нежесткого многогранника опять является нежестким многогранником (см. теорему 8.15). Из новых результатов, относящихся к бесконечно малым изгибаниям многогранников, упомянем, например, следующий:

Теорема 8.14. *Пусть каркас K в \mathbb{R}^n имеет одно нетривиальное линейно независимое бесконечно малое изгибание первого порядка и пусть существует число $q \geq 2$, для которого K является жестким порядка q . Тогда K является неизгибаемым.*

Отметим, что для гладких поверхностей результаты, аналогичные теореме 8.14, были получены Н.Г.Перловой [43], [44] и И.Х.Сабитовым [52].

В девятой, последней, главе доказано, что в трехмерном пространстве Минковского существуют изгибаемые многогранники (не являющиеся, к сожалению, вложенными или погруженными) и что каждый такой многогранник сохраняет в процессе изгибания свой обобщенный объем и интегральную среднюю кривизну. Для доказательства последнего результата детально разработано понятие угла между произвольными двумя ненулевыми неизотропными векторами на плоскости Минковского, которое может представлять независимый интерес. Насколько известно соискателю,

ранее такое же понятие угла было предложено Г.С. Гайдаловичем и Д.Д. Соколовым [12], но у них многие свойства угла остались невыясненными или недоказанными.

Результаты девятой главы опубликованы в работе [A12] соискателя, после написания которой ему стало известно, что в статьях [115] и [118] было введено отличное от использованного им понятие неориентированного угла между двумя произвольными неизотропными ненулевыми векторами пространства Минковского. Однако оказалось, что интегральная средняя кривизна многогранника по сути не зависит от того, какое именно определение угла между векторами используется.

В конце каждой главы приведены нерешенные задачи, цель которых — помочь новым исследователям войти в обсуждаемую проблематику.

Глава 1. Дифференциальные условия, гарантирующие гомеоморфность отображений плоскости в себя

В этой главе выводится новая формулировка дифференциального условия Н.В.Ефимова, гарантирующего гомеоморфность отображения $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. На этой основе с помощью теоремы Адамара–Леви–Джона о глобальной обратной функции даются дифференциальные условия, при выполнении которых отображение f не только инъективно, но и сюръективно. Изложение следует работам автора [A2], [A8].

В 2002 году к подобного рода теоремам и гипотезам пришла целая группа зарубежных авторов, см. [77]. Отправным пунктом для них послужили некоторые вопросы динамических систем, связанные с так называемой вещественной гипотезой якобиана.

§1. Формулировка результатов

В работе [21] Н.В.Ефимов доказал следующую замечательную теорему.

Теорема 1.1. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ принадлежит классу C^1 , причем для всех $x \in \mathbb{R}^2$ якобиан $\det f'(x)$ отображения f отрицателен. Пусть, кроме того, существуют положительная функция $a = a(x) > 0$ и неотрицательные постоянные C_1, C_2 такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство

$$|1/a(x) - 1/a(y)| \leq C_1|x - y| + C_2. \quad (1)$$

Тогда если для всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$|\det f'(x)| \geq a(x)|\operatorname{rot} f(x)| + a^2(x), \quad (2)$$

то $f(\mathbb{R}^2)$ есть выпуклая область и f отображает \mathbb{R}^2 на $f(\mathbb{R}^2)$ гомеоморфно. (Здесь $\operatorname{rot} f(x)$ означает, как обычно, ротор функции f в точке $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, т. е. $\operatorname{rot} f(x) = \partial f_2/\partial x_1(x) - \partial f_1/\partial x_2(x)$.)

Кроме того, в работе [21] показано, что если неравенство (2) выполнено с некоторой постоянной $a = \text{const} > 0$, в частности, если

$$|\det f'(x)| \geq \text{const} > 0, \quad |\text{rot } f(x)| \leq \text{const},$$

то $f(\mathbb{R}^2)$ является или плоскостью, или полуплоскостью, или бесконечной полосой между двумя параллельными прямыми. В последующих работах Б.Е.Кантора [29] и С.П.Гейсберга [13] исследовался вопрос о том, какая из указанных Ефимовым возможностей для $f(\mathbb{R}^2)$ в действительности реализуется. Для линейного отображения $f_1(x_1, x_2) = x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1$ область $f(\mathbb{R}^2)$ является плоскостью. Кантор [29] доказал, что если

$$\det f'(x) \equiv \text{const} < 0, \quad \text{rot } f(x) \equiv 0,$$

то $f(\mathbb{R}^2)$ не может быть полосой. Он же [29] построил пример отображения, удовлетворяющего последним ограничениям, для которого $f(\mathbb{R}^2)$ есть полуплоскость. Гейсберг [13] несколько усилил результат Кантора, показав, что $f(\mathbb{R}^2)$ не может быть полосой ни в одном из следующих случаев:

(а) $\text{rot } f(x) \equiv 0$, $\det f'(x) = -g^2(x)$, где функция g не обращается в нуль и выпукла вниз;

(б) $\text{rot } f(x) \equiv 0$, а $\det f'(x)$ есть многочлен, принимающий только отрицательные значения.

В этой главе указаны условия, аналогичные условиям теоремы 1.1, при которых $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ и f является диффеоморфизмом. Основным результатом является

Теорема 1.2. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ принадлежит классу C^1 , причем для всех $x \in \mathbb{R}^2$

$$\det f'(x) \neq 0.$$

Пусть, кроме того, имеется функция $L : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, для которой

$$\int_0^{+\infty} L(t) dt = +\infty \quad (3)$$

и для всех $x \in \mathbb{R}^2$ справедливы неравенства

$$|\det f'(x)| \geq L(|x|)|\text{rot } f(x)| + L^2(|x|), \quad (4)$$

$$|\text{tr } f'(x)| \leq L(|x|). \quad (5)$$

Тогда f есть диффеоморфизм плоскости \mathbb{R}^2 на себя. (Здесь $\text{tr } f'(x)$, как обычно,— след отображения $f'(x)$, т.е. $\text{tr } f'(x) = \partial f_1/\partial x_1(x) + \partial f_2/\partial x_2(x)$.)

Заметим, прежде всего, что в теореме 1.2, в отличие от теоремы 1.1, допускается случай $\det f'(x) > 0$.

Далее покажем, что условия (3), (4) являются прямым обобщением условий (1), (2) теоремы Ефимова. Именно, пусть неравенство (2) справедливо для всех $x \in \mathbb{R}^2$, а неравенство (1) справедливо для всех x при некотором фиксированном y , т.е.

$$0 < 1/a(x) \leq C_1|x| + C_3,$$

где C_1, C_3 — неотрицательные постоянные, не равные нулю одновременно. Положив

$$L(t) = \frac{1}{C_1 t + C_3},$$

будем иметь

$$\int_0^{+\infty} L(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{C_1 t + C_3} dt = +\infty,$$

а поскольку

$$a(x) \geq L(|x|),$$

то

$$|\det f'(x)| \geq a(x)|\text{rot } f(x)| + a^2(x) \geq L(|x|)|\text{rot } f(x)| + L^2(|x|).$$

Таким образом, из неравенств (1), (2) следуют условия (3), (4).

Неравенство (5) является дополнительным по отношению к условиям теоремы 1.1. В этом смысле оно аналогично дополнительным условиям сформулированных выше теорем Кантора и Гейсберга, важнейшим из которых является $\text{rot } f(x) \equiv 0$.

В §2 настоящей главы теорема 1.2 выводится из теоремы Адамара–Леви–Джона о глобальной обратной функции [98], [92], [110], которую мы напомним в следующей удобной для нас формулировке.

Теорема 1.3. Пусть непрерывно дифференцируемое отображение $f : B \rightarrow b$ банаховых пространств B и b и непрерывная неубывающая функция $\mathcal{L} : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ удовлетворяют условиям

1) для каждого $X \in B$ линейное отображение $f'(X)$ имеет обратное отображение, которое непрерывно,

2) для каждого $X \in B$ норма $\|f'(X)^{-1}\|$ линейного отображения $f'(X)^{-1}$, обратного к $f'(X)$, не превосходит $\mathcal{L}(|X|)$;

$$3) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathcal{L}(t)} = +\infty.$$

Тогда f является диффеоморфизмом на все пространство b .

В §3, написанном совместно с Н.С. Даирбековым, показано, что следующая теорема эквивалентна теореме 1.1.

Теорема 1.4. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ принадлежит классу C^1 , причем $\det f'(x) < 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Пусть, кроме того, существуют положительная функция $b(x) > 0$ и неотрицательные постоянные C_1, C_2 такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство

$$|1/b(x) - 1/b(y)| \leq C_1|x - y| + C_2.$$

Тогда если для всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$|\mu_2(x)| \geq |\mu_1(x)| \geq b(x), \quad (6)$$

где $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ — собственные числа линейного отображения $f'(x)$, то $f(\mathbb{R}^2)$ есть выпуклая область и f отображает \mathbb{R}^2 на $f(\mathbb{R}^2)$ гомеоморфно.

Последняя теорема по нашему мнению указывает направление, в котором следует искать многомерные аналоги теоремы Ефимова. Для большей ясности сформулируем простейшую теорему, которая должна быть доказана на этом пути.

Гипотетическая теорема. Пусть $n \geq 2$ и $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу C^1 , причем $\det f'(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, существует постоянная $K < +\infty$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$r(f'(x)^{-1}) \leq K,$$

где $r(f'(x)^{-1})$ — спектральный радиус линейного отображения $f'(x)^{-1}$, т.е. максимум модуля его собственных чисел. Тогда $f(\mathbb{R}^n)$ является выпуклой областью и отображение f инъективно.

Заметим, что при $n = 2$ и $\det f'(x) < 0$ утверждение гипотетической теоремы следует из теоремы 1.4.

§2. Доказательство теоремы 1.2

Пусть V — вещественное конечномерное векторное пространство и $A : V \rightarrow V$ — линейное отображение. Следуя [63, с. 201], символом V^+ будем обозначать комплексификацию пространства V . Известно, что каждое линейное отображение $A : V \rightarrow V$ может быть естественным образом распространено до линейного отображения $A^+ : V^+ \rightarrow V^+$. Поскольку каждый базис пространства V является в то же время базисом в V^+ , причем матрицы отображений A и A^+ , записанные в одном базисе, совпадают, то

$$\det A^+ = \det A, \quad \operatorname{tr} A^+ = \operatorname{tr} A.$$

Отображение A^+ заведомо имеет полный набор (вообще говоря) комплексных собственных чисел. Спектральным радиусом $r(A^+)$ линейного отображения A^+ называем, как обычно, максимальный из модулей собственных значений этого оператора.

Следующая лемма позволит нам вывести теорему 1.2 из теоремы Адамара–Леви–Джона.

Лемма 1.5. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство*

$$\|(f \circ J)'(x)^{-1}\| \leq \sqrt{6}/L(|x|),$$

где $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — линейное отображение, задаваемое в каноническом базисе в \mathbb{R}^2 матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для краткости обозначим $F = f \circ J$, $L = L(|x|)$. Поскольку

$$\det F'(x) = \det f'(Jx) \cdot \det J = \det f'(Jx),$$

$$\operatorname{tr} F'(x) = \operatorname{tr} f'(Jx)J = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \operatorname{rot} f(Jx), \quad |Jx| = |x|,$$

то неравенство (4) эквивалентно следующему

$$|\det F'(x)| \geq L|\operatorname{tr} F'(x)| + L^2. \quad (7)$$

Собственные числа линейного отображений $F'(x)^+$ обозначим через μ_1 и μ_2 . Тогда

$$\det F'(x) = \det F'(x)^+ = \mu_1\mu_2, \quad \operatorname{tr} F'(x) = \operatorname{tr} F'(x)^+ = \mu_1 + \mu_2.$$

Поэтому (7) равносильно такому неравенству

$$|\mu_1\mu_2| \geq L|\mu_1 + \mu_2| + L^2.$$

Считая, что $|\mu_1| \leq |\mu_2|$, найдем из последнего неравенства оценку снизу на μ_1 :

$$|\mu_1|(|\mu_2| + L) \geq L(|\mu_2| + L), \quad |\mu_1| \geq L. \quad (8)$$

Число $1/|\mu_1|$ является наибольшим по модулю собственным числом линейного отображения $A = [F'(x)^+]^{-1}$, а значит $r(A) = 1/|\mu_1| \leq 1/L$.

Согласно теореме Шура [5, с. 224], в унитарном пространстве \mathbb{R}^{2+} можно выбрать ортонормированный базис, в котором матрица A отображения A будет иметь треугольный вид. При этом на главной диагонали будут стоять собственные числа отображения A , модули которых нами уже оценены сверху. Поэтому остается лишь оценить сверху модуль единственного ненулевого члена, стоящего вне главной диагонали и воспользоваться известной оценкой нормы матрицы через модули ее элементов.

Действуя в соответствии с доказательством теоремы Шура [5], обозначим через λ_1, λ_2 собственные числа отображения A , а через c — собственный вектор единичной длины, соответствующий собственному значению λ_1 . Рассмотрим матрицу

$$T = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

первым столбцом которой является вектор c , а второй столбец выбран так, чтобы T была унитарной. Обозначая через a_{ij} элементы матрицы A , являющейся матрицей оператора A в каноническом базисе, будем иметь,

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \bar{c}_1(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) + \bar{c}_2(a_{21}b_1 + a_{22}b_2) \\ -1 & \bar{b}_1(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) + \bar{b}_2(a_{21}b_1 + a_{22}b_2) \end{pmatrix}.$$

Здесь черта означает комплексное сопряжение. Элемент, стоящий на пересечении второго столбца и второй строки, должен быть равен λ_2 , поскольку матрицы $T^{-1}AT$ и A имеют одни и те же собственные числа. Для

того чтобы оценить модуль ненулевого члена матрицы $T^{-1}AT$, стоящего вне главной диагонали, преобразуем его:

$$\begin{aligned}
\nu &= \bar{c}_1(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) + \bar{c}_2(a_{21}b_1 + a_{22}b_2) = \\
&= b_1(a_{11}\bar{c}_1 + a_{21}\bar{c}_2) + b_2(a_{12}\bar{c}_1 + a_{22}\bar{c}_2) = \\
&= b_1(a_{11}\bar{c}_1 + a_{12}\bar{c}_2) + b_2(a_{21}\bar{c}_1 + a_{22}\bar{c}_2) + (a_{12} - a_{21})(b_2\bar{c}_1 - b_1\bar{c}_2) = \\
&= \bar{\lambda}_1(b_1\bar{c}_1 + b_2\bar{c}_2) + (a_{12} - a_{21})(b_2\bar{c}_1 - b_1\bar{c}_2) = \\
&= (a_{12} - a_{21})(b_2\bar{c}_1 - b_1\bar{c}_2).
\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что c — собственный вектор матрицы A , а вектор b ортогонален c . Поскольку ,

$$\begin{aligned}
(f \circ J)'(x)^{-1} &= J^{-1}f'(Jx)^{-1} = \\
&= [\det f'(Jx)]^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(Jx) & -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(Jx) \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(Jx) & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(Jx) \end{pmatrix} = \\
&= [\det f'(Jx)]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(Jx) & -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(Jx) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(Jx) & -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(Jx) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

то с учетом неравенств (4) и (5) получаем

$$|a_{12} - a_{21}| = \frac{\left| \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(Jx) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(Jx) \right|}{|\det f'(Jx)|} \leq \frac{1}{L(|Jx|)} = 1/L.$$

Это неравенство в совокупности с тем фактом, что векторы b и c имеют единичную длину, дает

$$|\nu| \leq 2/L.$$

Наконец, используя известную оценку для нормы матрицы через ее элементы, получаем неравенство

$$\|A\| \leq (|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + |\nu|^2)^{1/2} \leq (1/L^2 + 1/L^2 + 4/L^2)^{1/2} = \sqrt{6}/L,$$

которое и завершает доказательство леммы 1.5.

Доказательство теоремы 1.2. Согласно лемме 1.5 для всех $x \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$\|(f \circ J)'(x)^{-1}\| \leq \sqrt{6}/L(|x|).$$

Поэтому для отображения $f \circ J$ выполнены условия теоремы 1.3 с функцией \mathcal{L} , определенной равенством

$$\mathcal{L}(t) = \sqrt{6}/L(t), \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Следовательно, отображение $f \circ J$, а значит и f , является диффеоморфизмом \mathbb{R}^2 на себя, что и требовалось доказать.

§3. Доказательство теоремы 1.4

Для краткости обозначим $b = b(x)$, $a = a(x) = (\sqrt{2} - 1)b(x)$, $\mu_i = \mu_i(x)$, $i = 1, 2$. Тогда $a^2 + 2ab - b^2 = 0$, а значит $(b - 2a)b = a^2$. Воспользовавшись неравенством (6), получим $(|\mu_1| - 2a)|\mu_2| \geq a^2$ или $|\mu_1\mu_2| \geq 2a|\mu_2| + a^2$. Следовательно,

$$|\det f'(x)| = |\mu_1\mu_2| \geq 2a|\mu_2| + a^2 \geq a|\mu_1 + \mu_2| + a^2 = a|\operatorname{tr} f'(x)| + a^2. \quad (9)$$

Определим вспомогательное отображение $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой $F(x) = (f \circ J)(x)$, где $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — линейное отображение, задаваемое в каноническом базисе в \mathbb{R}^2 матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \det F'(x) &= \det f'(Jx) \det J = \det f'(Jx), \\ \operatorname{rot} F(x) &= \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(Jx) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(Jx) = \operatorname{tr} f'(Jx). \end{aligned}$$

Значит, неравенство (9) может быть переписано в виде

$$|\det F'(x)| \geq a(Jx)|\operatorname{rot} F(x)| + a^2(Jx).$$

Поэтому для отображения F выполнены условия теоремы 1.1 с функцией $\tilde{a}(x) = (a \circ J)(x)$. Следовательно F , а значит и f , гомеоморфно отображает \mathbb{R}^2 на выпуклую область. Теорема 1.4 доказана.

Выше мы вывели теорему 1.4 из теоремы 1.1, показав, что при выполнении условий первой выполняются также и условия второй из них. Теперь покажем, что в свою очередь теорема 1.1 следует из теоремы 1.4. А именно, убедимся, что если выполнены условия теоремы 1.1, то выполнены также и условия теоремы 1.4.

В самом деле, если выполнены условия теоремы 1.1, то согласно первому этапу доказательства леммы 1.5 (см. неравенство (8)) собственные числа $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ линейного отображения $(f \circ J)'(x)$ удовлетворяют неравенству

$$|\mu_2(x)| \geq |\mu_1(x)| \geq a(Jx).$$

Поэтому для отображения $f \circ J$ выполнены условия теоремы 1.4 с $b(x) = (a \circ J)(x)$. Следовательно $f \circ J$, а значит и f , гомеоморфно отображает \mathbb{R}^2 на выпуклую область. Теорема 1.1 доказана.

Глава 2. Вложение локально-евклидовых и конформно-евклидовых метрик

Возможность изометрического погружения и вложения в \mathbb{R}^2 локально-евклидовой метрики, заданной в области на евклидовой плоскости, изучалась, в частности, в [10], [49], [50], [56], [87] и [93]. При этом в [10], [49], [50], [56] и [93], уделялось особое внимание понижению априорных требований к гладкости коэффициентов метрики, а в [49], [50] и [56] — еще и возможности вложения локально-евклидовой метрики, заданной в неодносвязной области.

В настоящей главе вопрос о вложимости локально-евклидовой метрики исследуется с помощью теоремы о глобальной обратной функции [74], [92], [98], [109]. Такой подход позволяет исследовать вложимость многомерных (а в принципе — и бесконечномерных) метрик. Кроме того мы показываем, что если погружение метрики уже построено, то задача о ее вложении может быть решена нашим методом при весьма слабых предположениях о гладкости погружения.

В последнем параграфе настоящей главы, по аналогии с предыдущим, с помощью теоремы В.А.Зорича об устранимости изолированной особенности локально-квазиконформного отображения [23], [65] исследуется вопрос о вложении n -мерной конформно-евклидовой метрики в \mathbb{R}^n ($n \geq 3$).

§1. Определения и предварительные замечания

Нам предстоит работать с несколькими экземплярами пространства \mathbb{R}^n , которые мы для большей ясности будем обозначать через \mathbb{R}_u^n или \mathbb{R}_x^n в зависимости от того, как обозначены координаты в этом пространстве: u_1, \dots, u_n или x_1, \dots, x_n соответственно.

Всюду в этой главе мы будем предполагать, что в области D пространства \mathbb{R}_u^n ($n \geq 2$) задана метрика

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(u) du^i du^j, \quad u \in D. \quad (1)$$

Напомним, что отображение $x : D \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ называется

(а) *изометрическим вложением* метрики (1) в \mathbb{R}_x^n , если x дифференцируемо, инъективно и приводит метрику (1) к стандартному виду

$$\sum_{i=1}^n (dx^i)^2;$$

(б) *изометрическим погружением* метрики (1), если каждая точка области D имеет окрестность U такую, что сужение отображения x на $U \cap D$ является изометрическим вложением в \mathbb{R}_x^n множества $U \cap D$ с метрикой (1).

Метрика (1) называется *локально-евклидовой*, если каждая точка области D имеет окрестность U , допускающую изометрическое вложение в \mathbb{R}_x^n метрики (1).

Изучение возможности вложения в \mathbb{R}_x^n метрики (1), очевидно, разделяется на следующие три этапа:

(А). Нахождение условий на коэффициенты, при выполнении которых метрика является локально-евклидовой. Сюда же относится вопрос о том, в какой степени гладкость коэффициентов g_{ij} гарантирует возможность нахождения гладкого вложения x_U некоторой окрестности U произвольной точки из D .

(Б) Построение изометрического погружения $x : D \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ и выяснение в какой мере гладкость локальных вложений x_U влечет общую гладкость вложения x .

(В) Выяснение того, является ли изометрическое погружение x , построенное на втором этапе, вложением.

Основной целью настоящего параграфа является изучение третьего этапа. При этом мы будем опираться на теорему о глобальной обратной функции. Поскольку она касается отображений, заданных во всем пространстве, то мы, как правило, будем предполагать, что метрика (1) задана во всем \mathbb{R}_u^n . При этом изучение второго этапа оказывается довольно простым

делом (см. лемму 2.1). Что же касается первого этапа, то хорошо известно, что необходимым и достаточным условием локальной евклидовости двумерной метрики с C^2 -гладкими коэффициентами является равенство нулю ее гауссовой кривизны [49], [50]. Известны также некоторые условия для двумерных метрик с менее гладкими коэффициентами [93], [49], [50]. Условия локальной евклидовости достаточно гладкой многомерной метрики также известны: для этого необходимо и достаточно, чтобы ее тензор кривизны R_{ijkl} обращался в нуль [64]. С другой стороны известно, что локальные проблемы изометрического вложения адекватно переводятся на язык чистого анализа [15]. В самом деле, построение локального изометрического вложения x_U эквивалентно доказательству локальной теоремы существования для системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_U^k}{\partial u^i} \frac{\partial x_U^k}{\partial u^j} = g_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Последнее соображение делает возможным применение методов дифференциальных уравнений в частных производных и дает надежду на понижение требований гладкости к g_{ij} . Однако все это требует применения специальных методов и выходит за рамки нашего изложения. Нам же, для того, чтобы не акцентировать внимание на первом этапе, удобно ввести следующее определение:

Метрику (1) будем называть *локально-евклидовой метрикой класса C^m* ($m = 1, 2, \dots$) в области D , если для каждой точки $u \in D$ найдется ее окрестность U и изометрическое вложение $x_U : U \cap D \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ класса C^m .

Лемма 2.1. *Каждая локально-евклидова метрика (1) класса C^m ($m \geq 1$), заданная в односвязной области $D \subset \mathbb{R}_u^n$, допускает изометрическое погружение в \mathbb{R}_x^n класса C^m .*

Доказательство. Фиксируем точку $u_0 \in D$ и такую ее окрестность U_0 , что существует изометрическое вложение $x_0 = x_{U_0} : U_0 \cap D \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ класса C^m . Для произвольной точки u области D построим конечный набор точек $u_i \in D$ ($i = 1, 2, \dots, N$) и их открытых окрестностей $U_i \subset D$ так, чтобы 1) $u_N = u$; 2) для каждого i существовало изометрическое вложение $x_i = x_{U_i} : U_i \cap D \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ класса C^m ; 3) для каждого i пересечение $U_{i-1} \cap U_i$ являлось непустым связным множеством. Из изометричности отображений x_{i-1} и x_i следует, что в каждой точке области определения

отображения $x_{i-1} \circ x_i^{-1} : x_i(U_i \cap U_{i-1}) \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ его верхнее и нижнее растяжения равны единице. Поскольку множество $x_i(U_i \cap U_{i-1})$ открыто и связно, отсюда следует, что найдется евклидова изометрия $P_i : \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_x^n$, сужение которой на множество $x_i(U_i \cap U_{i-1})$ совпадает с отображением $x_{i-1} \circ x_i^{-1}$. Другими словами, мы нашли такую изометрию P_i , что для всех $u \in U_{i-1} \cap U_i$ справедливо равенство $P_i[x_i(u)] = x_{i-1}(u)$. Наконец, построим отображение $x : D \rightarrow \mathbb{R}_x^n$, задавая его значение в точке u равенством

$$x(u) = (P_1 \circ P_2 \circ \dots \circ P_{N-1} \circ P_N \circ x_N)(u).$$

Отображение x определено корректно в том смысле, что его значение в точке u не зависит от выбора вспомогательных точек u_i и их окрестностей U_i , поскольку, очевидно, имеет место теорема о монодромии, а область D односвязна. С другой стороны, x по своему построению принадлежит классу C^m и является изометрическим погружением метрики (1). Лемма 2.1 доказана.

§2. Вложения локально-евклидовых метрик

Следующая теорема является частным случаем теоремы Киллинга—Хопфа (см. следствие 2.4.10 из книги [11]). Она полностью решает вопрос о вложимости полной локально-евклидовой метрики, заданной во всем пространстве \mathbb{R}_u^n . Поэтому мы приведем ее независимое доказательство ниже.

Теорема 2.2. *Пусть локально-евклидова метрика (1) класса C^m ($m \geq 1$) задана во всем пространстве \mathbb{R}_u^n ($n \geq 2$). Тогда*

(а) *если метрика (1) полна, то она допускает изометрическое вложение $x : \mathbb{R}_u^n \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ класса C^m , причем $x(\mathbb{R}_u^n) = \mathbb{R}_x^n$;*

(б) *если для некоторого $l \geq 1$ метрика (1) допускает изометрическое вложение в \mathbb{R}_x^n класса C^l , причем $x(\mathbb{R}_u^n) = \mathbb{R}_x^n$, то она полна.*

Для доказательства теоремы 2.2 нам потребуются следующие определение и вариант теоремы о глобальной обратной функции, в которых используются обозначения: B и b — банаховы пространства, D — открытое и связное подмножество пространства B , $x : B \rightarrow b$ — непрерывное отображение.

Следуя Р.Пластоку [109], будем говорить, что отображение x удовлетворяет условию (L) , если для любых точек x_1, x_2 пространства b и любого пути $P : [0, T) \rightarrow D$, $T < \infty$, удовлетворяющего для всех $t \in [0, T)$ соотношению

$$x(P(t)) = L(t),$$

где $L(t) = [(T-t)x_1 + tx_2]/T$, найдется последовательность точек t_j , стремящаяся при $j \rightarrow \infty$ к числу T слева, такая, что $\lim_{j \rightarrow \infty} P(t_j)$ существует и лежит в D .

Теорема 2.3 (о глобальной обратной функции; Р.Пласток [109]). *Пусть $x : D \subset B \rightarrow b$ является локальным гомеоморфизмом. Тогда условие (L) является необходимым и достаточным для того, чтобы x было гомеоморфизмом D на b .*

Доказательство теоремы 2.2. (а) Согласно лемме 2.1 существует изометрическое погружение $x : \mathbb{R}_u^n \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ класса C^1 метрики (1). Пусть T, L и P имеют тот же смысл, что и в определении (L) условия выше. В качестве t_j возьмем произвольную последовательность чисел, стремящуюся при $j \rightarrow \infty$ к T слева. Расстояние между точками $P(t_i)$ и $P(t_j)$ в метрике (1) не превосходит длины заключенного между ними участка кривой $P(t)$, измеренной в метрике (1). Последняя же, ввиду локальной изометричности отображения x , равна длине участка кривой $x(P(t)) = L(t)$, заключенного между точками $x(P(t_i))$ и $x(P(t_j))$ (на этот раз длина измерена уже в евклидовой метрике в \mathbb{R}_x^n). Но $L(t)$ — прямая, а значит длина последней кривой равна евклидову расстоянию между точками $x(P(t_i)) = L(t_i)$ и $x(P(t_j)) = L(t_j)$. Наконец, поскольку $L(t_j) \rightarrow L(T) = x_2$ при $j \rightarrow \infty$, то последовательность точек $P(t_j)$ фундаментальна в метрике (1). В силу полноты метрики (1) последовательность $P(t_j)$ сходится в этой метрике к некоторой точке пространства \mathbb{R}_u^n . Но тогда эта последовательность будет сходиться к этой же точке и в евклидовой метрике в \mathbb{R}_u^n . Следовательно, погружение x обладает свойством (L) , а значит, по теореме 2.3 является гомеоморфизмом “на” или, другими словами, — таким вложением, что $x(\mathbb{R}_u^n) = \mathbb{R}_x^n$. Утверждение (а) теоремы 2.2 доказано. Доказательство утверждения (б) очевидно.

Отметим, что из доказательства теоремы 2.2 следует, что каждое (!) погружение полной локально-евклидовой метрики (1), заданной во всем пространстве \mathbb{R}_u^n , является вложением таким, что $x(\mathbb{R}_u^n) = \mathbb{R}_x^n$.

Ниже мы получим достаточное условие вложимости в \mathbb{R}_x^n локально-евклидовой метрики (1) в терминах скорости роста ее коэффициентов на бесконечности. Для этого нам понадобится еще один вариант теоремы о глобальной обратной функции, прежде чем сформулировать который введем следующие обозначения.

Если B и b — банаховы пространства, а отображение $x : B \rightarrow b$ является локальным гомеоморфизмом, то нижнее растяжение [98] отображения x в точке $X \in B$ обозначим через

$$D_X^- x = \liminf_{Y \rightarrow X} \frac{|x(Y) - x(X)|}{|Y - X|},$$

где \liminf и $|\cdot|$ — символы нижнего предела и нормы соответственно. Отметим, что если x дифференцируемо в точке X и дифференциал $x'(X)$ обратим, то, очевидно, $D_X^- x = \|x'(X)^{-1}\|^{-1}$, где $\|\cdot\|$ — операторная норма линейного отображения. Кроме того, для неотрицательных вещественных чисел определим невозрастающую функцию M , задав ее равенством

$$M(t) = \inf_{\substack{|X| \leq t \\ X \in B}} D_X^- x.$$

Теорема 2.4 (о глобальной обратной функции; Ж.Адамар [92], П. Леви [74], [110], Ф. Джон [98] и др. [109]). Пусть B и b — банаховы пространства, а отображение $x : B \rightarrow b$ является локальным гомеоморфизмом, причем

$$\int_0^{+\infty} M(t) dt = +\infty.$$

Тогда x взаимно однозначно отображает B на все пространство b .

Лемма 2.5. Пусть $A = (a_{ij})$ — невырожденная вещественная $n \times n$ -матрица. Тогда

$$\|A^{-1}\|^2 \leq \left(n \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_{jj} \right) / \det(g_{kl}),$$

где $g_{kl} = \sum_{s=1}^n a_{ks}a_{ls}$, $a \|\cdot\|$ — операторная норма матрицы, построенная по евклидовой норме в \mathbb{R}^n .

Доказательство. Пусть A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A и $\Delta = \det A$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|^2 &= \|A_{ik}/\Delta\|^2 \leq \sum_{i,k=1}^n A_{ik}^2/\Delta^2 \leq \\ &\leq \sum_{i,k=1}^n \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{l=1}^n a_{jl}^2 \right] / \Delta^2 = \left(n \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_{jj} \right) / \det(g_{kl}). \end{aligned}$$

Первое из написанных здесь неравенств справедливо, поскольку квадрат нормы матрицы не превосходит суммы квадратов ее элементов, а второе — в силу неравенства Адамара [5, с. 159-160]. Лемма 2.5 доказана.

Теорема 2.6. Пусть в \mathbb{R}_u^n ($n \geq 2$) задана локально-евклидова метрика (1) класса C^m ($m \geq 1$). Пусть, кроме того, существует невозрастающая непрерывная функция $M : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такая, что

$$\int_0^{+\infty} M(t) dt = +\infty \quad (2)$$

и

$$\left(n \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_{jj}(u) \right) / \det(g_{kl}(u)) \leq [M(|u|)]^{-2} \quad (3)$$

для всех $u \in \mathbb{R}_u^n$. Тогда метрика (1) допускает изометрическое вложение $x : \mathbb{R}_u^n \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ класса C^m , причем $x(\mathbb{R}_u^n) = \mathbb{R}_x^n$.

Доказательство. Согласно лемме 2.1 существует изометрическое погружение $x : \mathbb{R}_u^n \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ класса C^m метрики (1). В силу леммы 2.5

$$D_u^- x = \|x'(u)^{-1}\|^{-1} \geq M(|u|).$$

Тогда теорема 2.4 утверждает, что x является гомеоморфизмом на все \mathbb{R}_x^n . Теорема 2.6 доказана.

Отметим, что на самом деле мы доказали, что в условиях теоремы 2.6 всякое изометрическое погружение метрики (1) является вложением. Среди результатов Сабитова [49], [50] и Векуа [10] нет аналогов такого утверждения.

Отметим также, что условие (2) на убывание функции M в теореме 2.6 неулучшаемо. Точнее, для каждого $n \geq 2$ и для каждой невозрастающей непрерывной функции $m : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такой, что

$$\int_0^{+\infty} m(t) dt < +\infty,$$

существуют локально-евклидова метрика (1) в \mathbb{R}_u^n и числа $c > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что для всех $t \geq t_0$ выполнено неравенство

$$cm(t) \leq M(t) \equiv \inf_{|u| \leq t} \frac{(\det(g_{kl}(u)))^{1/2}}{(n \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_{jj}(u))^{1/2}},$$

однако данная метрика не допускает изометрического вложения в \mathbb{R}_x^n .

В самом деле, в работе Джона [98, с. 92] для любой такой функции m построено непрерывно дифференцируемое отображение $x = (x^1, x^2) : \mathbb{R}_u^2 \rightarrow \mathbb{R}_x^2$ со свойствами:

- (а) x сюръективно, но не инъективно;
- (б) для всех $u \in \mathbb{R}_u^2$ строки матрицы $x'(u)$ попарно ортогональны и $\det x'(u) > 0$;
- (в) для каждого $t \geq 0$ имеем $\inf_{|u| \leq t} D_u^- x = m(t)$.

Зададим отображение $X = (X^1, X^2, \dots, X^n) : \mathbb{R}_u^n \rightarrow \mathbb{R}_X^n$ по формулам

$$\begin{aligned} X^1(u^1, u^2, \dots, u^n) &= x^1(u^1, u^2), \\ X^2(u^1, u^2, \dots, u^n) &= x^2(u^1, u^2), \\ X^3(u^1, u^2, \dots, u^n) &= u^3, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ X^n(u^1, u^2, \dots, u^n) &= u^n. \end{aligned}$$

Легко видеть, что отображение X обладает следующими свойствами:

- (А) X сюръективно, но не инъективно;

(Б) для всех $u \in \mathbb{R}_u^n$ строки матрицы $X'(u)$ попарно ортогональны и $\det X'(u) > 0$;

(В) если число t_0 таково, что $m(t_0) < 1$, то для всех $t \geq t_0$ имеем

$$M(t) \geq c \inf_{|u| \leq t} D_u^- X \geq c m(t),$$

где c — некоторая постоянная.

В доказательстве нуждается только свойство (В). Левое неравенство в нем имеет место, поскольку если мы положим $A = X'(u)$ и воспользуемся обозначениями леммы 2.5, то получим

$$\begin{aligned} \left(n \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_{jj}(u) \right) / \det(g_{kl}(u)) &= \sum_{i,k=1}^n \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{l=1}^n a_{jl}^2 \right] / \Delta^2 = \\ &= \sum_{i,k=1}^n A_{ik}^2 / \Delta^2 \leq c^2 \|(A_{ik}/\Delta)\|^2 = c^2 \|A^{-1}\|^2 = c^2 / (D_u^- X)^2. \end{aligned}$$

Второе равенство здесь написано, поскольку в силу свойства (Б) у матрицы $A = X'(u)$ строки попарно ортогональны, а для таких матриц неравенство Адамара превращается в равенство. Единственное неравенство и постоянная c здесь выражают просто эквивалентность двух матричных норм. Для доказательства правого неравенства свойства (В) достаточно решить некоторое элементарное неравенство, что мы предоставляем читателю.

Евклидову метрику $(dX^1)^2 + (dX^2)^2 + \dots + (dX^n)^2$ пространства \mathbb{R}_X^n перенесем в пространство \mathbb{R}_u^n переменных u^1, u^2, \dots, u^n с помощью отображения X . Полученная метрика, очевидно, является локально-евклидовой и удовлетворяет неравенству $cm(t) \leq M(t)$ для $t \geq t_0$. Кроме того, одно из ее погружений (а именно X) не является вложением. Но из доказательства леммы 2.1 легко следует, что любое другое ее погружение имеет вид $P \circ X$, где $P : \mathbb{R}_X^n \rightarrow \mathbb{R}_X^n$ — некоторая изометрия. Поэтому никакое погружение построенной метрики не является вложением.

И.Х.Сабитов обратил мое внимание на то, что условия теоремы 2.6 не инвариантны относительно замены системы координат.

В самом деле, если $u = u(v^1, v^2, \dots, v^n) : \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_u^n$ — диффеоморфизм, то с его помощью мы можем перенести метрику (1) в пространство переменных v^1, v^2, \dots, v^n (обозначим ее через $d\sigma^2$). При этом говорят, что метрика $d\sigma^2$ получена из ds^2 заменой системы координат. Однако легко видеть, что диффеоморфизм u всегда можно подобрать так, чтобы для метрики $d\sigma^2$ условия теоремы 2.6 не выполнялись.

С геометрической точки зрения указанная неинвариантность условий теоремы 2.6 снижает ее ценность и делает актуальным рассмотрение такого круга задач: найти условия на коэффициенты метрики (1), инвариантные относительно замены переменных, гарантирующие вложимость метрики в \mathbb{R}_x^n ; для данной метрики (1) найти наилучшую (с точки зрения теоремы 2.6) систему координат, т.е. такую систему координат, в которой для функции M , удовлетворяющей условию (3), интеграл

$$\int_0^{+\infty} M(t) dt \quad (4)$$

принимает наибольшее значение; останется ли справедливой теорема 2.6, если вместо условия (2) потребовать, чтобы бесконечности равнялась точная верхняя граница интегралов (4) по всем системам координат и всем функциям M , удовлетворяющим условию (3)? Каждая из перечисленных задач заслуживает, на наш взгляд, самостоятельного исследования.

Отметим, что в работах [10], [49] и [50] наиболее полные результаты получены для вложений двумерных метрик, заданных в изотермических координатах. Если бы к такой метрике удалось применить теорему 2.6, то для любого ее вложения x мы бы имели $x(\mathbb{R}_u^2) = \mathbb{R}_x^2$. А тогда в силу теоремы 2.2 метрика была бы полной. Но, приводимая ниже теорема 2.7 показывает, что класс полных локально-евклидовых метрик, заданных в изотермических координатах в \mathbb{R}_u^2 , крайне беден. (Теорема 2.8 показывает, что в многомерных пространствах аналогичное утверждение справедливо и без предположения о полноте метрики.) Из сказанного следует, во-первых, что теорема 2.6 малосодержательна для метрик, заданных в изотермических координатах, и, во-вторых, что теорема 2.6 работает в ином классе метрик, чем основные результаты работ [10], [49] и [50].

Теорема 2.7. *Всякая полная локально-евклидова метрика, заданная в изотермических координатах в \mathbb{R}_u^2 , имеет постоянные коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $x : \mathbb{R}_u^2 \rightarrow \mathbb{R}_x^2$ — изометрическое погружение данной метрики ds^2 , существование которого утверждает лемма 2.1. Поскольку метрика ds^2 задана в изотермических координатах, то тождественное отображение $\text{id} : \mathbb{R}_v^2 \rightarrow \mathbb{R}_u^2$ плоскости \mathbb{R}_v^2 с евклидовой метрикой в плоскость \mathbb{R}_u^2 с метрикой ds^2 является конформным. Поэтому отображение $x_0 = x \circ \text{id}$ является (быть может неоднолистным) конформным отображением \mathbb{R}_v^2 с евклидовой метрикой в \mathbb{R}_x^2 с евклидовой метрикой. С другой стороны, метрика ds^2 полна. Следовательно, в силу замечания, сделанного после доказательства теоремы 2.2, x_0 — биекция. Используем теперь свойство универсальности дробно-линейного отображения, утверждающее, что всякая аналитическая функция, осуществляющая биекцию расширенной комплексной плоскости на себя, является дробно-линейной [19], [48]. Поскольку, после продолжения в $\overline{\mathbb{R}^2}$, x_0 оставляет бесконечность на месте, то из свойства универсальности заключаем, что x_0 линейно. Но тогда метрика ds^2 , очевидно, имеет постоянные коэффициенты. Теорема 2.7 доказана.

Теорема 2.8. *Всякая локально-евклидова метрика класса C^m ($m \geq 1$), заданная в изотермических координатах в \mathbb{R}_u^n ($n \geq 3$), имеет постоянные коэффициенты.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.7, убеждаемся, что всякое погружение x данной метрики является (быть может неоднолистным) конформным отображением. Тогда по теореме Лиувилля [48] x мебиусово, а значит, линейно. Теорема 2.8 доказана.

Следующая теорема представляет собой незначительное усиление теоремы о глобальной обратной функции для отображений конечномерных пространств. Она позволяет снять условие монотонности функции M в теореме 2.6.

Теорема 2.9. (Р.Пласток [109, теорема 4.2].) *Пусть отображение $x : \mathbb{R}_u^n \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ ($n \geq 1$) принадлежит классу C^1 и $x'(u)$ обратимо для всех $u \in \mathbb{R}_u^n$. Тогда если*

$$\int_0^{+\infty} \inf_{|u|=t} \|x'(u)^{-1}\|^{-1} dt = +\infty,$$

то x является диффеоморфизмом пространства \mathbb{R}_u^n на \mathbb{R}_x^n .

Далее нашей целью является доказательство приводимой ниже теоремы 2.11 о радиусе инъективности погружения локально-евклидовой метрики. Это доказательство основано на следующем варианте теоремы о глобальной обратной функции, доказанном Джоном [98] и приводимой здесь в удобной для нас формулировке.

Теорема 2.10. (Ф.Джон [98, теорема IIА].) Пусть B и b — банаховы пространства, x является локально-гомеоморфным отображением шара пространства B с центром u радиуса R в пространство b . Положим для $0 \leq t < R$

$$M(t) = \inf_{|u-v| \leq t} D_v^- x.$$

Тогда в шаре ω пространства b с центром $x(u)$ радиуса

$$r = \int_0^R M(t) dt$$

определено отображение x^{-1} , обратное к x , т.е. такое, что

- (а) $\omega \subset x(B)$;
- (б) x^{-1} непрерывно в ω ;
- (в) $x(x^{-1}(v)) = v$ для всех $v \in \omega$.

Теорема 2.11. Пусть в \mathbb{R}_u^n ($n \geq 2$) задана локально-евклидова метрика (1) класса C^m ($m \geq 1$). Для произвольной точки $u \in \mathbb{R}_u^n$ построим функции

$$N(t) = \sup_{|v-u| \leq t} V(v) \quad u \quad M(t) = \inf_{|v-u| \leq t} W(v),$$

где

$$V(v) = \left[\prod_{i=1}^n g_{ii}(v) \right]^{1/2},$$

$$W(v) = [\det(g_{kl}(v))]^{1/2} \left[n \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_{jj}(v) \right]^{-1/2}.$$

Тогда для всякого положительного r , удовлетворяющего неравенству

$$rN(r) < \int_0^{+\infty} M(t) dt, \quad (5)$$

евклидов шар с центром u и радиуса r , снабженный метрикой (1), допускает изометрическое вложение в \mathbb{R}_x^n класса C^m .

Доказательство. Согласно лемме 2.1 существует изометрическое погружение $x : \mathbb{R}_u^n \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ класса C^m метрики (1). В силу леммы 2.5

$$D_v^- x = \|x'(v)^{-1}\|^{-1} \geq W(v) \geq \inf_{|w-u| \leq |v-u|} W(v) = M(|v-u|).$$

Тогда теорема 2.10 утверждает, что в евклидовом шаре ω пространства \mathbb{R}_x^n с центром $x(u)$ и радиусом

$$\rho = \int_0^{+\infty} M(t) dt$$

определено обратное к x отображение. С другой стороны, для всякого положительного r , удовлетворяющего неравенству (5), и всякого $v \in \mathbb{R}_u^n$ такого, что $|v-u| < r$, имеем

$$\begin{aligned} |x(v) - x(u)| &\leq |v-u| \sup_{|w-u| \leq r} \|x'(w)\| \leq \\ &\leq r \sup_{|w-u| \leq r} \left\{ \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial x^i}{\partial u^j}(w) \right]^2 \right\}^{1/2} = r \sup_{|w-u| \leq r} \left[\prod_{i=1}^n g_{ii}(w) \right]^{1/2} = \\ &= rN(r) < \int_0^{+\infty} M(t) dt = \rho. \end{aligned}$$

(Второе неравенство здесь написано ввиду неравенства Адамара.) Значит, образ шара $|v-u| < r$ при отображении x содержится в шаре ω . Следовательно, сужение отображения x на шар $|v-u| < r$ инъективно. Теорема 2.11 доказана.

§3. Вложения конформно-евклидовых метрик

Метрику (1) называем *локально конформно-евклидовой* метрикой класса C^m ($m \geq 1$), если для каждой точки $u \in D \subset \mathbb{R}_u^n$ найдутся ее окрестность U и инъективное отображение $x_U : U \cap D \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ класса C^m , приводящее метрику (1) к виду

$$ds^2 = g(x) \sum_{i=1}^n (dx^i)^2, \quad g(x) > 0,$$

с функцией g из C^m .

Отметим, что свойство метрики (1) быть локально конформно-евклидовой может быть выражено целиком в терминах ее коэффициентов [89, с. 89-92]: при $n = 2$ всякая метрика (1) является локально конформно-евклидовой; при $n = 3$ метрика (1) является локально конформно-евклидовой если и только если ее тензор Схоутена

$$R_{ijk} = R_{ij,k} - R_{ik,j} + \frac{1}{4}(g_{ik}R_{,j} - g_{ij}R_{,k})$$

обращается в нуль в каждой точке области D ; при $n > 3$ метрика (1) является локально конформно-евклидовой если только если ее тензор Вейля

$$C_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \frac{1}{n-2}(\delta_j^h R_{ik} - \delta_k^h R_{ij} + g_{ik}R_j^h - g_{ij}R_k^h) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik})$$

обращается в нуль в каждой точке области D . Здесь использованы следующие обозначения классической римановой геометрии: R_{ijk}^h — коэффициенты тензора кривизны Римана, R_{ij} — коэффициенты тензора Риччи, R — скалярная кривизна, δ_j^h — символ Кронеккера, $W_{,k}$ — ковариантная производная тензора W относительно тензора g_{ij} .

Лемма 2.12. *Каждая локально конформно-евклидова метрика (1) класса C^m ($m \geq 1$), заданная в односвязной области D , допускает конформное погружение в \mathbb{R}_x^n класса C^m .*

Доказательство повторяет доказательство леммы 2.1, только в качестве P_i теперь нужно брать не евклидову изометрию, а конформное отображение \mathbb{R}_x^n на себя.

Исследуя вложимость конформно-евклидовых метрик, мы будем опираться не на теорему о глобальной обратной функции, а на теорему В.А.Зорича об устранимости изолированной особенности локально-квазиконформного отображения, приводимую ниже в удобной для нас формулировке. Предварительно напомним, что коэффициентом квазиконформности гомеоморфного отображения $x : D \rightarrow D'$ области $D \subset \overline{\mathbb{R}}_u^n$ ($n \geq 2$) на область $D' \subset \overline{\mathbb{R}}_x^n$ в точке $u \in D$ называется число

$$K(u) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\max_{|v-u|=r} |x(v) - x(u)|}{\min_{|v-u|=r} |x(v) - x(u)|}$$

при условии, что ни u , ни $x(u)$ не являются бесконечностью (этого всегда можно добиться совершая дополнительные мебиусовы преобразования пространств $\overline{\mathbb{R}}_u^n$ и $\overline{\mathbb{R}}_x^n$). Если $K(u)$ конечно всюду в D , то число

$$K = \text{ess sup}_{u \in D} K(u)$$

называется параметром квазиконформности гомеоморфного отображения $x : D \rightarrow D'$, а само отображение x при этом называется K -квазиконформным.

Если G — вещественная положительно определенная симметрическая $n \times n$ -матрица, то ее собственные числа обозначим через m_1, m_2, \dots, m_n и будем считать, что они упорядочены по возрастанию: $0 < m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n < \infty$. Введем в рассмотрение следующую величину:

$$k(G) = \frac{\|G\|^n}{|\det G|} = \frac{m_n^n}{m_1 m_2 \dots m_n}.$$

Тогда, допустив, что ни u , ни $x(u)$ не являются бесконечностью и отображение x дифференцируемо в точке u , согласно [48, с. 12–14], найдем, что параметр квазиконформности $K(u)$ отображения x в точке u равен параметру квазиконформности его производной $x'(u)$ и равен $\sqrt{k(G)}$, где $G = [x'(u)]^* x'(u)$.

Теорема 2.13 (В.А.Зорич [23], С.Агард и А.Марден [65]). *Если $x : \overline{\mathbb{R}}_u^n \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_x^n$ — локально-гомеоморфное отображение, а функция*

$$K(t) = \sup_{t < |u| < 1} K(u)$$

(коэффициент квазиконформности x в области $\{u \in \mathbb{R}^n \mid 0 < t < |u| < 1\}$) такова, что

$$\int_0^1 \frac{dt}{tK(t)} = +\infty,$$

то x может быть продолжено по непрерывности в начало координат. При этом продолжение будет гомеоморфизмом пространства $\overline{\mathbb{R}_u^n}$ на $\overline{\mathbb{R}_x^n}$.

Отметим, что до сих пор не известно, имеет ли место аналог теоремы 2.13 для бесконечномерных (например, гильбертовых) пространств.

Теорема 2.14. Пусть локально конформно-евклидова метрика (1) класса C^m ($m \geq 1$) задана во всем пространстве \mathbb{R}_u^n ($n \geq 3$). И пусть функция

$$k(t) = \sup_{|u| \leq t} k(G(u)),$$

построенная по симметрической $n \times n$ -матрице $G(u) = (g_{ij}(u))_{i,j=1,2,\dots,n}$ коэффициентов метрики (1), такова, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{k(t)}} = +\infty.$$

Тогда метрика (1) допускает конформное вложение x класса C^m пространства \mathbb{R}_u^n с метрикой (1) в $\overline{\mathbb{R}_x^n}$. При этом x допускает продолжение в бесконечно удаленную точку, после чего оно становится гомеоморфизмом пространства $\overline{\mathbb{R}_u^n}$ на $\overline{\mathbb{R}_x^n}$. В частности, метрика (1) допускает конформное вложение x_0 класса C^m пространства \mathbb{R}_u^n с метрикой (1) в \mathbb{R}_x^n .

Доказательство. Лемма 2.12 гарантирует существование конформного вложения x класса C^m пространства \mathbb{R}_u^n с метрикой (1) в $\overline{\mathbb{R}_x^n}$. Пусть φ означает инверсию пространства $\overline{\mathbb{R}_u^n}$ относительно единичной сферы с центром в нуле. Тогда $x \circ \varphi$ отображает $\overline{\mathbb{R}_u^n} \setminus \{0\}$ в $\overline{\mathbb{R}_x^n}$ и коэффициент квазиконформности $Q(t)$ отображения $x \circ \varphi$ в области $\{u \in \mathbb{R}^n \mid 0 < t < |u| < 1\}$ равен коэффициенту квазиконформности отображения x в области $\{u \in$

$\mathbb{R}^n \mid 1 < |u| < 1/t\}$, который не превосходит $\sqrt{k(1/t)}$. Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{dt}{tQ(t)} \geq \int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{k(1/t)}} = \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r\sqrt{k(r)}} = +\infty$$

и утверждение теоремы 2.14 непосредственно следует из теоремы 2.13.

Глава 3. Жесткие множества на евклидовой плоскости

Пусть M — множество в \mathbb{R}^n , любые две точки которого могут быть соединены спрямляемой кривой, целиком лежащей в M . Точную нижнюю границу длин всех таких кривых называют *внутренним расстоянием* ρ_M между данными точками (см., например, [1]).

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$, допускающее введение внутреннего расстояния, называется *жестким*, если для любого множества $N \subset \mathbb{R}^n$, допускающего введение внутреннего расстояния, любая изометрия $f : (M, \rho_M) \rightarrow (N, \rho_N)$ может быть продолжена до изометрии пространства \mathbb{R}^n с евклидовой метрикой на себя.

Инициатором изучения жестких множеств выступил К. Борсук, доказавший в [72] жесткость произвольной области в \mathbb{R}^n . Последующие работы [94], [95] и [104] имели, в частности, своей целью распространить результат К. Борсука на возможно более общие метрические пространства, а также изучить жесткость множеств, полученных из жестких множеств с помощью основных теоретико-множественных операций. В статье [112] начато изучение изящного вопроса М. Мощинской: “Может ли быть жестким множество $M \subset \mathbb{R}^n$, если его размерность меньше n ?”

В главе 3 мы строим одномерное жесткое множество в \mathbb{R}^2 с помощью идей и методов, опубликованных в работе автора 1993 года [А4], появление которой стимулировало И.Хербурт и С.Унгара к более детальному изучению жестких множеств, см. [96] и [97]. Уже после того, как диссертация была рассказана в Московском и Ростовском университетах, ПОМИ РАН и Институте низких температур НАНУ, К.В.Сторожук указал соискателю на элементарный прокол, имеющийся в работе [А4] и предложил исследовать будет ли жестким множество, получающееся из плоскости выбрасыванием всех точек с рациональными координатами. Пользуясь случаем, приношу благодарность К.В.Сторожуку за внимание к моей работе.

Итак, в данной главе построено одномерное жесткое множество на плоскости, полученное незначительной модификацией формулировок и рассуждений из статьи соискателя [А4].

§1. Основной результат

Как обычно, считаем, что в \mathbb{R}^2 фиксирована каноническая декартова ортогональная система координат x_1, x_2 . Точку в \mathbb{R}^2 назовем *рациональной*, если в этой системе координат обе ее координаты суть рациональные числа. Обозначим через A всю плоскость \mathbb{R}^2 , из которой удалено произвольное счетное множество точек, содержащее все рациональные точки.

Теорема 3.1. *Множество A жесткое, а его размерность равна 1.*

Замечание. Здесь мы имеем в виду индуктивное определение размерности (см. [35, С. 282]), ключевым моментом в котором является то, что «неравенство $\dim_p X \leq n + 1$ означает, что существуют сколь угодно малые открытые окрестности точки p , граница которых имеет размерность $\leq n$ ».

Доказательство теоремы 3.1. Пересечение множества A с периметром любого прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат и задаются уравнением $x_1 = u$ или $x_2 = v$, где u и v — рациональные числа, счетно, а значит, имеет размерность нуль. Следовательно, $\dim A \leq 1$.

Если бы размерность множества A была равна нулю в некоторой точке x , то x обладала бы в A произвольно малыми окрестностями с пустой границей. При этом x обладала бы в \mathbb{R}^2 произвольно малыми окрестностями, граница которых содержится в $\mathbb{R}^2 \setminus A$, т.е. состоит из не более чем счетного множества точек. Покажем, что это невозможно. Для этого на каждом луче, выходящем из точки x , отметим точку его первой встречи с границей рассматриваемой окрестности. Лучей — континуум, и разным лучам отвечают разные точки. Значит на границе окрестности имеется множество мощности континуум. Противоречие. Следовательно, $\dim A \geq 1$.

Таким образом доказано, что $\dim A = 1$. Докажем, что A — жесткое.

Пусть множество $B \subset \mathbb{R}^2$ допускает введение внутренней метрики и $f : (A, \rho_A) \rightarrow (B, \rho_B)$ — изометрия во внутренних метриках. Жесткость множества A будет доказана, если мы убедимся, что f является сужением некоторой евклидовой изометрии $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Пусть $x, y \in A$ и $\varepsilon > 0$. Найдем точки $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^2$ со свойствами:

- а) прямая, проходящая через точки x_0 и x , целиком лежит в A ;
- б) прямая, проходящая через точки y_0 и y , целиком лежит в A ;

с) длина прямолинейного отрезка, соединяющего точки x и x_0 , не превосходит ε (при этом сам отрезок обозначим через α);

д) длина прямолинейного отрезка, соединяющего точки y и y_0 , не превосходит ε (при этом сам отрезок обозначим через β).

Отрезок, соединяющий x_0 и y_0 , обозначим через γ . Тогда, учитывая, что $\alpha \cup \beta \cup \gamma \subset A$ и f — изометрия во внутренних метриках, запишем

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y_0)| + |f(y_0) - f(y)| \leq \\ &\leq \text{len } f(\alpha) + \text{len } f(\beta) + \text{len } f(\gamma) = \text{len } \alpha + \text{len } \beta + \text{len } \gamma = \\ &= |x - x_0| + |y - y_0| + |x_0 - y_0| \leq \\ &\leq 2|x - x_0| + |x - y| + 2|y - y_0| \leq |x - y| + 4\varepsilon, \end{aligned}$$

где $|z|$ — евклидова длина вектора $z \in \mathbb{R}^2$, а $\text{len } \omega$ — длина кривой ω . Отсюда в силу произвольности ε заключаем, что отображение f удовлетворяет условию Липшица с постоянной 1 в евклидовой метрике, а значит, как всякое равномерно непрерывное отображение, может быть единственным образом продолжено до непрерывного отображения F замыкания множества A [16, с. 35]. Докажем, что именно отображение F является евклидовой изометрией. Перечислим необходимые для этого свойства F :

1) F определено на всей плоскости \mathbb{R}^2 (согласно [16] F строится в замыкании множества A , которое совпадает с \mathbb{R}^2);

2) F удовлетворяет условию Липшица с постоянной 1 на всей плоскости \mathbb{R}^2 (это следует из построения F в [16]);

3) F инъективно (чтобы не прерывать изложения, мы докажем это ниже, см. лемму 3.2);

4) существует множество $E \subset \mathbb{R}^2$, имеющее нулевую меру Лебега, такое что в каждой точке $x \in \mathbb{R}^2 \setminus E$ отображение F дифференцируемо и его производная $F'(x)$ является ортогональным преобразованием (это свойство будет доказано ниже, см. лемму 3.3).

Определим новое отображение $\tilde{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, полагая

$$\tilde{F}_1(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1, x_2), \quad \tilde{F}_2(x_1, x_2, x_3) = F_2(x_1, x_2), \quad \tilde{F}_3(x_1, x_2, x_3) = x_3,$$

где $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$ — построенное ранее отображение. Убедимся, что \tilde{F} является отображением с ограниченным искажением (см. [48, с. 18]). В самом деле, \tilde{F} удовлетворяет условию Липшица, поскольку F удовлетворяет ему. Следовательно, \tilde{F} принадлежит

любому соболевскому классу $W_{p,\text{loc}}^1$ ($p \geq 1$) (см., например, [14, с. 122]). Функция $\det \tilde{F}'(x)$ не меняет знака в \mathbb{R}^3 , так как функция $\det F'(x)$ не меняет знака в \mathbb{R}^2 (т.е. почти всюду в \mathbb{R}^2 $\det F'(x) \geq 0$ или почти всюду $\det F'(x) \leq 0$), что вытекает из инъективности F . Наконец, поскольку почти всюду в \mathbb{R}^2 производная отображения F является ортогональным преобразованием, то и производная отображения \tilde{F} будет ортогональным преобразованием почти всюду в \mathbb{R}^3 . Для ортогонального преобразования $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ справедливы равенства $\|P\| = 1$ и $|\det P| = 1$, поэтому $\|\tilde{F}'(x)\|^n \leq |\det \tilde{F}'(x)|$. Итак, для \tilde{F} выполнены все условия, определяющие отображения с ограниченным искажением, причем его коэффициент искажения равен единице.

В силу теоремы устойчивости для квазиконформных отображений, \tilde{F} конформно. Но в трехмерном пространстве всякое конформное отображение мёбиусово, а значит — бесконечно дифференцируемо. Следовательно, и F бесконечно дифференцируемо. Тогда матричнозначное отображение $x \mapsto F'(x)$ непрерывно в \mathbb{R}^2 , и поэтому для всех $x \in \mathbb{R}^2$ отображение $F'(x)$ ортогонально. Отсюда уже несложно заключить, что отображение $F'(x)$ на самом деле от x не зависит, так что F имеет вид $F(x) = F(0) + F'(0)x$ и является изометрией. Последнее предложение завершает доказательство теоремы 3.1, а его истинность проще всего обосновать ссылкой на такое утверждение из [48, с. 34]: пусть U — область в \mathbb{R}^n , $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^2 . Предположим, что существуют постоянные q_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, такие, что для любых i, j справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \frac{\partial g_k}{\partial x_j} = q_{ij}$$

и матрица (q_{ij}) , $i, j = 1, \dots, n$, невырожденная. Тогда g аффинно.

§2. Вспомогательные утверждения

Докажем использованные выше свойства 3 и 4 отображения F .

Лемма 3.2. *Отображение F инъективно.*

Доказательство. Предположим, что отображение F не является инъективным. Тогда найдутся точки $x \neq X$ из \mathbb{R}^2 такие, что $F(x) = F(X)$.

Окружим точки x и X треугольниками (т.е. трехзвенными ломаными) l и L соответственно так, чтобы выполнялись следующие условия (см. рис. 1):

- а) все стороны l и L лежат на прямых, целиком содержащихся в A ;
- б) l и L не пересекаются и не содержатся один внутри другого;
- с) точка $F(x) = F(X)$ не содержится в множестве $F(l) \cup F(L)$.

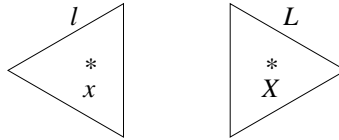


Рис. 1

Убедимся, что, варьируя l и L , можно добиться выполнения условия с). Допустим, точка $F(x) = F(X)$ содержится в образе одной из сторон треугольника l . Заменяем эту сторону отрезком прямой, целиком лежащей в A , параллельной указанной стороне треугольника l так, чтобы полученный треугольник по-прежнему окружал точку x (см. рис. 2). Поскольку сужение отображения F на множество A совпадает с отображением f , которое инъективно, то точка $F(x) = F(X)$ не содержится в множестве $F(l)$. Прделав такую же процедуру с треугольником L , мы сможем найти треугольники l и L со свойствами а) — с).

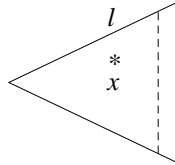


Рис. 2

Учитывая, что отображение F непрерывно, а его сужение на множество A совпадает с f и поэтому инъективно, убеждаемся, что образ каждого треугольника l и L при отображении F является непрерывной кривой, гомеоморфной окружности. Поэтому с точностью до перемены обозначений имеются следующие возможности взаимного расположения кривых $F(l)$ и $F(L)$ и точки $F(x) = F(X)$ на плоскости:

- кривая $F(L)$ окружает кривую $F(l)$, а точка $F(x) = F(X)$ содержится внутри области, ограниченной кривой $F(l)$ (см. рис. 3):

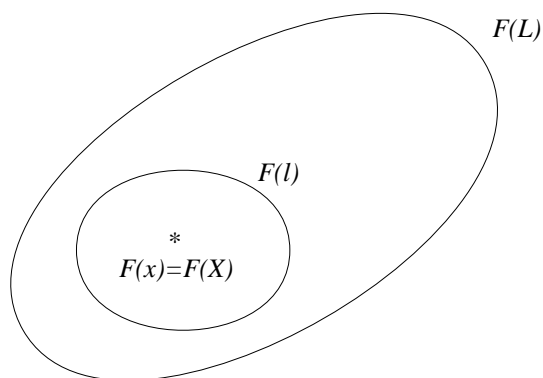


Рис. 3

- кривая $F(L)$ окружает $F(l)$, а точка $F(x) = F(X)$ содержится внутри области, ограниченной кривой $F(L)$, но вне области, ограниченной $F(l)$ (см. рис. 4):

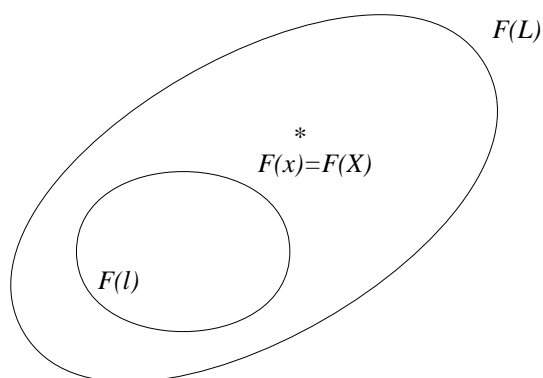


Рис. 4

- кривая $F(L)$ окружает $F(l)$, а точка $F(x) = F(X)$ содержится вне области, ограниченной кривой $F(L)$ (см. рис. 5):

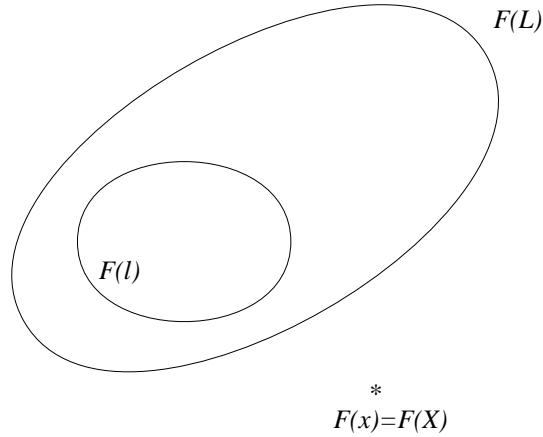


Рис. 5

- ни одна из кривых $F(l)$ и $F(L)$ не окружает другую, а точка $F(x) = F(X)$ содержится в области, ограниченной кривой $F(l)$ (см. рис. 6):

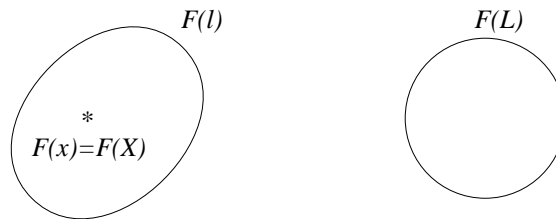


Рис. 6

- ни одна из кривых $F(l)$ и $F(L)$ не окружает другую, а точка $F(x) = F(X)$ содержится вне областей, ограниченных этими кривыми (см. рис. 7):

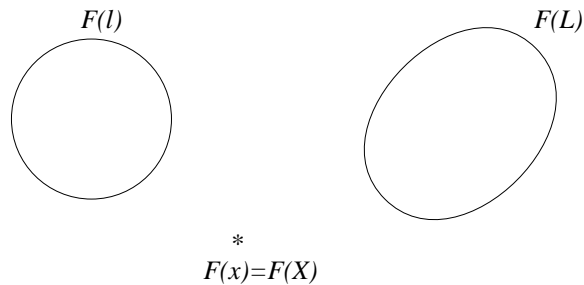


Рис. 7

Убедимся, что конфигурация, изображенная на рис. 3, невозможна. Для этого выберем точки x_0 и X_0 со свойствами (см. рис. 8):

- (i) точка x_0 (соответственно X_0) лежит внутри треугольника l (соответственно L);
- (ii) прямая, проходящая через точки x_0 и X_0 целиком содержится в A ;
- (iii) точки $F(x_0)$ и $F(X_0)$ лежат внутри области, ограниченной кривой $F(l)$.

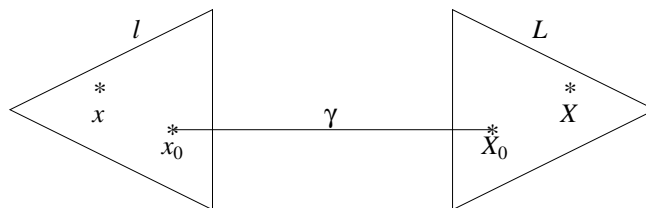


Рис. 8

Прямолинейный отрезок, соединяющий точки x_0 и X_0 , обозначим через γ . В силу свойства (ii) имеем $\gamma \subset A$, а из свойства (i) следует, что отрезок γ пересекает каждый из треугольников l и L ровно в одной точке. С другой стороны, сужение отображения F на множество A совпадает с f и тем самым инъективно. Поскольку $l \cup L \cup \gamma \subset A$, кривая $F(\gamma)$ пересекает каждую из кривых $F(l)$ и $F(L)$ ровно в одной точке. Как видно из рис. 9 последнее невозможно.

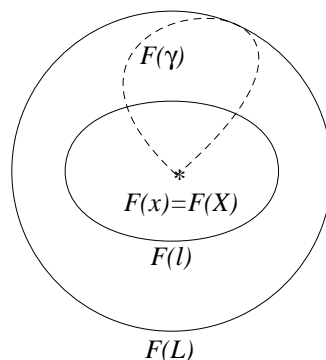


Рис. 9

Аналогичные рассуждения показывают, что конфигурации, изображенные на рис. 5 и 6, также невозможны.

Чтобы убедиться в невозможности конфигурации, изображенной на рис. 7, нам придется несколько усложнить предыдущие рассуждения. А именно, выберем точки $x_0, y_0, z_0, X_0, Y_0, Z_0$ со следующими свойствами (см. рис. 10):

(i') точки x_0, y_0, z_0 (соответственно X_0, Y_0, Z_0) лежат внутри треугольника l (соответственно L) на одной прямой, целиком содержащейся в A ;

(ii') прямая, проходящая через точки x_0 и X_0 , целиком содержится в A ; прямая, проходящая через точки y_0 и Y_0 , целиком содержится в A ; прямая, проходящая через точки z_0 и Z_0 , также целиком содержится в A .

(iii') точки $F(y_0)$ и $F(Y_0)$ лежат вне областей, ограниченных кривыми $F(l)$ и $F(L)$.

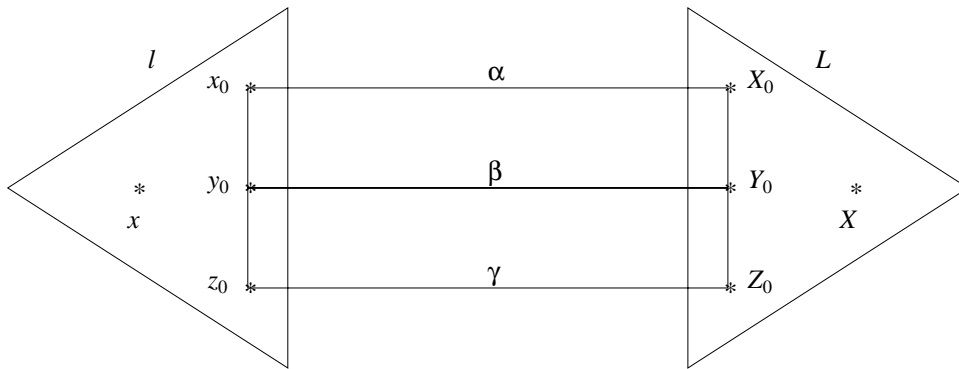


Рис. 10

Ломаную, состоящую из прямолинейных отрезков, соединяющих точки y_0 и x_0 , x_0 и X_0 , X_0 и Y_0 , обозначим через α ; прямолинейный отрезок, соединяющий точки y_0 и Y_0 , — через β ; ломаную, состоящую из прямолинейных отрезков, соединяющих точки y_0 и z_0 , z_0 и Z_0 , Z_0 и Y_0 , — через γ . В силу свойств (i') и (ii') $\alpha \cup \beta \cup \gamma \subset A$ и каждая из кривых α, β, γ пересекает каждый из треугольников l и L ровно в одной точке. Но сужение отображения F на множество A инъективно, а поскольку $\alpha \cup \beta \cup \gamma \cup l \cup L \subset A$ и мы могли с самого начала считать, что кривые α, β, γ не пересекаются в своих внутренних точках, то и кривые $F(\alpha), F(\beta), F(\gamma)$ не пересекаются в своих внутренних точках и каждая из них пересекает каждую из кривых $F(l), F(L)$ ровно в одной точке. С учетом (iii')

ясно, что если кривые $F(\alpha)$ и $F(\gamma)$ с такими свойствами уже зафиксированы, то нарисовать $F(\beta)$ уже невозможно (одна из таких конфигураций изображена на рис. 11).

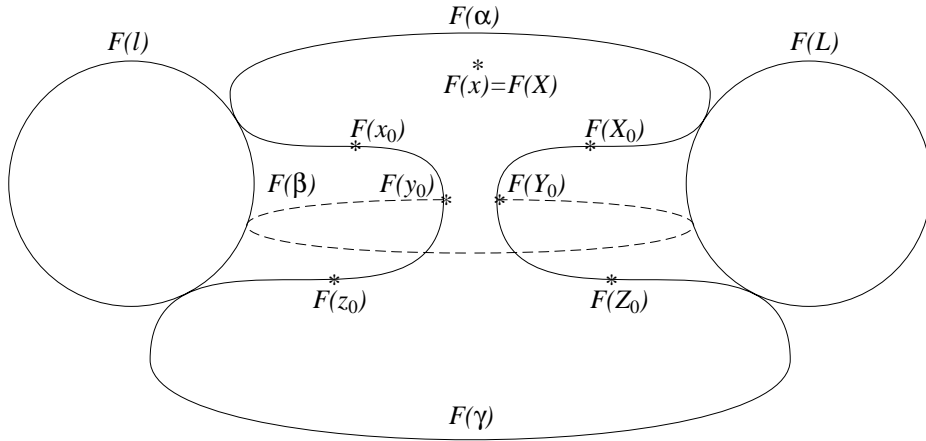


Рис. 11

Аналогичные рассуждения показывают, что конфигурация, изображенная на рис. 4, также невозможна.

Таким образом, допущение о неинъективности отображения F приводит к противоречию, которое и доказывает лемму 3.2.

Лемма 3.3. *Существует множество $E \subset \mathbb{R}^2$ нулевой лебеговой меры такое, что в каждой точке $x \in \mathbb{R}^2 \setminus E$ отображение F дифференцируемо и его производная является ортогональным преобразованием.*

Доказательство. По теореме Степанова — Радемахера существует множество $E_0 \subset \mathbb{R}^2$ нулевой лебеговой меры такое, что в каждой точке $x \in \mathbb{R}^2 \setminus E_0$ отображение F дифференцируемо.

Фиксируем три неколлинеарных единичных вектора $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}^2$.

Для каждого $j = 1, 2, 3$ обозначим через E_j множество всех точек $x \in \mathbb{R}^2$ таких, что прямая, проведенная через точку x параллельно вектору y_j , пересекается с множеством $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Поэтому E_j является счетным объединением прямых (каждая из которых параллельна вектору y_j и проходит через некоторую точку счетного множества $\mathbb{R}^2 \setminus A$). Следовательно, двумерная лебегова мера множества E_j равна нулю.

Задав $\varepsilon > 0$, для каждого $j = 1, 2, 3$ обозначим через $H_j(\varepsilon)$ множество всех точек $x \in \mathbb{R}^2$ таких, что

$$\liminf_{t \rightarrow +0} \frac{|F(x) - F(x + ty_j)|}{t} < 1 - \varepsilon.$$

Мы утверждаем, что двумерная лебегова мера множества $H_j(\varepsilon)$ равна нулю. В самом деле, если бы это было не так, то двумерная лебегова мера множества $H_j(\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus E_j)$ тоже была бы положительна и мы нашли бы точку $x_0 \in \mathbb{R}^2$ такую, что (i) проходящая через нее параллельно вектору y_j прямая L целиком лежит в множестве A и (ii) множество $G = H_j(\varepsilon) \cap L$ имеет положительную одномерную лебегову меру на отрезке I , образованном всеми векторами $x = x_0 + ty_j$, когда t меняется в интервале $[0, 1]$. Пусть одномерная лебегова мера множества $G \cap I$ равна $\sigma > 0$.

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Возьмем произвольную внутреннюю точку x отрезка I и найдем число t , $0 < t < \delta$, такое, чтобы $|F(x) - F(x + ty_j)| < t(1 - \varepsilon)$. Обозначим полученный отрезок через J_1 . Допустим, что уже построено конечное число попарно непересекающихся отрезков J_1, \dots, J_k таких, что если x и $x + ty_j$ — концы какого-то из этих отрезков, то $|F(x) - F(x + ty_j)| < t(1 - \varepsilon)$. Если суммарная длина отрезков J_1, \dots, J_k превышает $\sigma/2$, то процесс построения отрезков считаем законченным. Если же суммарная длина отрезков меньше $\sigma/2$, то построим следующий J_{k+1} : выберем внутреннюю точку x отрезка I , $x \notin \cup_{p=1}^k J_p = J$, и найдем число t такое, чтобы выполнялись неравенства $0 < t < \delta$ и $|F(x) - F(x + ty_j)| < t(1 - \varepsilon)$, а замкнутый отрезок с концами x и $x + ty_j$ не пересекался с J . Замкнутый отрезок с концами x и $x + ty_j$ обозначим через J_{k+1} . Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока суммарная длина отрезков J_1, \dots, J_k не превзойдет половины лебеговой меры множества $G \cap I$, т.е. до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $\sum_{p=1}^k \text{len } J_p \geq \sigma/2$.

Концы интервалов J_1, \dots, J_k , построенных в предыдущем абзаце, образуют конечное разбиение отрезка I . Добавим к этому разбиению еще конечное число точек так, чтобы ни одна новая точка не попадала ни в один из интервалов J_1, \dots, J_k , а длина наибольшего интервала разбиения была меньше δ . Перенумеруем точки $x + ty_j$ полученного разбиения в порядке возрастания t : x_1, \dots, x_M .

Соединяя последовательные точки $F(x_k)$ и $F(x_{k+1})$, $1 \leq k < M$, получим ломаную Γ , вписанную в кривую $F(I)$. Поскольку F липшицево с коэффициентом 1, то длина наибольшего из звеньев ломаной Γ не превосходит δ . При этом длина Γ допускает оценку: $\text{len } \Gamma = \sum_{k=1}^{M-1} |F(x_k) - F(x_{k+1})| \leq (1-\varepsilon) \sum' \text{len } J_p + (1-\sum'' \text{len } J_p) = 1 - \varepsilon\sigma/2$, где первый раз суммируются длины отрезков J_1, \dots, J_k , а вторая сумма распространяется на отрезки, полученные дополнительным измельчением разбиения. Итак, мы вписали в кривую $F(I)$ ломаную с произвольно малыми звеньями, причем длина этой ломаной равномерно отделена от единицы. Это противоречит тому, что по условию задачи кривая $F(I)$ спрямляема и ее длина равна 1. Полученное противоречие доказывает, что множество $H_j(\varepsilon)$ имеет нулевую двумерную лебегову меру при любом $\varepsilon > 0$.

Для каждого $j = 1, 2, 3$ обозначим через H_j множество всех точек $x \in \mathbb{R}^2$ таких, что

$$\liminf_{t \rightarrow +0} \frac{|F(x) - F(x + ty_j)|}{t} < 1.$$

Поскольку $H_j = \cup_{n \in \mathbb{N}} H_j(1/n)$ является счетным объединением множеств нулевой лебеговой меры, то оно само имеет нулевую лебегову меру.

Положим по определению $E = E_0 \cup E_1 \cup H_1 \cup E_2 \cup H_2 \cup E_3 \cup H_3$.

Из доказанного выше ясно, что двумерная лебегова мера множества E равна нулю и в каждой точке $x \in \mathbb{R}^2 \setminus E$ отображение F дифференцируемо. Убедимся, что в каждой точке $x \in \mathbb{R}^2 \setminus E$ производная отображения F является ортогональным преобразованием.

Для этого достаточно проверить, что для любого $x \in \mathbb{R}^2 \setminus E$ и любого $j = 1, 2, 3$, выполняется соотношение $|F'(x)y_j| = 1$. Оно вытекает прямо из определения производной $F'(x)$:

$$|F'(x)y_j| = \lim_{t \rightarrow +0} |F(x) - F(x + ty_j)|/t$$

и того, что с одной стороны последний предел меньше или равен 1, поскольку евклидово расстояние между точками $F(x)$ и $F(x + ty_j)$ не превосходит длины образа отрезка с концами x и $x + ty_j$ под действием отображения F (то есть не превосходит длины этого отрезка, равной t), а с другой стороны этот предел больше или равен 1, поскольку $x \notin H_j$.

Лемма 3.3 доказана.

Глава 4. Инъективность отображений, заданных в выпуклых многомерных областях

Многие геометрические результаты естественным образом могут быть переформулированы в терминах инъективности или сюръективности некоторых специальных отображений метрических пространств или даже областей в \mathbb{R}^n . Именно так А.Д.Александров в своей знаменитой книге “Выпуклые многогранники” [2] доказал теоремы существования и единственности выпуклого многогранника в \mathbb{R}^3 с данной разверткой, теоремы Линделефа и Минковского, а Е.М.Андреев доказал теорему о существовании многогранника с заданными двугранными углами в трехмерном пространстве Лобачевского [4].

В этой главе мы приводим без доказательства одну теорему Гейла — Никайдо — Инада об инъективности отображений, определенных в прямоугольных областях пространства \mathbb{R}^n и даем геометрическое доказательство того, что она не может быть распространена на отображения, определенные в произвольных выпуклых областях. Результаты этой главы опубликованы в работе автора [A5].

§1. Введение

Пусть Ω — прямоугольная область в \mathbb{R}^n , т. е. $\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$, где a_i, b_i — вещественные числа или $-\infty, +\infty$.

В связи с исследованиями по теории игр Д.Гейл и Х.Никайдо доказали следующую замечательную теорему, гарантирующую инъективность некоторых отображений [90], [107].

Теорема 4.1. Пусть отображение $F = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируемо и, кроме того, каждый главный минор матрицы Якоби

$$F'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

положителен. Тогда F инъективно.

Некоторые вопросы, связанные с этой теоремой, долго оставались или все еще остаются открытыми, см. [107]. Один из них таков: верна ли эта теорема для произвольной выпуклой области Ω ? В настоящей главе мы даем отрицательный ответ на этот вопрос. А именно, мы доказываем следующее утверждение:

Теорема 4.2. *Для любого целого $n \geq 2$ существуют эллипсоид $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ и C^∞ -отображение $F = (f_1, \dots, f_n) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что каждый главный минор его матрицы Якоби $F'(x)$ положителен, но F не инъективно.*

§2. Доказательство теоремы 4.2

Сначала рассмотрим случай $n = 2$. Пусть $e_1 = (1/\sqrt{2}, 0)$, $e_2 = (0, 1/\sqrt{2})$ и $e = e_1 + e_2$ — векторы в \mathbb{R}^2 , а $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 = t, 0 \leq t \leq 1\}$ — прямолинейный отрезок. Через G обозначим любое из отображений $G : L \rightarrow \mathbb{R}^2$, обладающих следующими свойствами:

- (α_1) $G \in C^\infty(L)$;
- (α_2) G не инъективно;
- (α_3) для каждой точки $X = (x_1, x_2) \in L$ найдутся векторы $e_1^* = e_1^*(X)$ и $e_2^* = e_2^*(X)$, отложенные от точки $G(X)$ и обладающие свойствами:
 - (β_1) отображения $X \mapsto e_1^*(X)$ и $X \mapsto e_2^*(X)$ принадлежат $C^\infty(L)$;
 - (β_2) для всех $X \in L$ имеет место равенство $e_1^*(X) + e_2^*(X) = G'(X)e$;
 - (β_3) $(e_i^*(X), e_i) > 0$ для всех $X \in L$ и $i = 1, 2$;
 - (β_4) для всех $X \in L$ векторы $e_1^*(X)$ и $e_2^*(X)$ линейно независимы и базисы $\{e_1^*(X), e_2^*(X)\}$ и $\{e_1, e_2\}$ одинаково ориентированы.

Существование отображения G с такими свойствами очевидно из рис.1.

Теперь докажем, что существуют окрестность U отрезка L и C^∞ -отображение $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ такие, что

$$F(X) = G(X) \quad \text{для всех } X \in L, \quad (1)$$

$$F'(X)e_i = e_i^*(X) \quad \text{для всех } X \in L \text{ и } i = 1, 2. \quad (2)$$

Для этого найдем четыре C^∞ -функции $f_{ij} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2$) такие, что при $i = 1, 2$ выполняются тождества

$$\frac{\partial f_{i1}}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial f_{i2}}{\partial x_1}(x_1, x_2) \quad \text{для всех } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} f_{11}(X) & f_{12}(X) \\ f_{21}(X) & f_{22}(X) \end{pmatrix} e_i = e_i^*(X) \quad \text{для всех } X \in L.$$

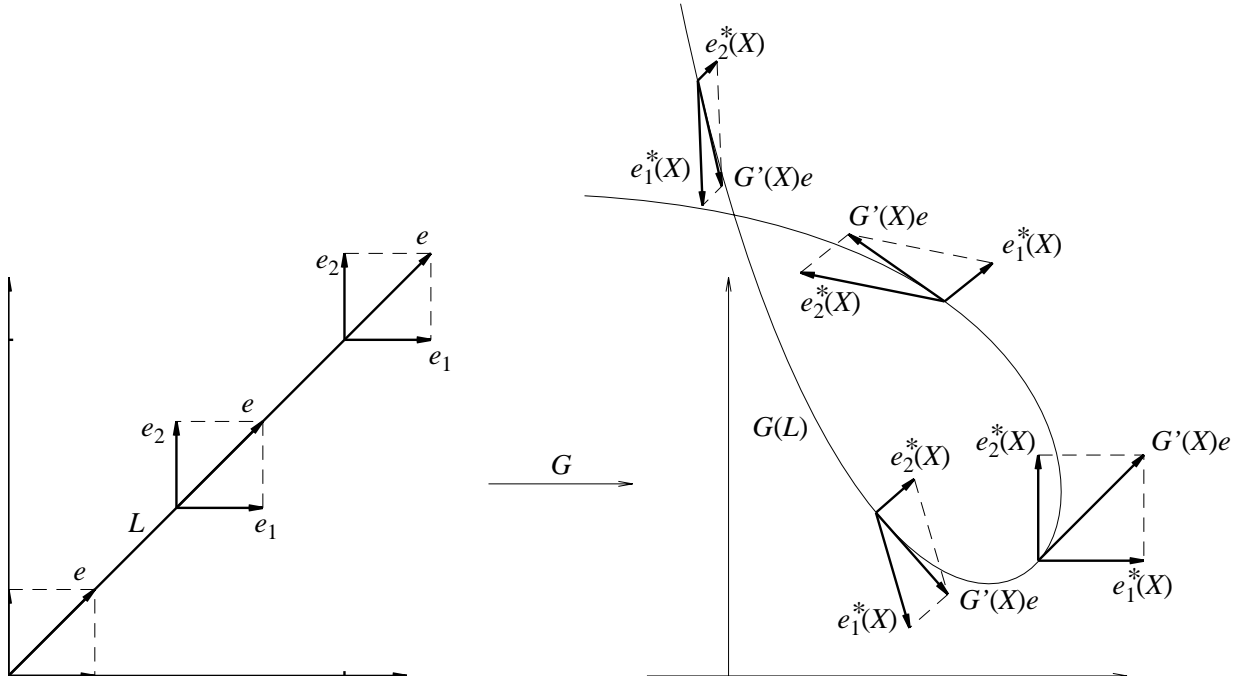


Рис. 1

Ввиду свойства (β_4) значения функций f_{ij} на L однозначно определяются из последнего уравнения. Продолжим f_{i2} произвольным образом до C^∞ -функции в \mathbb{R}^2 и найдем f_{i1} из уравнения (3).

Далее, выберем окрестность U отрезка L таким образом, чтобы для всех $(x_1, x_2) \in U$ выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} (\gamma_1) \quad & f_{ii}(x_1, x_2) > 0 \quad (i = 1, 2); \\ (\gamma_2) \quad & \det \begin{pmatrix} f_{11}(x_1, x_2) & f_{12}(x_1, x_2) \\ f_{21}(x_1, x_2) & f_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Мы можем гарантировать выполнение неравенств (γ_1) , (γ_2) в некоторой окрестности U отрезка L , поскольку они справедливы в каждой точке $X \in L$. В самом деле, согласно неравенству (β_3)

$$0 < (e_i^*(X), e_i) = \left(\begin{pmatrix} f_{11}(X) & f_{12}(X) \\ f_{21}(X) & f_{22}(X) \end{pmatrix} e_i, e_i \right) = f_{ii}(X),$$

а в силу свойства (β_4)

$$\det \begin{pmatrix} f_{11}(X) & f_{12}(X) \\ f_{21}(X) & f_{22}(X) \end{pmatrix} > 0.$$

Уменьшая окрестность U , можем считать ее связной и односвязной. Тогда выполнение соотношения (3) является необходимым и достаточным условием существования C^∞ -отображения $F = (f_1, f_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ такого, что $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = f_{ij}$ в U и $F(\tilde{X}) = G(\tilde{X})$ для $\tilde{X} = (1/2, 1/2)$.

Построенное таким образом отображение F удовлетворяет условиям (1), (2). Справедливость условия (2) очевидна, а справедливость тождества (1) следует из (2) и условия (β_2) . В самом деле, если $X = (t, t)$, то

$$\begin{aligned} F(X) &= F(\tilde{X}) + \int_{1/2}^t F'(s, s)e \, ds = G(\tilde{X}) + \int_{1/2}^t F'(s, s)(e_1 + e_2) \, ds = \\ &= G(\tilde{X}) + \int_{1/2}^t (e_1^*(s, s) + e_2^*(s, s)) \, ds = \\ &= G(\tilde{X}) + \int_{1/2}^t G'(s, s)e \, ds = G(X). \end{aligned}$$

Выберем в качестве Δ такой эллипс, что $L \subset \Delta \subset U$. Ограничение F на Δ и будет искомым отображением. В самом деле, оно является C^∞ -отображением; каждый главный минор его матрицы Якоби положителен ввиду свойств (γ_1) и (γ_2) ; наконец, F не инъективно в Δ ввиду (1) и свойства (α_2) .

Теперь рассмотрим случай $n > 2$. Построим вспомогательное отображение $\tilde{F} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n) : \Delta \times \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n$ по формулам

$$\tilde{f}_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} f_i(x_1, x_2), & \text{если } i = 1, 2, \\ x_i, & \text{если } i > 2, \end{cases}$$

где $F = (f_1, f_2) : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — построенное выше отображение. Обозначим через $\tilde{\Delta}$ произвольный эллипсоид такой, что $\Delta \times \{0\} \subset \tilde{\Delta} \subset \Delta \times \mathbb{R}^{n-2}$. Очевидно, сужение отображения \tilde{F} на эллипсоид $\tilde{\Delta}$ не инъективно, но каждый главный минор его матрицы Якоби положителен. Теорема 4.2 доказана.

§3. Заключительные замечания

Отметим, что на самом деле факт невозможности распространения теоремы Гейла — Никайдо — Инада на произвольные выпуклые области был установлен С. Парсасараси и Г. Равиндраном в [108] еще в 1986 году. Приведенный в работе [108] пример основан на искусственной работе с отображениями, заданными явными формулами. В отличие от этого, наш метод опирается на геометрическую “картинку” и имеет самостоятельный интерес.

Отметим также, что до сих пор не найдено геометрическое доказательство самой теоремы Гейла — Никайдо — Инада. Вместе с тем А. М. Фомин [62], А. И. Фет [61], а также А. Я. Бунт и А. Д. Мышкис [41] нашли именно геометрическую причину, лежащую в основе следующего утверждения, близкого к теореме Гейла — Никайдо — Инада: Пусть Ω — произвольное выпуклое множество в \mathbb{R}^n и отображение $F = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируемо, причем $\det F'(x) \neq 0$. Пусть, кроме того, каждый главный минор симметризованной матрицы Якоби

$$\frac{1}{2}[F'(x) + F'(x)^T] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

положителен. Тогда F инъективно.

Глава 5. Инфинитезимальный вариант гипотезы кузнечных мехов для многогранников и поверхностей вращения

Более двадцати лет оставалась открытой так называемая гипотеза кузнечных мехов, согласно которой всякий изгибаемый многогранник сохраняет свой объем в процессе изгибания [26]. Ее положительное решение было дано И.Х.Сабитовым в 1996 году [54]. Один из подходов к гипотезе кузнечных мехов состоял в том, чтобы доказать ее инфинитезимальный аналог, а именно — доказать, что объем стационарен нежесткого многогранника стационарен при его бесконечно малых изгибаниях. В этой главе мы показываем, что такой инфинитезимальный аналог неверен. Точнее, мы показываем, что у нежесткого многогранника, построенного А.Д. Александровым и С.М. Владимировой [3], объем не стационарен при бесконечно малом изгибании. Вместе с тем мы показываем, что объем всякой поверхности вращения стационарен при ее бесконечно малых изгибаниях.

Эти результаты опубликованы в работе автора [A1]. Они тесно связаны с более поздними работами А.Д. Милки [39], [40], [103], где вводится новый тип непрерывных изгибаний многогранников, называемых линейными изгибаниями, и более детально изучаются бесконечно малые изгибания у нежесткого многогранника А.Д. Александра и С.М. Владимировой; с работами Л.С. Велимирович [119]–[121], где более детально изучен вопрос о стационарности объема и других подобных характеристик для поверхностей вращения; и со статьями Ю.Д. Бураго и В.А. Залгаллера [9], [22], в которых изучаются вопросы кусочно-линейного изометрического вложения в \mathbb{R}^3 компактных двумерных многообразий с полиэдральной метрикой (но не требуется наличия непрерывного семейства таких вложений). Упомянем также следующую родственную теорему, полученную Н.П. Долбилиным, М.А. Штанько и М.И. Штогриным в [18]: погруженная многогранная сфера заведомо не изгибается, если каждая ее грань имеет

четное число ребер, в каждая ее вершина имеет строго положительную кривизну.

§1. Введение

В 1977 году в работе [81] Р. Коннелли со ссылкой на Д. Сулливана высказал гипотезу о том, что каждый изгибаемый многогранник сохраняет объем в процессе изгибания. Подтвердить или опровергнуть эту гипотезу оказалось непросто: она оставалась открытым вопросом около 20 лет, прежде чем в 1996 И.Х.Сабитов не опубликовал ее положительное решение в [54].

В 1980 году в примечании редактора перевода в [81, с. 231] И.Х.Сабитов предложил рассматривать гипотезу Коннелли — Сулливана на уровне бесконечно малых изгибаний. Несколько огрубляя ситуацию, мы можем высказать его гипотезу так: при любом бесконечно малом изгибании замкнутой поверхности объем, ограниченный ею, будет стационарен, или, что то же самое, поток через замкнутую поверхность, порожденный ее полем изгибания, равен нулю. Эта гипотеза, очевидно, нуждается в уточнениях, которые исключили бы следующий тривиальный контрпример. Пусть поверхность содержит плоский кусок Q . Выберем, на Q произвольное векторное поле, ортогональное поверхности и обращающееся в нуль на краю Q . Доопределим его нулем на всей поверхности. Известно, что при этом мы получим поле изгибаний, а большой произвол в его построении позволяет нам подобрать это поле так, чтобы его поток через поверхность был отличен от нуля.

Необходимые уточнения будут сделаны дальше, а сейчас отметим, что в отличие от гипотезы Коннелли — Сулливана гипотеза Сабитова имеет смысл не только для многогранников, но и для гладких поверхностей, в том числе для поверхностей вращения, поскольку известны бесконечно дифференцируемые [38], [47], [111] и даже аналитические [59] нежесткие поверхности, в то время как существование C^2 -гладкой непрерывно изгибаемой поверхности остается открытой проблемой.

В §3 настоящей главы будет показано, что гипотеза Сабитова для многогранников несправедлива, а в §4 — что для поверхностей вращения с гладким меридианом, не содержащим отрезка, перпендикулярного оси вращения, она верна.

§2. 0 связи вариации объема и потока

Пусть D_0 — ограниченная область в \mathbb{R}^3 , граница которой является кусочно-гладкой поверхностью, т. е. двумерным топологическим подмногообразием \mathbb{R}^3 без края, допускающим представление в виде объединения конечного числа связных двумерных C^1 -подмногообразий \mathbb{R}^3 с краем. Считая последние гомеоморфными кругу и предполагая, что они попарно не имеют общих внутренних точек, обозначим их символами S^j .

Если r_0 — радиус-вектор поверхности S_0 и ζ — непрерывное векторное поле на S_0 , принадлежащее классу C^1 на каждом многообразии S^j то, как следует из теоремы о неявной функции, для всех достаточно малых $\varepsilon \geq 0$ радиус-вектор $r_\varepsilon = r_0 + \varepsilon\zeta$ определяет некоторую кусочно-гладкую поверхность S_ε . Последняя определяет в пространстве ограниченную область, объем которой обозначим через $V(\varepsilon)$. Производную функции $V(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ называем *вариацией объема* области D_0 под действием поля ζ и обозначаем через $\delta V(D_0, \zeta)$.

Отправным пунктом настоящей главы служит следующий факт.

Лемма 5.1. *Вариация объема области D_0 под действием поля ζ , равна потоку поля ζ через внешнюю сторону поверхности D_0 , т. е.*

$$\delta V(D_0, \zeta) = \int_{S_0} \langle \zeta, m \rangle dS,$$

где m — внешняя нормаль к поверхности S_0 , а $\langle \zeta, m \rangle$ — скалярное произведение векторов ζ и m .

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\delta V(D_0, \zeta) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(\varepsilon) - V(0)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{3\varepsilon} \left(\int_{S_\varepsilon} \langle r_\varepsilon, m_\varepsilon \rangle dS - \int_{S_0} \langle r_0, m \rangle dS \right) = \\ &= \sum_j \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S_\varepsilon^j} \langle r_\varepsilon, m_\varepsilon \rangle dS - \int_{S_0^j} \langle r_0, m \rangle dS \right),\end{aligned}$$

где S_ε^j — кусок поверхности S_ε , задаваемый радиус-вектором $r_\varepsilon = r_0 + \varepsilon\zeta$, когда r_0 пробегает S_0^j . Обозначая выражение, стоящее под знаком суммы, через I_j , можно записать

$$\delta V(D_0, \zeta) = \sum_j I_j.$$

Считая, что S_0^j параметризована радиус-вектором $r_0 = r_0(u, v)$, причем переменные u, v изменяются в единичном круге B , преобразуем в выражении I_j поверхностные интегралы к двойным:

$$\begin{aligned}I_j &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{3\varepsilon} \int_B [\langle r_0 + \varepsilon\zeta, (r_{0u} + \varepsilon\zeta_u) \times (r_{0v} + \varepsilon\zeta_v) \rangle - \langle r_0, r_{0u} \times r_{0v} \rangle] dudv = \\ &= \frac{1}{3} \int_B \langle \zeta, r_{0u} \times r_{0v} \rangle dudv + \frac{1}{3} \int_B \langle r_0, \zeta_u \times r_{0v} + r_{0u} \times \zeta_v \rangle dudv.\end{aligned}$$

Здесь $a \times b$ — векторное произведение векторов a и b . Первое слагаемое в правой части последнего равенства обозначим через T_j , второе — через J_j . Чтобы преобразовать интеграл J_j , рассмотрим контурный интеграл

$$K_j = \frac{1}{3} \int_{\partial S_0^j} \langle \zeta, r_0 \times dr_0 \rangle.$$

При этом мы считаем, что кривая ∂S_0^j (край многообразия S_0^j) снабжена ориентацией, индуцированной той ориентацией многообразия S_0^j которая задается внешней нормалью.

Преобразуя интеграл K_j к переменным u, v , будем иметь

$$K_j = \frac{1}{3} \int_{\partial B} \langle F, \tau \rangle ds,$$

где F — векторное поле в замыкании круга B с компонентами $\langle \zeta, r_0 \times r_{0u} \rangle$ и $\langle \zeta, r_0 \times r_{0v} \rangle$, а τ — единичный касательный вектор к ∂B , порождающий ту же ориентацию, что и внешняя нормаль.

Преобразуем последний интеграл с помощью формулы Грина:

$$K_j = 2T_j - I_j.$$

С учетом этого равенства мы можем по-новому записать равенство $I_j = T_j + J_j$:

$$I_j = 3T_j - K_j.$$

Для вычисления вариации объема области D_0 под действием поля ζ мы должны сложить все интегралы I_j . При этом контурные интегралы K_j взаимно уничтожатся, и мы получим

$$\delta V(D_0, \zeta) = 3 \sum_j T_j = \sum_j \int_{S_0^j} \langle \zeta, m \rangle dS.$$

Лемма 5.1 доказана.

§3. Гипотеза Сабитова для многогранников

Прежде всего уточним гипотезу Сабитова для многогранников. По определению бесконечно малые изгибания многогранника всегда линейны на каждой грани. Это затрудняет построение тривиального контрпримера, описанного в §1, но не исключает его полностью. В самом деле, всегда можно дополнительно триангулировать некоторую исходную грань многогранника так, чтобы какая-то вершина A триангуляции была внутренней точкой исходной грани, (см. рис. 1, на котором изображен невырожденный

тетраэдр, одна из граней которого дополнительно триангулирована).

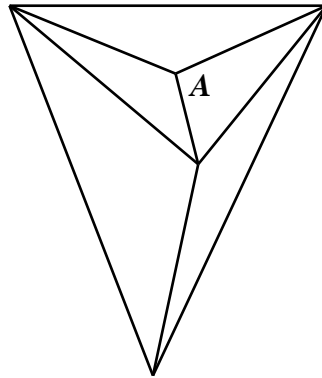


Рис. 1

После этого можно приписать вершине A ненулевой вектор скорости, ортогональный исходной грани, а скорости всех остальных вершин нового многогранника положить равными нулю. Продолжив по линейности это векторное поле с множества вершин на весь многогранник, получим поле изгибаний, причем соответствующий ему поток будет отличен от нуля. Этот пример надо считать тривиальным, поскольку он по сути своей локален. Чтобы исключить такие примеры, нам надо сузить класс рассматриваемых многогранников. Поэтому мы будем изучать лишь многогранники, не имеющие ложных вершин типа построенной выше вершины A . Точное определение ложной вершины оказывается не слишком простым делом: недостаточно сказать, что вершина является ложной, если контингентия [58, с. 378] многогранника в ней есть плоскость. В самом деле, в приведенном только что примере мы можем заменить каждый треугольник дополнительной триангуляции боковой поверхностью тетраэдра (см. рис. 2, где нарисован многогранник, полученный из тетраэдра, изображенного на рис. 1, заменой каждого треугольника дополнительной триангуляции боковыми поверхностями вспомогательных тетраэдров). Получившийся многогранник по-прежнему имеет поле изгибания, для которого поток отличен от нуля. Естественно, что вершину A такого многогранника

по-прежнему надо считать ложной.

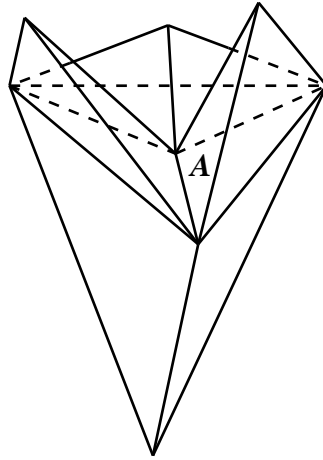


Рис. 2

Итак будем называть вершину многогранника *ложной*, если найдутся три исходящих из нее ребра, лежащие в одной плоскости.

Введенное понятие ложной вершины даже слишком ограничительно, так как, во-первых, наличие на многограннике ложной, в смысле этого определения, вершины не означает, что многогранник обязательно допускает поле изгиба с отличным от нуля потоком, а во-вторых, даже изгибаемый многогранник Коннелли [30], [79] имеет ложную вершину. В самом деле, он получается из некоторого изгибаемого октаэдра (типа 1 по Брикарю) заменой некоторых треугольных граней последнего боковыми поверхностями вспомогательных тетраэдров и последующим исключением возникающих самопересечений. В частности, исходный изгибаемый октаэдр может быть расположен в некоторой двумерной плоскости. При этом две из шести его вершин оказываются ложными. Они же оказываются ложными и в окончательно построенном многограннике Коннелли.

И тем не менее справедлива следующая теорема, отвергающая даже после сделанных выше уточнений гипотезу Сабитова для многогранников.

Теорема 5.2. *В трехмерном евклидовом пространстве существуют многогранник B , гомеоморфный сфере и не имеющий ложных вершин, и его поле изгибаний ζ , такие, что поток поля ζ через многогранник B отличен от нуля.*

Доказательство. Покажем, что в качестве многогранника B может быть взята нежесткая бипирамида, построенная в [3].

Рассмотрим (см. рис. 3) правильную n -угольную невыпуклую пирамиду, в основании которой лежит правильная n -угольная звезда, а вершина пирамиды проектируется в центр звезды. При этом будем использовать следующие обозначения, ясные из рис. 3: h — высота пирамиды; a , b , c — длины ребер; q — расстояние от центра до дальней вершины A_{2i-1} звезды; p — расстояние от центра основания до ближней вершины A_{2i} , ($i = 1, \dots, n$); $\alpha = \pi/n$.

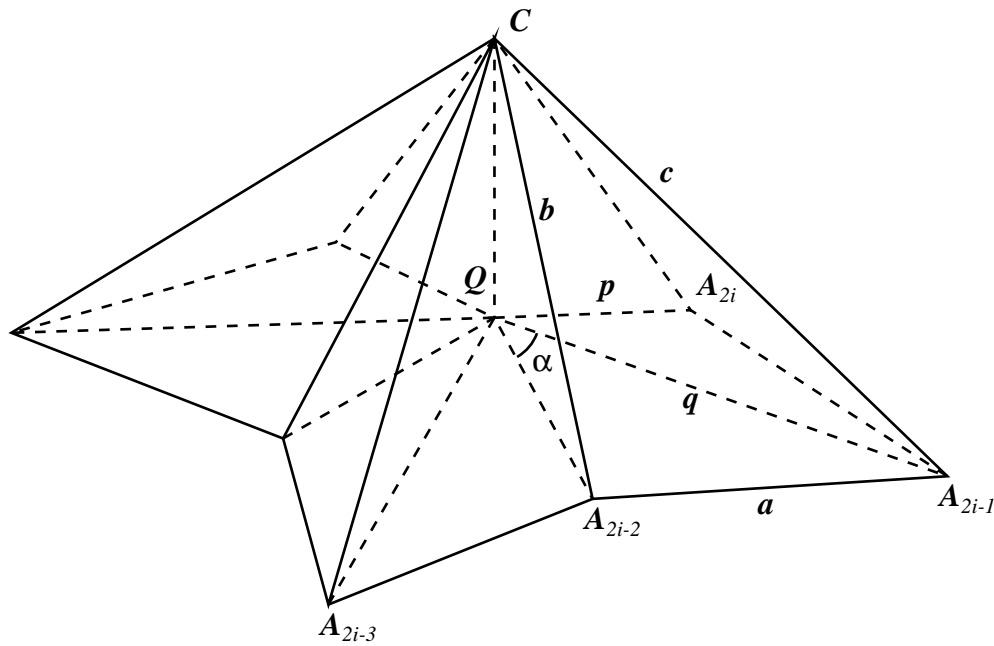


Рис. 3

Лемма 5.3 [3]. *Если*

$$p/q = (1 \pm \sin \alpha) / \cos \alpha, \quad (1)$$

то боковая поверхность указанной пирамиды допускает бесконечно малое изгибание, при котором отличная от нуля скорость вершины C направлена по высоте, край перемещается в плоскости основания и основание остается правильной звездой.

Доказательство. Элементы тетраэдра $QCA_{2i}A_{2i-1}$ связаны между собой соотношениями

$$a^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha, \quad b^2 = p^2 + h^2, \quad c^2 = q^2 + h^2. \quad (2)$$

Дифференцируя их по t и учитывая, что

$$\dot{a}|_{t=0} = \dot{b}|_{t=0} = \dot{c}|_{t=0} = 0$$

в силу стационарности ребер боковой поверхности пирамиды и

$$\dot{\alpha}|_{t=0} = 0$$

согласно требованию леммы о том, что основание пирамиды остается правильной звездой, после преобразований получаем

$$(p - q \cos \alpha)\dot{p} + (q - p \cos \alpha)\dot{q} = 0, \quad p\dot{p} - q\dot{q} = 0 \quad (3).$$

Чтобы эта система имела ненулевое решение относительно p, q , необходимо и достаточно соблюдение равенства

$$\begin{vmatrix} p - q \cos \alpha & q - p \cos \alpha \\ p & -q \end{vmatrix} = 0.$$

Оно обеспечивается условием (1).

Мы нашли удовлетворяющие условиям стационарности длин ребер скорости перемещений вершин A_i . При этом скорость вершины A_i направлена по прямой, проходящей через A_i и центр Q звезды. Это распределение скоростей вершин может быть продолжено по линейности на каждую из граней. Лемма 5.3 доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы 5.2, мы вслед за А.Д.Александровым и С.М.Владимировой сложим основаниями две построенные в лемме 5.3 пирамиды. Считая соотношение (1) выполненным, получим нежесткую бипирамиду B . Вычислим поток поля изгибаний ζ , построенного в конце доказательства леммы 5.3, через поверхность бипирамиды B .

Как следует из леммы 5.1, численное значение потока дается интегралом

$$\int_B \langle \zeta(x), m(x) \rangle dS,$$

где $m(x)$ — единичный вектор нормали к бипирамиде B в точке x , а интеграл берется по поверхностной мере бипирамиды B . В силу очевидных симметрий этот поток равен умноженному на $4n$ потоку поля ζ через грань $SA_{2i}A_{2i-1}$. Учитывая, что в пределах этой грани нормаль к бипирамиде B есть постоянный вектор, а скорости точек меняются по линейному закону,

найдем следующее выражение для потока через грань $CA_{2i}A_{2i-1}$:

$$\langle \zeta(C) + \zeta(A_{2i}) + \zeta(A_{2i-1}), m \rangle S/3, \quad (4)$$

где m — единичный вектор нормали к этой грани, а S — ее площадь.

Для удобства применения последней формулы введем в пространстве декартову ортогональную систему координат с началом в точке Q так, чтобы точки A_{2i} и C лежали на положительных полуосях первой и третьей осей соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} A_{2i} &= (p, 0, 0), & \zeta(A_{2i}) &= (\dot{p}, 0, 0), \\ A_{2i-1} &= (q \cos \alpha, q \sin \alpha, 0), & \zeta(A_{2i-1}) &= (\dot{q} \cos \alpha, \dot{q} \sin \alpha, 0), \\ C &= (0, 0, h), & \zeta(C) &= (0, 0, \dot{h}). \end{aligned}$$

Чтобы найти нормаль m , вычислим вектор k , равный векторному произведению векторов $A_{2i-1} - A_{2i}$ и $C - A_{2i}$, а затем положим $m = k/\langle k, k \rangle$. Имеем

$$k = (qh \sin \alpha, -qh \cos \alpha + ph, -pq \sin \alpha).$$

Тогда соотношение (4) дает следующее выражение для потока T через грань $CA_{2i}A_{2i-1}$:

$$\frac{S \sin \alpha}{3\langle k, k \rangle} [(\dot{p}q + p\dot{q})h - pq\dot{h}].$$

Исключая в последнем выражении \dot{h} и \dot{q} с помощью формул $\dot{h} = -p\dot{p}/h$ и $\dot{q} = -p\dot{p}/q$, которые вытекают из (2), (3), получим

$$T = \frac{S \sin \alpha}{3\langle k, k \rangle} \frac{q^2 h^2 + p^2 h^2 + p^2 q^2}{hq} \dot{p}.$$

Итак, поскольку бипирамида B не жесткая, то $\dot{p} \neq 0$, то, $T \neq 0$, а следовательно, и поток поля ζ , через всю бипирамиду B отличен от нуля. Теорема 5.2 доказана.

До сих пор остается открытым вопрос о том стационарен ли объем для бесконечно малых изгибаний многогранников, продолжимых в изгибания достаточно высокого порядка. Наивысшим достижением в этом направлении следует считать дипломную работу И.А. Малашкина, защищенную в МГУ под руководством И.Х. Сабитова, где показано, что существуют многогранники (а именно вложенные невыпуклые октаэдры) с нежесткостью второго порядка и с нестационарностью объема.

Рассмотренные в этом параграфе нежесткие бипирамиды А.Д. Александрова и С.М. Владимировой в последнее время интенсивно изучаются А.Д. Милкой (см., например, [40] и [103]), который развивает собственный взгляд на проблемы изгибаемости поверхностей и оболочек.

§4. Гипотеза Сабитова для поверхностей вращения

В классе всех поверхностей вращения гипотеза Сабитова, очевидно, не верна. В самом деле, если меридиан поверхности вращения содержит целый отрезок, перпендикулярный оси вращения, то поверхность содержит плоский кусок и, следовательно, допускает тривиальный контрпример, построенный в §1. Исключив из рассмотрения такие поверхности, мы не только избавимся от тривиальных контрпримеров, но и получим возможность использовать идеи работы [34] С.Э. Кон-Фоссена. Читателю, интересующемуся современным состоянием теории бесконечно малых изгибаний гладких поверхностей, можно порекомендовать обзоры [25] и [27].

Основным результатом настоящего параграфа является

Теорема 5.4. *Пусть меридиан связной замкнутой поверхности вращения является C^1 -гладкой кривой и не содержит отрезка, перпендикулярного оси вращения. Тогда поток через данную поверхность любого ее C^1 -гладкого поля изгибаний равен нулю.*

Отметим, что условиям теоремы 5.4 удовлетворяют также и веретенообразные поверхности, т. е. такие поверхности вращения с гладким меридианом, полюсы которых являются коническими точками.

Доказательство. Пусть x, y, z — каноническая декартова система координат в \mathbb{R}^3 . Не ограничивая общности, мы можем считать, что ось поверхности совпадает с осью x , а меридиан задан C^1 -отображением

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad u_0 \leq u \leq u_1.$$

Пусть $r(u, v)$ — радиус-вектор поверхности, а $\zeta(u, v)$ — ее поле изгибаемости класса C^1 . Следуя [34], будем относить векторы r и ζ не к фиксированной системе координат, а к подвижному трехграннику, первым вектором e которого является единичный вектор оси вращения, вторым $a = a(v)$ — единичный перпендикулярный к e вектор, который с изменением v описывает окружность с длины 2π в плоскости, перпендикулярной вектору e ;

третьим — вектор $a' = da/dv$. Уравнение поверхности при этом запишется так: $r(u, v) = x(u)e + y(u)a(v)$, $u_0 \leq u \leq u_1$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Пусть вектор $\zeta(u, v)$ имеет в репере e, a, a' координаты $\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)$:

$$\zeta(u, v) = \alpha e + \beta a + \gamma a'.$$

Тогда система дифференциальных уравнений, определяющая поле $\zeta(u, v)$ и записываемая обычно в сокращенной форме $\langle dr, d\zeta \rangle = 0$, принимает вид

$$x'(u)\alpha_u + y'(u)\beta_u = 0, \quad (5)$$

$$\beta + \gamma_v = 0, \quad (6)$$

$$x'(u)\alpha_v + y'(u)(\beta_v - \gamma) + y(u)\gamma_u = 0. \quad (7)$$

Очевидно, α, β, γ должны быть периодическими функциями от v с периодом 2π . Основываясь на этом, разложим их в ряды Фурье по v :

$$\alpha(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikv} \varphi_k(u), \quad \beta(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikv} \psi_k(u), \quad \gamma(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikv} \chi_k(u).$$

При этом так как α, β, γ — действительные функции, то для каждого k должны выполняться равенства

$$\varphi_{-k} = \overline{\varphi_k}, \quad \psi_{-k} = \overline{\psi_k}, \quad \chi_{-k} = \overline{\chi_k},$$

(черта сверху означает комплексное сопряжение). Подставляя разложения функций α, β, γ в систему (5)–(7) и приравнявая нулю коэффициенты при e^{ikv} , получаем для $\varphi_k, \psi_k, \chi_k$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x'(u)\varphi'_k(u) + y'(u)\psi'_k(u) = 0, \quad (8)$$

$$ik\chi_k(u) + \psi_k(u) = 0, \quad (9)$$

$$x'(u)ik\varphi_k(u) + y'(u)[ik\psi_k(u) - \chi_k(u)] + y(u)\chi'_k(u) = 0. \quad (10)$$

Каждому решению системы (8)–(10) соответствует поле изгибаний

$$\begin{aligned} \zeta_k(u, v) &= e^{ikv}(\varphi_k(u)e + \psi_k(u)a + \chi_k(u)a') + \\ &+ e^{-ikv}(\overline{\varphi_k}(u)e + \overline{\psi_k}(u)a + \overline{\chi_k}(u)a'). \end{aligned} \quad (11)$$

Вследствие линейности задачи любая сумма

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \zeta_k(u, v) \quad (12)$$

с постоянными коэффициентами a_k также является полем изгибаний. И наоборот, любое поле изгибаний может быть представлено в виде (12), поскольку это есть просто его разложение в ряд Фурье.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 5.4. Обозначим через $m = m(u, v)$ нормаль к поверхности. Разложим поле изгибаний ζ в ряд вида (12). Для потока T поля изгибаний ζ запишем выражение

$$T = \int \langle \zeta, m \rangle dS = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int \langle \zeta_k, m \rangle dS.$$

Преобразуя поверхностные интегралы в последнем равенстве к переменным u, v , получаем $\int \langle \zeta_k, m \rangle dS = \iint (\zeta_k r_u r_v) dudv$, где $(\zeta_k r_u r_v)$ — смешанное произведение векторов ζ_k, r_u, r_v , а интегрирование по переменным u, v ведется по прямоугольнику $[u_0, u_1] \times [0, 2\pi]$. Имеем $r_u = x'(u)e + y'(u)a$, $r_v = y(u)a'$. Значит, с учетом (11)

$$\begin{aligned} (\zeta_k r_u r_v) &= \begin{vmatrix} e^{ikv}\varphi_k + e^{-ikv}\bar{\varphi}_k & e^{ikv}\psi_k + e^{-ikv}\bar{\psi}_k & e^{ikv}\chi_k + e^{-ikv}\bar{\chi}_k \\ x'(u) & y'(u) & 0 \\ 0 & 0 & y(u) \end{vmatrix} = \\ &= y(u)[(e^{ikv}\varphi_k + e^{-ikv}\bar{\varphi}_k)y'(u) - (e^{ikv}\psi_k + e^{-ikv}\bar{\psi}_k)]. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что для всех $k \neq 0$ поток поля изгибаний ζ_k равен нулю. Значит,

$$T = a_0 \int \langle \zeta_0, m \rangle dS.$$

Но, следуя [34], легко найти ζ_0 : из (8), (9) получаем для $k = 0$

$$\psi_0 = 0, \quad x'(u)\varphi'_0(u) = 0,$$

а тогда из (10)

$$y\chi'_0 - y'\chi_0 = 0, \quad \chi_0 = C_0 y \quad (C_0 = \text{const}).$$

Согласно условиям теоремы 5.4 множество тех точек $u \in [u_0, u_1] = U$, для которых $x'(u) = 0$, нигде не плотно в U . Значит, $\varphi'_0(u)$ обращается в нуль на плотном в U множестве. Вместе с тем функция φ'_0 непрерывна на U , поскольку $\zeta \in C^1$. Следовательно, $\varphi'_0 = 0$ на U , т. е. $\varphi(u) = c_0 = \text{const}$.

Окончательно получаем

$$\zeta_0 = c_0 e + C_0 y(u) a'.$$

Очевидно, ζ_0 представляет собой бесконечно малое с произвольным ходом c_0/C_0 винтовое движение вокруг оси поверхности. Отсюда уже ясно, что поток поля изгибаний ζ_0 , а тем самым и поля изгибаний ζ , равен нулю. Впрочем, это легко проверить и прямым вычислением:

$$\begin{aligned}
 T &= a_0 \int \langle \zeta_0, m \rangle dS = a_0 \int_{u_0}^{u_1} du \int_0^{2\pi} (\zeta_0 r_u r_v) dv = \\
 &= a_0 \int_{u_0}^{u_1} du \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} c_0 & 0 & C_0 y \\ x' & y' & 0 \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} dv = \\
 &= 2\pi a_0 \int_{u_0}^{u_1} c_0 y' y du = 2\pi a_0 c_0 \int_{y(u_0)}^{y(u_1)} y dy = 0.
 \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место, поскольку $y(u_0) = y(u_1)$. Теорема 5.4 доказана.

Закончим открытым вопросом: Пусть гладкая поверхность S в \mathbb{R}^3 гомеоморфна сфере и такова, что множество тех ее точек, где гауссова кривизна S обращается в нуль, не имеет на S внутренних точек. Верно ли, что объем, ограничиваемый поверхностью S , стационарен при любых ее бесконечно малых изгибаниях?

Отметим, что в 1998 году аналогичный вопрос изучался Ф.Альмгреном и И.Ривиним в [67]. Они показали, что интегральная средняя кривизна замкнутого гладкого многообразия стационарна при бесконечно малых изгибаниях.

Глава 6. Новый класс изгибаемых многогранников, не использующих октаэдров Брикара

В этой главе описывается пример изгибаемого многогранника, в построении которого не используются октаэдры Брикара. Пример был построен еще до получения И.Х.Сабитовым в 1996 году его знаменитого положительного решения гипотезы кузнечных мехов [54]. Все известные на тот момент изгибаемые многогранники содержали в качестве составной части какой-нибудь из октаэдров Брикара и, казалось, сохраняют свой объем именно благодаря этому обстоятельству. Сейчас ясно, что строить контрпример к гипотезе кузнечных мехов бессмысленно, но иметь еще один пример изгибаемого многогранника — полезно.

Результаты этой главы опубликованы в работе автора [А6].

§1. Введение

Для краткости мы называем многогранную поверхность *многогранником*.

Многогранник P_0 в трехмерном евклидовом пространстве называется *изгибаемым*, если существует непрерывное семейство многогранников P_t ($0 \leq t \leq 1$) со следующими свойствами:

1) для любых $s, t \in [0, 1]$ многогранники P_s и P_t изометричны во внутренних метриках (т. е. существует гомеоморфное сюръективное отображение $f : P_s \rightarrow P_t$, сохраняющее длины всех кривых [1]);

2) для любого $r \in [0, 1]$ многогранник P_r допускает триангуляцию такую, что для любых $s, t \in [0, 1]$ и хотя бы одного гомеоморфного сюръективного отображения $f : P_s \rightarrow P_t$, сохраняющего длины всех кривых, сужение отображения f на каждую грань выбранной выше триангуляции многогранника P_s является сужением некоторой евклидовой изометрии трехмерного евклидова пространства.

3) существуют два числа $s, t \in [0, 1]$ такие, что многогранники P_s и P_t не могут быть совмещены евклидовым движением всего пространства.

Как это принято в теории поверхностей в евклидовом пространстве, мы называем *замкнутым многогранником* многогранную поверхность, которая является ограниченным замкнутым подмножеством в евклидовом пространстве и не имеет края, если ее рассматривать как кусочно-линейное многообразие.

Замкнутые изгибаемые многогранники с самопересечениями были построены Р. Брикарром [73] в 1897 г. Устранить самопересечения удалось лишь в 1976 г. Р. Коннелли [78]. Наиболее изящный пример изгибаемого замкнутого многогранника без самопересечений был построен К. Штеффеном. Он содержит всего девять вершин — на одну больше, чем у куба. Хотя сам К. Штеффен ничего не опубликовал о своем многограннике, его описание можно найти, например, в [6].

После того, как были построены изгибаемые многогранники без самопересечений, довольно быстро было замечено, что все известные изгибаемые многогранники в процессе изгибания сохраняют постоянный объем. Это наблюдение привело к следующей гипотезе.

Гипотеза кузнечных мехов: Каждый ориентируемый замкнутый многогранник (даже с самопересечениями) изгибается с сохранением объема.

Эта гипотеза сформулирована в работе Р. Коннелли [31], но, как там указано, по существу принадлежит Д. Сулливану.

Принимаясь за построение приводимого в этой главе примера, автор был уверен, что причиной появления гипотезы кузнечных мехов является тот факт, что все известные на тот момент конструкции изгибаемых замкнутых многогранников существенно используют так называемые октаэдры Брикара, которые сохраняют объем при изгибании, и поэтому считал важным построение хоть одного нетривиально изгибаемого многогранника, не использующего в своей конструкции октаэдра Брикара, и надеялся, что такой многогранник автоматически будет служить контрпримером к гипотезе кузнечных мехов. Сейчас, после того как в 1996 году И.Х.Сабитов доказал справедливость гипотезы кузнечных мехов [54], [113], стало понятно, что никаких шансов посторить контрпример у нас небыло. Однако, сам по себе пример изгибаемого многогранника небезынтересен даже сейчас.

Итак, в этой главе построен пример замкнутого многогранника с самопересечениями, являющегося кусочно-линейной реализацией тора, в построении которого не используется октаэдр Брикара. При некоторых соотношениях между параметрами конструкции этот многогранник является изгибаемым. Естественно, что при всех таких значениях параметров многогранник сохраняет объем и среднюю кривизну в процессе изгибания.

§2. Построение рамы

В этом параграфе мы строим некоторый вспомогательный замкнутый многогранник, далее называемый рамой.

Построения удобно описывать в виде рекомендаций по склеиванию модели рамы из бумаги или картона, закрывая при этом глаза на возникающие самопересечения. Описание будем вести в терминах симметрий относительно плоскостей и точек. При этом, если мы делаем i -ю по счету симметрию, то образы точек A, \tilde{B}_2, E_{12} и \tilde{D}_{124} будем обозначать через $A_i, \tilde{B}_{2i}, E_{12i}$ и \tilde{D}_{124i} соответственно.

В евклидовой плоскости нарисуем параллелограмм $ABCD$ (рис 1). Пусть расстояние между прямыми AD и BC равно 2. Обозначим через E и F середины сторон AB и CD соответственно.

Добавим к параллелограмму $ABCD$ еще один параллелограмм, ему симметричный относительно прямой BC (см. рис. 1).

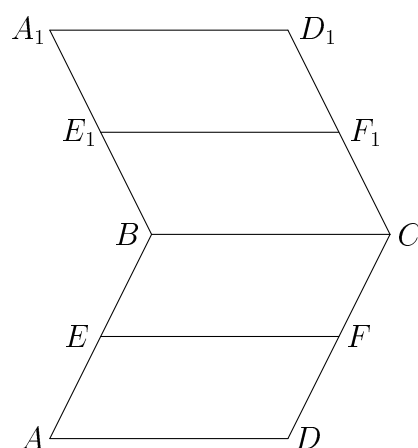


Рис. 1

Вырежем (из бумаги) получившуюся фигуру, согнем ее вдоль отрезков EF , BC , E_1F_1 и склеим вдоль отрезков AD и A_1D_1 (см. рис. 2). Получится изгибаемый многогранник, гомеоморфный боковой поверхности цилиндра. Для краткости обозначим его через \mathcal{P}_1 .

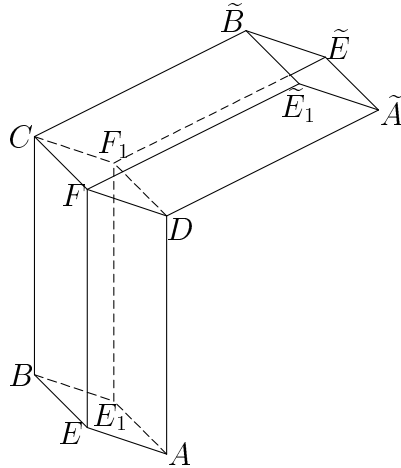


Рис. 2

Длину отрезка AD будем называть *высотой* многогранника \mathcal{P}_1 , а угол EAD в параллелограмме, изображенном на рис. 1, — *углом скоса* многогранника \mathcal{P}_1 .

Построим еще один экземпляр многогранника \mathcal{P}_1 с тем же самым углом скоса, что и раньше, но, вообще говоря, другой высотой. Обозначим его через $\tilde{\mathcal{P}}_1$, а его вершины будем обозначать теми же буквами, что и у многогранника \mathcal{P}_1 , но снабженными волной.

Легко понять, что в процессе изгибания многогранника \mathcal{P}_1 точки F, C, F_2 и $D = D_1$ все время лежат в некоторой двумерной плоскости π (положение которой может меняться в процессе изгибания).

Склеим точки D и \tilde{D} , F и \tilde{F}_1 , F_1 и \tilde{F} , C и \tilde{C} так, чтобы многогранники \mathcal{P}_1 и $\tilde{\mathcal{P}}_1$ оказались по разные стороны от плоскости π (рис. 2). В результате получится изгибаемый многогранник, гомеоморфный боковой поверхности цилиндра. Для краткости обозначим его через \mathcal{P}_2 .

Несложно показать, что в процессе изгибания многогранника \mathcal{P}_2 оба ромба $AEBE_1$ и $\tilde{A}\tilde{E}_1\tilde{B}\tilde{E}$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости π , а их соответствующие диагонали параллельны. Обозначим через M середину отрезка, соединяющего точки пересечения диагоналей этих ромбов.

Отметим, что ромбы $AEBE_1$ и $\tilde{A}\tilde{E}_1\tilde{B}\tilde{E}$ симметричны относительно точки M .

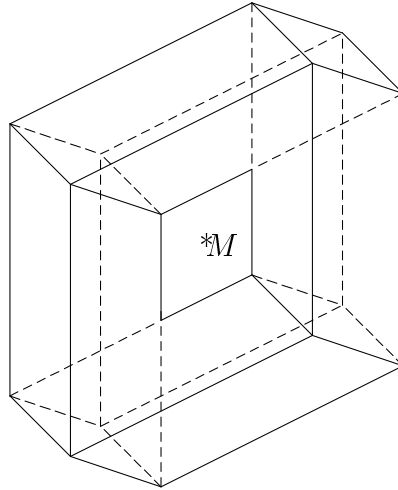


Рис. 3

Приклеим к многограннику \mathcal{P}_2 многогранник, полученный из \mathcal{P}_2 симметрией σ относительно точки M (рис. 3). Полученный многогранник для краткости назовем *рамой*. Очевидно, рама является изгибаемым замкнутым многогранником.

Конфигурацию рамы мы можем изменять в некоторых пределах, выбирая произвольным образом высоты и углы скоса многогранников \mathcal{P}_1 и $\tilde{\mathcal{P}}_1$. Однако ввиду симметрии конструкции несложно убедиться в том, что при любом выборе этих параметров ориентированный объем [81] рамы тождественно равен нулю в процессе изгиба.

В последующих параграфах мы избавимся от чрезмерной симметричности рамы, делающей тривиальным утверждение о постоянстве ее объема. Для этого мы нарисуем на многограннике \mathcal{P}_1 замкнутую четырехзвенную ломаную γ , лежащую в плоскости, перпендикулярной отрезку AD . Разрежем раму по ломаным γ и $\sigma(\gamma)$ и вклеим в каждый из этих разрезов по изгибаемому многограннику, гомеоморфному боковой поверхности цилиндра и называемому в дальнейшем коленчатым валом.

§3. Построение колена

В этом параграфе мы построим заготовку для коленчатого вала, называемую далее коленом.

На евклидовой плоскости нарисуем трапецию $abcd$, у которой углы a и b прямые (рис. 4). Пусть ее высота ab равна 2, а точки e и f делят отрезки ab и cd пополам.

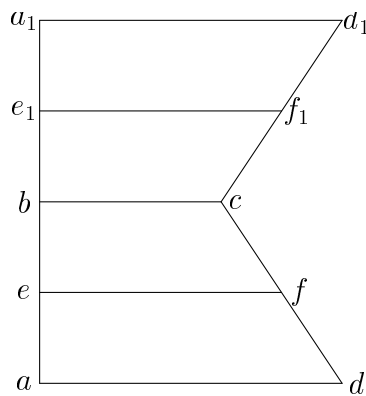


Рис. 4

Добавим к трапеции $abcd$ еще одну трапецию, ей симметричную относительно прямой bc (см. рис. 4). Вырежем получившуюся фигуру, согнем ее вдоль отрезков ef , bc , e_1f_1 и склеим вдоль отрезков ad и a_1d_1 (рис. 5). Очевидно, получится изгибаемый многогранник, гомеоморфный боковой поверхности цилиндра. Для краткости обозначим его через Q_1 .

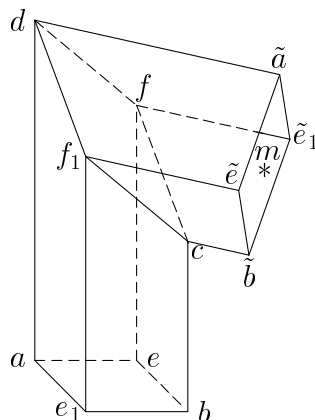


Рис. 5

В процессе изгибания многогранника \mathcal{Q}_1 точки c, f_1, d, f все время лежат в некоторой двумерной плоскости \varkappa (положение которой может меняться в процессе изгибания).

Длину отрезка ef будем называть *высотой многогранника \mathcal{Q}_1* , а угол adf в трапеции, изображенной на рисунке 4, — *углом скоса многогранника \mathcal{Q}_1* .

Построим еще один экземпляр многогранника \mathcal{Q}_1 , имеющий тот же самый угол скоса, но, вообще говоря, другую высоту. Обозначим его через $\widetilde{\mathcal{Q}}_1$, а его вершины будем обозначать теми же буквами, что и у многогранника \mathcal{Q}_1 , но снабженными волной.

Склеим точки d и \tilde{d} , f и \tilde{f}_1 , f_1 и \tilde{f} , c и \tilde{c} . Так, чтобы при этом многогранники \mathcal{Q}_1 и $\widetilde{\mathcal{Q}}_1$ оказались по разные стороны от плоскости \varkappa (см. рис. 5). В результате получится изгибаемый многогранник, гомеоморфный боковой поверхности цилиндра. Для краткости обозначим его через \mathcal{Q}_2 .

Обозначим через m точку пересечения диагоналей ромба $\tilde{a}\tilde{e}_1\tilde{b}\tilde{e}$.

Приклеим к многограннику \mathcal{Q}_2 многогранник, полученный из \mathcal{Q}_2 симметрией относительно точки m (рис. 6). Получится изгибаемый многогранник, гомеоморфный боковой поверхности цилиндра. Для краткости обозначим его через \mathcal{Q}_3 .

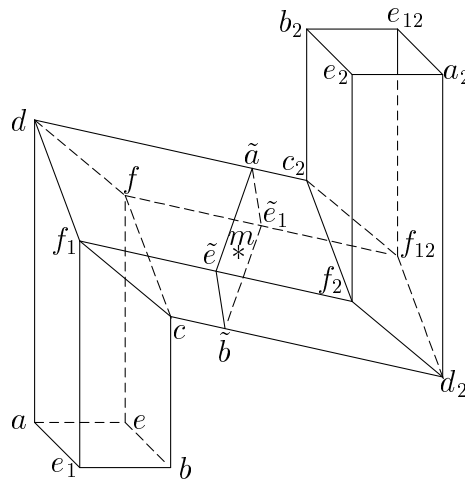


Рис. 6

Несложно показать, что в процессе изгибания многогранника \mathcal{Q}_3 точки a_2, e_2, b_2 и e_{12} все время лежат в некоторой двумерной плоскости τ (положение которой может меняться в процессе изгибания).

Приклеим к многограннику \mathcal{Q}_3 многогранник, полученный из \mathcal{Q}_3 симметрией относительно плоскости τ (рис. 7). Полученный многогранник для краткости назовем *коленом*. Очевидно, колено является изгибаемым многогранником, гомеоморфным боковой поверхности цилиндра.

Конфигурацию колена мы можем изменять в некоторых пределах, выбирая произвольным образом высоту и угол скоса многогранника \mathcal{Q}_1 , а также — высоту многогранника $\widetilde{\mathcal{Q}}_1$.

Приведенное выше описание колена предполагало, что длины отрезков e_1f_1 , e_2f_2 , e_2f_{23} и $e_{13}f_{13}$ равны между собой. Это было сделано исключительно для удобства объяснений, поскольку даже при условии, что эти длины различны, колено бы изгибалось.

Обозначим через x_1 длину отрезка e_1f_1 , через x_2 — длину отрезка f_1f_2 , через x_3 — длину отрезка f_2f_{23} и через x_4 — длину отрезка $f_{13}e_{13}$. Через φ обозначим угол скоса многогранника \mathcal{Q}_1 . Числа x_1, x_2, x_3, x_4 и φ назовем *параметрами колена*.

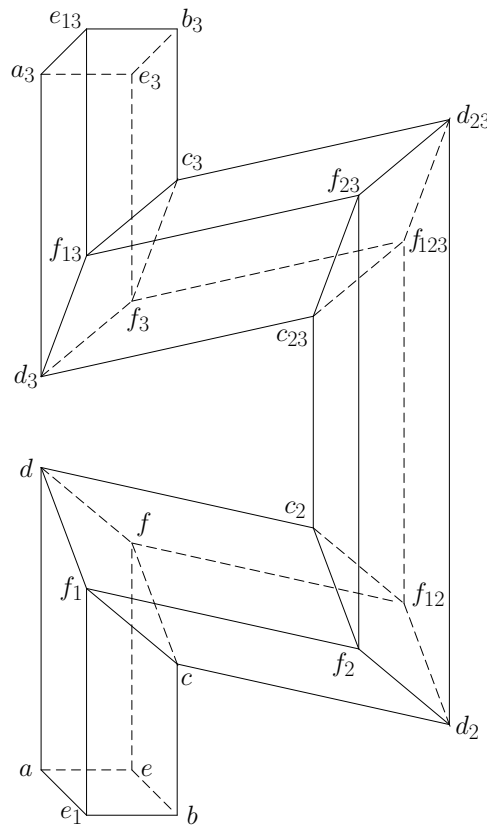


Рис. 7

При любом выборе параметров колена в процессе его изгибания точки a, e, b и e_1 все время лежат в некоторой двумерной плоскости δ (положение которой может меняться в процессе изгибания). Можно показать, что в процессе изгибания колена ромб $a_3e_3b_3e_{13}$ лежит в плоскости, параллельной плоскости δ , а ортогональная проекция точки a_3 (соответственно e_3, b_3 и e_{13}) на плоскость δ совпадает с a (соответственно с e, b и e_1).

Расстояние между точками e и e_1 будем называть *параметром изгибания* и обозначать через $2t$ ($0 \leq t \leq 1$).

Расстояние между параллельными плоскостями, содержащими ромбы $aebe_1$ и $a_3e_3b_3e_{13}$, назовем *высотой колена* и обозначим через $h(t)$.

При фиксированном t приклеим к колену ромбы $aebe_1$ и $a_3e_3b_3e_{13}$. Объем, ограниченный получившимся замкнутым многогранником, назовем *объемом колена* и обозначим через $v(t)$.

Найдем высоту и объем колена с параметрами x_1, x_2, x_3, x_4 и φ как функции параметра изгибания t .

Для определенности будем предполагать, что длина отрезка ad больше длины отрезка bc (см. рис. 5).

Через точки f_1, f проведем плоскость, параллельную плоскости ромба $aebe_1$. Точку пересечения этой плоскости с отрезком ad обозначим через g и отметим, что разным значениям параметра t соответствует одна и та же точка g . Полуплоскость, ограниченную прямой ff_1 и проходящую через точку d (соответственно g), обозначим через Ω_d (соответственно Ω_g). Величину наименьшего из двугранных углов, образуемых полуплоскостями Ω_d и Ω_g , обозначим через $\omega(t)$.

Легко проверить, что при введенных выше обозначениях справедливо равенство

$$\cos \omega(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2 \sin^2 \varphi}} \sin \varphi.$$

Поскольку наименьший положительный угол между лучом, выходящим из точки f_1 , лежащим на прямой e_1f_1 и не содержащим точки e_1 , и лучом, выходящим из точки f_1 и проходящим через точку f_1 , равен $2\omega(t)$ (см.

рис 6), имеем

$$\begin{aligned}
 h(t) &= x_1 + x_3 + x_4 + 2x_2 \cos 2\omega(t) = \\
 &= x_1 + x_3 + x_4 + 2x_2[2 \cos^2 \omega(t) - 1] = \\
 &= x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_2 \frac{1-t^2}{1-t^2 \sin^2 \varphi} \sin^2 \varphi = \\
 &= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 4x_2 \frac{\cos^2 \varphi}{1-t^2 \sin^2 \varphi}.
 \end{aligned}$$

Приклеим к многограннику \mathcal{Q}_1 ромбы $aebe_1$ и $dfcf_1$ (см. рис. 5). Объем получившегося замкнутого многогранника равен произведению площади ромба $aebe_1$ на высоту многогранника \mathcal{Q}_1 . Поэтому для объема колена получаем

$$v(t) = (x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4)2t\sqrt{1-t^2}.$$

Плоскость, в которой лежат точки a, b, c и d , будем для краткости называть *плоскостью колена*, а ромбы $aebe_1$ и $a_3e_3b_3e_{13}$ — *торцами колена* (см. рис. 7).

§4. Построение коленчатого вала

Далее нам будет удобно изображать колено схематически в виде ломаной, указывая при этом его параметры x_1, x_2, x_3, x_4 и φ непосредственно на рисунке. Обозначения ясны из рис. 8, где схематически изображено колено, представленное на рис. 7.

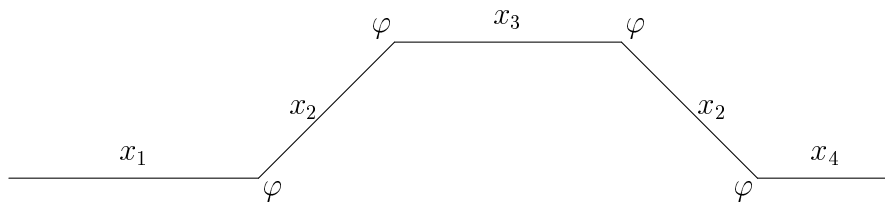


Рис. 8

Рассмотрим три колена K_1, K_2 и K_3 с параметрами $x_1, x_2, x_3, x_4, \varphi$; $y_1, y_2, y_3, y_4, \varphi$ и z_1, z_2, z_3, z_4, ψ соответственно, а также два экземпляра колена K_4 с параметрами w_1, w_2, w_3, w_4, ψ .

К одному торцу колена K_1 приклеим колено K_2 , а к другому — K_3 так, чтобы плоскости всех трех колен совпадали.

Пусть p обозначает среднюю точку ребра f_1f_2 колена K_1 (см. рис. 6).

Проведем через p плоскость, ортогональную отрезку f_1f_2 , и разрежем колено K_1 по образовавшемуся ромбу. Приклеим один берег образовавшегося разреза к одному торцу первого экземпляра колена K_4 , а другой — к другому торцу первого экземпляра колена K_4 так, чтобы плоскости колен K_1 и K_4 совпадали.

Пусть теперь q обозначает среднюю точку ребра $f_{13}f_{23}$ колена K_1 (см. рис. 7).

Проведем через q плоскость, ортогональную отрезку $f_{13}f_{23}$, и разрежем колено K_1 по образовавшемуся ромбу. Приклеим один берег образовавшегося разреза к одному торцу второго экземпляра колена K_4 , а другой — к другому торцу того же колена так, чтобы плоскости колен K_1 и K_4 совпали. В результате получится изгибаемый многогранник, гомеоморфный боковой поверхности цилиндра. Для краткости далее называть его *коленчатым валом* и обозначать через \mathcal{R} . Схематически он изображен на рис. 9.

Числа $x_i, y_i, z_i, w_i, \varphi$ и ψ ($i = 1, 2, 3, 4$) назовем *параметрами коленчатого вала*. Параметр изгиба t и плоскость колена K_1 , участвовавшего в построении коленчатого вала, назовем соответственно *параметром изгиба* и *плоскостью коленчатого вала*. Свободные торцы колен K_2 и K_3 , участвовавших в построении коленчатого вала, назовем *торцами коленчатого вала*.

При любом выборе параметров коленчатого вала в процессе изгиба его торцы лежат в параллельных плоскостях, расстояние между которыми будем называть *высотой коленчатого вала* и обозначать через $H(t)$.

При фиксированном t заклеим торцы коленчатого вала ромбами. Объем, ограниченный получившимся замкнутым многогранником, назовем *объемом коленчатого вала* и обозначим через $V(t)$.

Обозначив через $h_i(t)$ высоту колена K_i ($i = 1, 2, 3, 4$), участвовавшего в построении коленчатого вала, и используя выражение для высоты колена,

полученное в § 3, будем иметь

$$\begin{aligned}
H(t) &= h_1(t) + h_2(t) + h_3(t) + 2h_4(t) \cos 2\omega_1(t) = \\
&= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 4x_2 \frac{\cos^2 \varphi}{1-t^2 \sin^2 \varphi} + \\
&+ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 - 4y_2 \frac{\cos^2 \varphi}{1-t^2 \sin^2 \varphi} + \\
&+ z_1 + 2z_2 + z_3 + z_4 - 4z_2 \frac{\cos^2 \psi}{1-t^2 \sin^2 \psi} + \\
&+ 2 \left[w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4 - 4w_2 \frac{\cos^2 \psi}{1-t^2 \sin^2 \psi} \right] \left[2 \frac{1-t^2}{1-t^2 \sin^2 \varphi} \sin^2 \varphi - 1 \right] = \\
&= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + z_1 + 2z_2 + z_3 + z_4 + \\
&+ 2(w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4) - \\
&- 4(x_2 + y_2 + w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4) \frac{\cos^2 \varphi}{1-t^2 \sin^2 \varphi} - \\
&- 4(z_2 + 2w_2) \frac{\cos^2 \psi}{1-t^2 \sin^2 \psi} + 8w_2 \frac{\cos^2 \psi}{1-t^2 \sin^2 \psi} \frac{\cos^2 \varphi}{1-t^2 \sin^2 \varphi}.
\end{aligned}$$

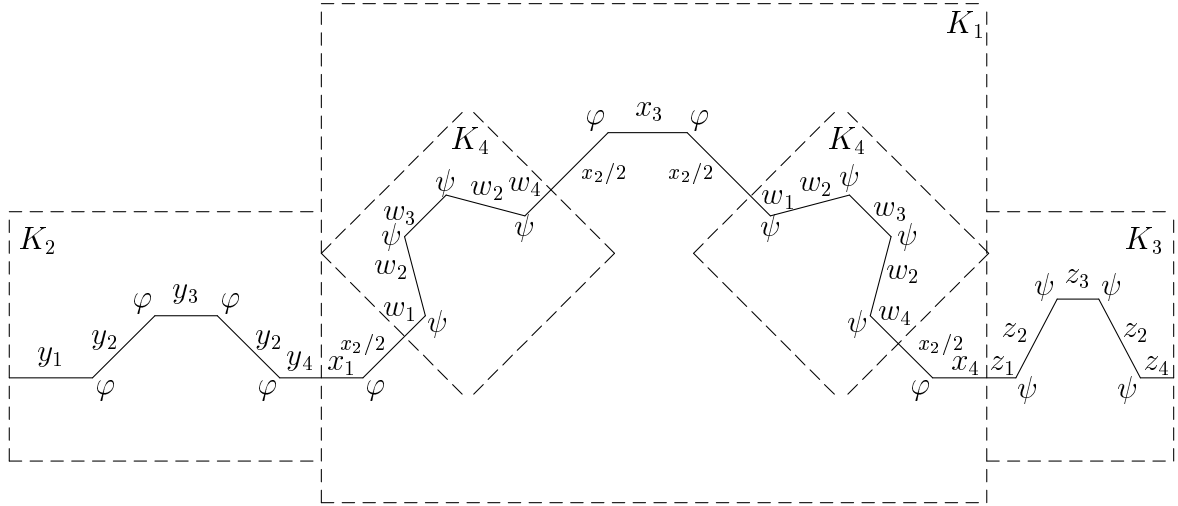


Рис. 9

Предполагая, что $\sin^2 \varphi \neq \sin^2 \psi$, разложим последнее слагаемое на простые дроби и приведем подобные:

$$\begin{aligned}
H(t) &= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + \\
&+ z_1 + 2z_2 + z_3 + z_4 + 2(w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4) - \\
&- 4 \left(x_2 + y_2 + w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4 - 8w_2 \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{\sin^2 \varphi - \sin^2 \psi} \right) \frac{1}{1-t^2 \sin^2 \varphi} - \\
&- 4 \left(z_2 + 2w_2 + 8w_2 \frac{\sin^2 \psi \cos^2 \psi \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi - \sin^2 \psi} \right) \frac{1}{1-t^2 \sin^2 \psi}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Аналогично, используя выражение для объема колена, полученное в § 3, будем иметь

$$V(t) = [x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + z_1 + 2z_2 + z_3 + z_4 + 2(w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4)]2t\sqrt{1-t^2}. \quad (2)$$

§5. Основной результат

Возьмем два экземпляра коленчатого вала. Первый обозначим через \mathcal{R} , а его параметры — через $x_i, y_i, z_i, w_i, \varphi, \psi$ ($i = 1, 2, 3, 4$); второй обозначим через $\tilde{\mathcal{R}}$, а его параметры — через $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i, \tilde{w}_i, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Непосредственно из формулы (1) вытекает следующая

Лемма 6.1. *Если параметры многогранников \mathcal{R} и $\tilde{\mathcal{R}}$ подобраны так, что выполняются равенства*

$$\varphi = \tilde{\varphi}, \quad (3)$$

$$\psi = \tilde{\psi}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + \\ & + z_1 + 2z_2 + z_3 + z_4 + 2(w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4) = \\ & = \tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 + \tilde{y}_1 + 2\tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 + \tilde{y}_4 + \\ & + \tilde{z}_1 + 2\tilde{z}_2 + \tilde{z}_3 + \tilde{z}_4 + 2(\tilde{w}_1 + 2\tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 + \tilde{w}_4), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & x_2 + y_2 + w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4 - 8w_2 \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{\sin^2 \varphi - \sin^2 \psi} = \\ & = \tilde{x}_2 + \tilde{y}_2 + \tilde{w}_1 + 2\tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 + \tilde{w}_4 - 8\tilde{w}_2 \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{\sin^2 \varphi - \sin^2 \psi}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$z_2 + 2w_2 + 8w_2 \frac{\sin^2 \psi \cos^2 \psi \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi - \sin^2 \psi} = \tilde{z}_2 + 2\tilde{w}_2 + 8\tilde{w}_2 \frac{\sin^2 \psi \cos^2 \psi \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi - \sin^2 \psi}, \quad (7)$$

то высоты многогранников \mathcal{R} и $\tilde{\mathcal{R}}$ тождественно совпадают при всех значениях параметра изгиба t .

Через \mathcal{P} обозначим раму, построенную в §2. Середину отрезка EF обозначим через T (см. рис. 2). Через точку T проведем плоскость, ортогональную отрезку EF и разрежем многогранник \mathcal{P} вдоль ромба γ , по которому эта плоскость пересекает \mathcal{P} . Получившийся разрез будем называть первым.

Напомним, что заключительный шаг в построении рамы состоял в приклеивании к многограннику, обозначенному в § 1 через \mathcal{P}_2 , его образа при некоторой симметрии σ . Разрежем раму \mathcal{P} еще и вдоль ромба $\sigma(\gamma)$. Получившийся разрез будем называть вторым.

Раздвинем две части, на которые мы разрезали раму \mathcal{P} , и приклеим верхний берег первого разреза к одному торцу многогранника \mathcal{R} , а его нижний берег — к другому торцу \mathcal{R} . Затем приклеим верхний берег второго разреза к одному торцу многогранника $\tilde{\mathcal{R}}$, а его нижний берег — к другому торцу $\tilde{\mathcal{R}}$. В результате получится замкнутый многогранник, который мы обозначим через \mathcal{S} . Наиболее интересное для нас свойство этого многогранника сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 6.2. *При выполнении условий (3)–(7) многогранник \mathcal{S} является изгибаемым, и в процессе изгибания его ориентированный объем тождественно равен нулю.*

Доказательство. Изгибаемость \mathcal{S} следует из леммы 6.1 и изгибаемости рамы и коленчатого вала. Сопоставляя формулы (2) и (5) и учитывая, что ориентированный объем рамы тождественно равен нулю в процессе изгибания, заключаем, что ориентированный объем \mathcal{S} тождественно равен нулю. Теорема 6.2 доказана.

Отметим, что, как и было обещано в §1, октаэдр Брикара не участвует в построении изгибаемого многогранника \mathcal{S} . Причина изгибаемости многогранника \mathcal{S} кроется в возможности разложить рациональную функцию на простые дроби, и она не столь тривиальна, как у рамы или у изгибаемой подвески [31], когда многогранник очевидным образом построен из попарно одинаковых частей, один раз “ориентированных” положительно, а другой — “отрицательно” так, что утверждение о постоянстве (и даже равенстве нулю) его объема становится тривиальным.

В действительности у построенного в этом параграфе многогранника \mathcal{S} средняя кривизна (т. е. сумма произведений длины ребра на величину двугранного угла при этом ребре, вычисленная по всем ребрам данного многогранника) также постоянна в процессе изгибания (что согласуется с общей теоремой, доказанной в 1985 году Р.Александром [66] и передоказанной в 1998 году Ф.Альмгреном и И.Ривиним [67]). Для доказательства достаточно заметить, что в силу формулы (5) сумма длин ребер \mathcal{S} с некоторым данным “внутренним” двугранным углом α равна сумме

длин его ребер с “внутренним” двугранным углом $\pi - \alpha$. Таким образом, для \mathcal{S} факты сохранения объема и средней кривизны имеют общее основание — формулу (5). Геометрическая же сущность равенств (6) и (7) остается неясной.

Обстоятельство, из которого мы вывели постоянство средней кривизны для \mathcal{S} , имеет прямое отношение и к так называемой усиленной гипотезе кузнечных мехов, утверждающей, что всякий многогранник P_t , полученный из данного многогранника P_0 изгибанием, равносоставлен с P_0 [80]. В самом деле, несложно показать, что если всякий многогранник P_t , полученный из данного многогранника P_0 непрерывным изгибанием, обладает тем свойством, что если взять любое его ребро и сложить внутренние двугранные углы P_t при всех его ребрах, имеющих ту же самую длину, то получится величина, не зависящая от t , то любой деновский инвариант [8] многогранника P_t от t не зависит, а значит, он одинаков у P_t и P_0 . Однако, как известно [8], если у двух многогранников совпадают объемы и все деновские инварианты, то эти многогранники равносоставлены.

Таким образом, положительное решение усиленной гипотезы кузнечных мехов является следствием положительного решения следующей гипотезы о наличии скрытых симметрий у любого изгибаемого многогранника: если взять любое его ребро и сложить внутренние двугранные углы при всех его ребрах, имеющих ту же самую длину, то получится величина, не зависящая от параметра изгиба.

Было бы интересно выяснить справедлива ли эта гипотеза о наличии скрытых симметрий у любого изгибаемого многогранника, а также выяснить за сохранение каких геометрических характеристик отвечают равенства (6) и (7).

Глава 7. Гипотеза кузнечных мехов в трехмерном сферическом пространстве

В данной главе мы построим изгибаемый многогранник, лежащий в открытой полусфере \mathbb{S}_+^3 , и не сохраняющий в процессе изгибания ни объем, ни среднюю кривизну.

Результаты этой главы опубликованы в работе автора [A9].

§1. Введение

Пусть K — двумерный замкнутый симплициальный комплекс, \mathbb{E}^n — n -мерное евклидово пространство, \mathbb{S}^n — n -мерная сфера единичного радиуса пространства \mathbb{E}^{n+1} , \mathbb{S}_+^n — открытая полусфера сферы \mathbb{S}^n (т.е. компонента связности разности $\mathbb{S}^n \setminus \tau$, где τ — некоторая гиперплоскость в \mathbb{E}^{n+1} , проходящая через центр сферы \mathbb{S}^n).

Многогранником в \mathbb{E}^3 (соотв. в \mathbb{S}^3) называется непрерывное в целом и аффинное на каждом симплексе отображение $P : K \rightarrow \mathbb{E}^3$ (соотв. — $P : K \rightarrow \mathbb{S}^3$). Если отображение P является, локальным или глобальным гомеоморфизмом, то говорят, что многогранник P погружен или вложен в соответствующее пространство. Впрочем, нам будет удобнее называть многогранником образ $P(K)$ комплекса K при отображении P .

Изгибанием многогранника P называется непрерывное по параметру семейство многогранников $P_t : K \rightarrow \mathbb{E}^3$ (соотв. $P_t : K \rightarrow \mathbb{S}^3$) таких, что $P = P_0$ и все $P_t(K)$ изометричны между собой в индуцированной из \mathbb{E}^3 (соотв. из \mathbb{S}^3) метрике. Многогранник называется изгибаемым, если существует его нетривиальное изгибание, т.е. изгибание, не сводящееся к движению $P(K)$ в пространстве \mathbb{E}^3 (соотв. \mathbb{S}^3) как твердого тела.

Гипотеза кузнечных мехов Коннелли – Суливана [79] утверждает, что всякий (не обязательно вложенный или погруженный) ориентируемый изгибаемый многогранник в \mathbb{E}^3 сохраняет свой (ориентированный) объем в процессе изгибания.

Эта гипотеза доказана И.Х.Сабитовым для всех изгибаемых многогранников в \mathbb{E}^3 [54], [55], [113]. Другое ее доказательство можно найти в работе [83]. Укажем также более ранние работы [51], [53], [42], в которых получены частичные результаты, приведшие в конце концов к полному решению И.Х.Сабитовым гипотезы кузнечных мехов в трехмерном евклидовом пространстве.

Кроме того, как известно, всякий изгибаемый многогранник в \mathbb{E}^n , $n \geq 3$, сохраняет полную среднюю кривизну в процессе изгибания. То есть величина

$$\sum_g \alpha(g) \text{vol}(g)$$

остаётся постоянной в процессе изгибания многогранника. Здесь суммирование распространяется на все $(n - 2)$ -мерные грани g многогранника, $\alpha(g)$ означает величину внутреннего двугранного угла, образованного двумя $(n - 1)$ -мерными гранями, сходящимися в g , а $\text{vol}(g)$ означает $(n - 2)$ -мерный объём грани g . Этот результат был впервые установлен Р.Александром [66], а затем был независимо передоказан Ф.Альмгреном и И.Ривиним [67].

В данной главе мы построим изгибаемый многогранник, лежащий в открытой полусфере \mathbb{S}_+^3 и не сохраняющий в процессе изгибания ни объём, ни среднюю кривизну.

§2. Предварительные соглашения

Прямой (соотв. — двумерной плоскостью) на сфере \mathbb{S}^3 называется пересечение сферы \mathbb{S}^3 с некоторой двумерной (соотв. — трехмерной) плоскостью в \mathbb{E}^4 , проходящей через центр сферы \mathbb{S}^3 .

Аналогично, понятия угла между прямыми или плоскостями на сфере, а также — движения сферы, сводятся к соответствующим понятиям евклидова пространства. Необходимые нам для дальнейшего свойства прямых и плоскостей на сфере столь очевидно вытекают из соответствующих свойств их евклидовых “двойников”, что мы на этом не останавливаемся.

Сферическим двугольником называем часть двумерной плоскости в \mathbb{S}^3 , заключенную между двумя отрезками прямых, соединяющими две диаметрально противоположные точки сферы \mathbb{S}^3 . При этом определяющие

двуугольник отрезки прямых называются его сторонами, а общие точки сторон двуугольника — его вершинами.

§3. Вспомогательный многогранник Q

Возьмем 4 одинаковых двуугольника и попарно склеим их, как схематически изображено на рис. 1. Полученный многогранник обозначим через Q .

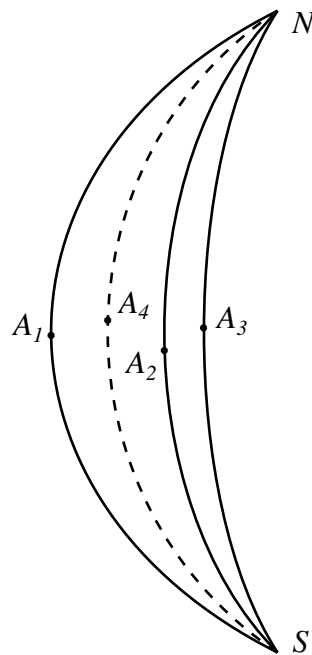


Рис. 1

Очевидно, Q является изгибаемым многогранником.

Ясно также, что Q не сохраняет объем в процессе изгибания, поскольку он может быть продеформирован как в дважды покрытый двуугольник, очевидным образом ограничивающий тело нулевого объема, так и в многогранник с заведомо положительным объемом.

Столь же просто можно убедиться, что Q не сохраняет среднюю кривизну в процессе нетривиального изгибания. Для этого обозначим через N и S вершины многогранника Q и в четырехмерном пространстве \mathbb{E}^4 , содержащем сферу \mathbb{S}^3 , проведем трехмерную плоскость τ , ортогональную

отрезку $NS \subset \mathbb{E}^4$. Точки пересечения плоскости τ с ребрами многогранника Q обозначим через A_1, A_2, A_3 и A_4 (см. рис. 1).

Средняя кривизна H_Q многогранника Q равна сумме (вычисленной по всем его ребрам) произведений длины l_j ребра на величину внутреннего двугранного угла α_j между гранями Q , сходящимися в этом ребре:

$$H_Q = \sum_{j=1}^4 l_j \alpha_j.$$

Но для каждого j мы имеем $l_j = \pi$ (ведь \mathbb{S}^3 — это сфера единичного радиуса), а угол α_j равен соответствующему углу четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ лежащего на двумерной сфере единичного радиуса. Однако из сферической тригонометрии известно, что площадь четырехугольника на единичной сфере равна избытку суммы его внутренних углов над числом 2π . Обозначая через σ площадь четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ на соответствующей двумерной сфере, окончательно получаем

$$H_Q = \sum_{j=1}^4 l_j \alpha_j = \pi \sum_{j=1}^4 \alpha_j = \pi(2\pi + \sigma). \quad (1)$$

Ясно, что в процессе деформации многогранника Q площадь σ может быть сделана как равной нулю (что имеет место, если $A_1 = A_3$ или $A_2 = A_4$), так и заведомо положительной (что имеет место, если все точки A_1, A_2, A_3 и A_4 различны). Значит, σ (а вместе с нею — и H_Q не сохраняется в процессе деформации).

Построенный многогранник Q является в определенном смысле недопустимым примером, поскольку содержит две диаметрально противоположные точки сферы \mathbb{S}^3 (а именно — N и S). В следующем параграфе мы модифицируем Q , освободив от этого недостатка.

§4. Построение многогранника R

Выберем на каждом ребре многогранника Q по одной точке B_1, B_2, B_3 и B_4 (рис. 2) так, чтобы

$$\rho(B_1, B_2) = \rho(B_2, B_3) = \rho(B_3, B_4) = \rho(B_4, B_1), \quad (2)$$

где ρ — внутреннее расстояние между точками на сфере \mathbb{S}^3 , т.е. инфимум длин кривых, лежащих на сфере и соединяющих данные точки. Число $t = \rho(B_2, B_4)$ будем называть параметром изгиба, а постоянную $\rho(B_1, B_2)$ обозначим через a .

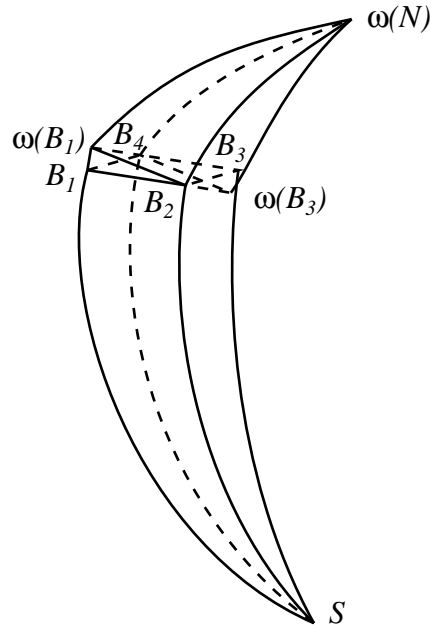


Рис. 2

Разрежем многогранник Q по отрезкам B_1B_2 , B_2B_3 , B_3B_4 и B_4B_1 на два многогранника с краем, которые обозначим через Q_1 и Q_2 .

Фиксируем (достаточно малое) положительное число b .

Подберем величину (сферического) поворота $\omega : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$, оставляющего неподвижной (сферическую) прямую B_2B_4 , так чтобы (сферическое) расстояние между точками B_1 и $\omega(B_1)$ было равно b . Отметим, что величина поворота ω зависит от текущего значения параметра изгиба t .

Поскольку (сферические) расстояния от точек B_1 и B_2 до (сферической) прямой B_2B_4 одинаковы, расстояние между точками B_3 и $\omega(B_3)$ также равно b .

Обозначим через R многогранник (без края), состоящий из а) многогранника Q_2 ; б) многогранника $\omega(Q_1)$; в) четырех (сферических) треугольников $B_1B_2\omega(B_1)$, $B_1B_4\omega(B_1)$, $B_2B_3\omega(B_3)$ и $B_4B_3\omega(B_3)$ (см. рис. 2).

Из построения следует, что многогранник R допускает нетривиальные изгибания при любом выборе точек B_1, B_2, B_3 и B_4 , удовлетворяющих условию (2), и любом выборе достаточно малого положительного числа b .

§5. Об объеме многогранника R

Покажем, что при любом выборе точек B_1, B_2, B_3 и B_4 , удовлетворяющих условию (2), и любом выборе достаточно малого положительного числа b многогранник R не сохраняет объем в процессе нетривиального изгибания.

В самом деле, при каждом значении параметра t многогранник R можно представить в виде объединения следующих четырех попарно неналегающих многогранников (здесь, конечно, имеются в виду пространственные тела, ограниченные соответствующими многогранными поверхностями):

А) многогранник Q_2 с присоединенными к нему треугольниками $B_1B_2B_4$ и $B_2B_3B_4$;

Б) многогранник $\omega(Q_1)$ с присоединенными к нему треугольниками $B_2B_4\omega(B_1)$ и $B_2B_4\omega(B_3)$;

В) тетраэдр $B_1B_2B_4\omega(B_1)$;

Г) тетраэдр $B_2B_3B_4\omega(B_3)$.

Ориентация многогранника R порождает противоположные ориентации на тетраэдрах В) и Г) (т.е. если один из них ориентирован с помощью внешней нормали, то другой будет ориентирован с помощью внутренней). С другой стороны, тетраэдры В) и Г) имеют соответственно равные стороны, а значит, их ориентированные объемы равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Следовательно, объем многогранника R равен сумме объемов многогранников А) и Б), а значит — объему многогранника Q , который, как было показано в §3, не постоянен в процессе нетривиального изгибания.

§6. О средней кривизне многогранника R

Убедимся, что средняя кривизна многогранника R не сохраняется в процессе нетривиального изгибания.

Поскольку каждый из тетраэдров В) и Г) симметричен относительно двумерной плоскости, проходящей через точки B_2 , B_4 и середины отрезков $B_1\omega(B_1)$ и $B_3\omega(B_3)$ соответственно, то двугранные углы в этих тетраэдрах при ребрах B_1B_2 , $B_2\omega(B_1)$, B_1B_4 , $B_4\omega(B_1)$, B_2B_3 , $B_2\omega(B_3)$, B_3B_4 и $B_4\omega(B_3)$ равны между собой. Обозначим общую величину этих двугранных углов через α и отметим, что она, очевидно, зависит от текущего значения параметра изгиба t .

Аналогично, воспользовавшись тем, что тетраэдры В) и Г) получаются друг из друга симметрией относительно середины отрезка B_2B_4 заключаем, что величины двугранных углов этих тетраэдров при ребрах $B_1\omega(B_1)$ и $B_3\omega(B_3)$ одинаковы. Обозначим их общую величину через $\beta(t)$.

Символом $\angle_T CD$ условимся обозначать величину (внутреннего) двугранного угла при ребре CD в многограннике T . В качестве T у нас будет фигурировать многогранник R или один из многогранников А), Б), В) или Г) из §5.

Из рис. 2 вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \angle_R B_1 B_2 &= \angle_A) B_1 B_2 + \angle_B) B_1 B_2 &&= \angle_A) B_1 B_2 + \alpha; \\ \angle_R B_2 \omega(B_1) &= \angle_B) B_2 \omega(B_1) + \angle_B) B_2 \omega(B_1) &&= \angle_B) B_2 \omega(B_1) + \alpha; \\ \angle_R B_1 B_4 &= \angle_A) B_1 B_4 + \angle_B) B_1 B_4 &&= \angle_A) B_1 B_4 + \alpha; \\ \angle_R B_4 \omega(B_1) &= \angle_B) B_4 \omega(B_1) + \angle_B) B_4 \omega(B_1) &&= \angle_B) B_4 \omega(B_1) + \alpha; \\ \angle_R B_2 B_3 &= \angle_A) B_2 B_3 - \angle_\Gamma) B_2 B_3 &&= \angle_A) B_2 B_3 - \alpha; \\ \angle_R B_2 \omega(B_3) &= \angle_B) B_2 \omega(B_3) - \angle_\Gamma) B_2 \omega(B_3) &&= \angle_B) B_2 \omega(B_3) - \alpha; \\ \angle_R B_4 B_3 &= \angle_A) B_4 B_3 - \angle_\Gamma) B_4 B_3 &&= \angle_A) B_4 B_3 - \alpha; \\ \angle_R B_4 \omega(B_3) &= \angle_B) B_4 \omega(B_3) - \angle_\Gamma) B_4 \omega(B_3) &&= \angle_B) B_4 \omega(B_3) - \alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle_A) B_1 B_2 + \angle_B) B_2 \omega(B_1) &= \pi; \\ \angle_A) B_1 B_4 + \angle_B) \omega(B_1) B_4 &= \pi; \\ \angle_A) B_2 B_3 + \angle_B) B_2 \omega(B_3) &= \pi; \\ \angle_A) B_3 B_4 + \angle_B) \omega(B_3) B_4 &= \pi, \end{aligned}$$

с учетом которых средняя кривизна H_R многогранника R связана со средней кривизной H_Q многогранника Q следующим образом

$$H_R(t) = H_Q(t) + 4\pi\rho(B_1, B_2) + 2b\beta(t).$$

Воспользовавшись формулой (1) для средней кривизны многогранника Q и соглашением $\rho(B_1, B_2) = a$, перепишем предыдущую формулу в виде

$$H_R(t) = \pi\sigma(t) + 2b\beta(t) + 2\pi^2 + 4\pi a. \quad (3)$$

Допустив, что H_R постоянна хоть на каком-нибудь интервале I изменения параметра t , из (3) получим, что функция f , тождественно равная единице, и функции σ и β линейно зависимы на интервале I . Продолжим аналитически функции f , σ и β с интервала I в комплексную плоскость \mathbb{C} и, в частности, в тот интервал J , где функции σ и β имеют геометрический смысл.

Поскольку $0 \in J$ и $\sigma(0) = \beta(0) = 0$, из (3) следует, что

$$H_R(t) = \pi\sigma(t) + 2b\beta(t) + 2\pi^2 + 4\pi a = 2\pi^2 + 4\pi a$$

или

$$\pi\sigma(t) + 2b\beta(t) = 0$$

для всех $t \in J$. Последнее, однако, невозможно, так как обе функции σ и β неотрицательны в J . Тем самым предположение о постоянстве H_R приведено к противоречию.

§7. Основной результат.

Теорема 7.1. *В открытой полусфере \mathbb{S}_+^3 трехмерной сферы единичного радиуса \mathbb{S}^3 существует изгибаемый многогранник, не сохраняющий в процессе изгибания ни свой (ориентированный) объем, ни свою (полную) среднюю кривизну.*

Доказательство. На сфере \mathbb{S}^3 отметим диаметрально противоположные точки N и S , соединим их отрезком (сферической) прямой и обозначим через середину этого отрезка (см. рис. 3). Обозначим через $\nu : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ поворот сферы \mathbb{S}^3 вокруг точки M , не совпадающий с тождественным отображением.

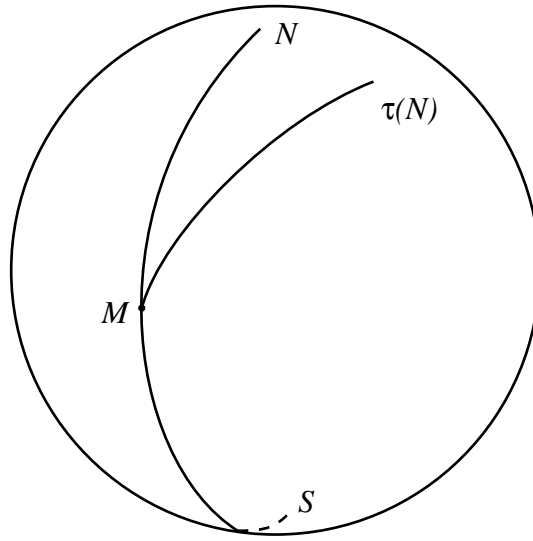


Рис. 3

Очевидно, ломаная, состоящая из двух отрезков SM и $M\nu(N)$, лежит в некоторой открытой полусфере \mathbb{S}_+^3 . Выберем окрестности V и W отрезков SM и $M\nu(N)$ соответственно так, чтобы $V \cup W \subset \mathbb{S}_+^3$.

Отправляясь от очень узких двуугольников, в соответствии с изложенным в §3, построим вспомогательный многогранник Q , имеющий точки N и S в качестве своих вершин и содержащийся в множестве $V \cup \nu^{-1}(W)$.

Следуя §4, преобразуем многогранник Q в R , выбрав в качестве точек B_1, B_2, B_3 и B_4 середины сторон Q и подобрав поворот ω таким образом, чтобы многогранник R содержался в множестве $V \cup W$.

Получившийся многогранник R является искомым: он лежит в одной полусфере, изгибается и, в соответствии с доказанным в §5 и §6, не сохраняет ни объем, ни среднюю кривизну.

Отметим, что многогранник R не является ни вложенным, ни погруженным и в этом отношении аналогичен октаэдрам Брикара.

§8. Обобщения и замечания.

Опуская детали, можно сказать, что в доказательстве теоремы 7.1 мы построили многогранник Q , очень близкий к меридиану NS , а потом сломали его в точке M . Однако ясно, что многократно надламывая меридиан NS мы можем свернуть его в кривую, уместяющуюся в (сферическом)

шаре любого наперед заданного диаметра. Поэтому справедливо следующее обобщение теоремы 7.1: *Для любого $\varepsilon > 0$ существует изгибаемый многогранник, лежащий в шаре радиуса ε на трехмерной сфере \mathbb{S}^3 , не сохраняющий в процессе изгиба ни своего объема ни средней кривизны.*

Замечание. Шар радиуса ε трехмерной сферы \mathbb{S}^3 единичного радиуса при уменьшении ε “превращается” в шар радиуса ε евклидова трехмерного пространства. Поэтому обобщение теоремы 7.1, приведенное в предыдущем абзаце, показывает неустойчивость (а тем самым — и нетривиальность) положительного решения гипотезы кузнечных мехов в евклидовом пространстве, данного И. Х. Сабитовым [54], [55], [113]. Другим свидетельством нетривиальности гипотезы кузнечных мехов в евклидовом пространстве служит тот факт, что ее инфинитезимальный аналог не верен [А6].

Замечание. Чтобы сопоставить наши результаты с уже известными, напомним, что А.В.Погореловым в [45] предложено геодезическое отображение $\Omega : \mathbb{S}_+^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, сопоставляющее паре изометричных (во внутренних метриках) поверхностей открытой полусферы \mathbb{S}_+^3 пару изометричных (во внутренних метриках) поверхностей евклидова пространства.

Возникает подозрение, что, отправляясь от семейства R_t изгибаемых многогранников в \mathbb{S}_+^3 , построенного в теореме 7.1, можно с помощью отображения Ω получить семейство изгибаемых подвесок (ведь R_t — подвеска!) в евклидовом пространстве. Последнее противоречило бы известному результату Р.Коннелли, согласно которому подвеска в евклидовом пространстве неизгибаема за исключением явно указанных тривиальных случаев [31].

На самом деле никакого противоречия тут нет, так как семейство подвесок в евклидовом пространстве просто не возникает. В самом деле, для $t_1 \neq t_2$ отображение Ω сопоставит паре P_0, P_{t_1} изометричных многогранников в полусфере пару $X(0, t_1), Y(0, t_1)$ изометричных многогранников в евклидовом пространстве, а паре P_0, P_{t_2} — пару $X(0, t_2), Y(0, t_2)$. При этом подразумевается, что многогранник $Y(0, t_i)$ получен из $X(0, t_i)$ в результате изгиба, однако ниоткуда не следует, что “начальные” многогранники $X(0, t_1)$ и $X(0, t_2)$ изометричны между собой во внутренних метриках.

Наконец, отметим что до сих пор не известен пример изгибаемого многогранника без самопересечений в трехмерном сферическом пространстве или трехмерном пространстве Лобачевского.

Глава 8. Теорема о неявной функции для алгебраических систем уравнений с вырожденным якобианом и ее приложения к изучению изгибаемых многогранников

Изучается вопрос о существовании локальной неявной функции для систем нелинейных алгебраических уравнений в случае, когда определитель матрицы Якоби зануляется в рассматриваемой точке. Найдены как некоторые достаточные условия, гарантирующие существование локальной неявной функции, так и достаточные условия, гарантирующие ее отсутствие. Развита при этом технология применяется для доказательства новых и классических теорем об изгибаемости или жесткости многогранников и каркасов.

Результаты этой главы опубликованы в работах автора [A9] и [A11].

§1. Введение

Пусть $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — дифференцируемое отображение; $t, t_0 \in \mathbb{R}^l$; $X, X_0 \in \mathbb{R}^m$ и пусть $F(t_0, X_0) = 0$. Классическая теорема о неявной функции дает условия, при которых уравнение $F(t, X) = 0$ определяет неявную функцию $X = X(t)$ в некоторой окрестности точки (t_0, X_0) . Главное из этих условий состоит в том, чтобы оператор $F'_X(t_0, X_0)$ был обратим.

Теорема о неявной функции имеет многочисленные приложения и обобщена в самых разных направлениях. Однако автору не удалось разыскать ни один вариант этой теоремы, в котором существование неявной функции гарантировалось бы в случае, когда оператор $F'_X(t_0, X_0)$ не обратим. В настоящей главе мы отчасти восполним этот пробел. (Если быть более точным, то нужно сказать, что после опубликования статей [A9] и [A11]

нам стало известно о существовании работ [105] и [86], где рассматривается вопрос о существовании неявной функции при вырождении производной и даются ссылки на другие работы в этом направлении. Однако сами тексты работ [105] и [86] нам до сих пор недоступны.)

Наши исследования мотивированы изучением изгибаемых многогранников и каркасов. Возникающие при этом отображения F вообще не зависят от параметра t . Именно на этом частном случае мы и сосредоточим свое внимание. Типичной системой нелинейных алгебраических уравнений, к которой применимы наши рассуждения, может служить следующая:

$$\begin{aligned} F_1(t, x_1, x_2, x_3) &\equiv x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0, \\ F_2(t, x_1, x_2, x_3) &\equiv 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 = 0, \\ F_3(t, x_1, x_2, x_3) &\equiv x_1 - 3x_2 + x_3 + 3 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Параметр t в эту систему явным образом не входит. Точка $X_0 = (5, 5, 7)^T$ удовлетворяет системе (1). Определитель матрицы Якоби системы (1) обращается в нуль в точке $X_0 = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\det F'_X(t, X_0) = \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 & -2x_3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & -14 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому классическая теорема о неявной функции не применима. Тем не менее, из излагаемых ниже результатов будет следовать, что решение X_0 системы (1) не является изолированным, а принадлежит непрерывному семейству решений $X = X(t)$, которое и является неявной функцией, определяемой системой (1) и точкой X_0 .

§2. Достаточные условия существования неявной функции

Пусть $X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и пусть $F(X) = (F_1(X), \dots, F_n(X))$, причем каждая из функций F_k ($k = 1, \dots, n$) является многочленом. Не умаляя общности можем считать, что степень каждого многочлена F_k не превосходит 2.

Чтобы пояснить последнее утверждение, допустим, например, что в системе уравнений $F(X) = 0$ каждый из многочленов F_k ($k = 1, \dots, n-1$) имеет степень не выше 2, а многочлен F_n имеет вид $F_n(X) = x_1^2 x_2 - 1$.

Введем новую независимую переменную x_{m+1} и положим $\tilde{X} = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1})$. Введем новые функции $\tilde{F}_n(\tilde{X}) = x_{m+1}x_2 - 1$ и $\tilde{F}_{n+1} = x_{m+1} - x_1^2$ и положим $\tilde{F}(\tilde{X}) = (F_1(X), \dots, F_{n-1}(X), \tilde{F}_n(\tilde{X}), \tilde{F}_{n+1}(\tilde{X}))$. Очевидно, системы уравнений $F(X) = 0$ и $\tilde{F}(\tilde{X}) = 0$ эквивалентны, но каждое уравнение последней системы имеет степень не выше 2.

Итак, без ограничения общности будем считать, что каждый многочлен F_k имеет степень не выше 2. В таком случае F_k может быть записан в виде

$$F_k(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}^k x_i x_j + \sum_{i=1}^m \beta_i^k x_i + \gamma^k,$$

где α_{ij}^k , β_i^k и γ^k — некоторые вещественные числа, причем $\alpha_{ij}^k = \alpha_{ji}^k$.

Известно, что если система полиномиальных уравнений имеет семейство решений, непрерывно зависящее от некоторого параметра, то она имеет также семейство решений, аналитически зависящее от (возможно другого) параметра (см., например, [91] или лемму 18.3 из [122]). Поэтому, допустив, что система уравнений $F(X) = 0$ имеет непрерывное семейство решений $X = X(t) \equiv (x_1(t), \dots, x_m(t))$, мы можем без ограничения общности считать, что это семейство аналитически зависит от параметра t , т. е. разлагается в сходящийся ряд Мак-Лорена:

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k} t^k, \quad x_{i,k} \in \mathbb{R}.$$

Подставив этот ряд в уравнение $F_k(X) = 0$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\alpha_{ij}^k \left(\sum_{p=0}^{\infty} x_{i,p} t^p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} x_{j,q} t^q \right) \right] + \sum_{i=1}^m \beta_i^k \left(\sum_{p=0}^{\infty} x_{i,p} t^p \right) + \gamma^k = 0$$

или

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}^k \sum_{q=0}^p x_{i,q} x_{j,p-q} \right] t^p + \sum_{p=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^m \beta_i^k x_{i,p} t^p \right] + \gamma^k = 0.$$

Трактуя левую часть последнего соотношения как разложение в ряд Мак-Лорена функции, тождественно равной нулю, заключаем, что при каждом $p \geq 1$ коэффициент этого разложения при t^p должен быть равен нулю; т. е.

соотношение

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{q=0}^p \alpha_{ij}^k x_{i,q} x_{j,p-q} + \sum_{i=1}^m \beta_i^k x_{i,p} + \gamma^k = 0 \quad (2)$$

должно быть справедливо для всех $p \geq 1$ и для всех $1 \leq k \leq n$.

Для каждого $p \geq 1$ положим $X_p = (x_{1,p}, x_{2,p}, \dots, x_{m,p}) \in \mathbb{R}^m$. Определим билинейное отображение $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ по правилу: если $X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $Y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, то k -я компонента вектора $B(X, Y)$ равна

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}^k x_i y_j.$$

Определим также линейное отображение $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ по правилу: если $X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, то k -я компонента вектора $A(X)$ равна

$$\sum_{i=1}^m \beta_i^k x_i.$$

Используя эти обозначения, можем переписать формулы (2) в виде

$$\sum_{p=0}^q B(X_p, X_{q-p}) + AX_q = 0.$$

Отсюда вытекает, что если векторы X_0, X_1, \dots, X_{q-1} уже известны, то для нахождения вектора X_q нужно решить следующую систему линейных уравнений

$$B(X_0, X_q) + B(X_q, X_0) + AX_q = - \sum_{p=1}^{q-1} B(X_p, X_{q-p}). \quad (3)$$

Определим линейное отображение $C : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой $CX = B(X_0, X) + B(X, X_0) + AX$. Тогда формулу (3) можно записать короче

$$CX_q = - \sum_{p=1}^{q-1} B(X_p, X_{q-p}). \quad (4)$$

В предшествующем изложении векторы X_p были порождены коэффициентами Мак-Лорена $x_{i,p}$ семейства точных решений системы уравнений

$F(X) = 0$. Теперь мы допустим, что в \mathbb{R}^m нам дан конечный набор векторов Y_0, Y_1, \dots, Y_q . Выражение

$$Y(t) = \sum_{p=0}^q Y_p t^p$$

будем называть *приближенным порядка q решением* полиномиальной системы уравнений $F(X) = 0$, если для каждого $p = 1, 2, \dots, q$ коэффициент при t^p в разложении функции $F(Y(t))$ в ряд Мак-Лорена равен нулю. Из сказанного выше видно, что это условие эквивалентно тому, что для каждого $p = 1, 2, \dots, q$ справедливо соотношение

$$CY_p = - \sum_{l=1}^{p-1} B(Y_l, Y_{p-l}).$$

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие существования неявной функции, определяемой системой алгебраических многочленов.

Теорема 8.1. *Пусть*

$$\sum_{p=0}^q Y_p t^p \tag{5}$$

является приближенным порядка q решением полиномиальной системы уравнений $F(X) = 0$. Пусть существует число k ($0 \leq k < q$) такое, что для всех $i = 1, 2, \dots, q$ и всех $j = k, k + 1, \dots, q$ уравнение

$$CY = -B(Y_i, Y_j) - B(Y_j, Y_i)$$

имеет решение, лежащее в линейной оболочке векторов Y_k, Y_{k+1}, \dots, Y_q . Тогда система уравнений $F(X) = 0$ имеет аналитическое семейство решений $X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} X_p t^p$, начальный отрезок которого совпадает с приближенным решением (5), т. е. такое семейство, что для всех $p = 0, 1, \dots, q$ справедливо равенство $X_p = Y_p$.

Доказательство. Линейную оболочку векторов Y_k, Y_{k+1}, \dots, Y_q обозначим через L .

Символом P обозначим совокупность всех неотрицательных целых чисел p для каждого из которых существует приближенное решение

$$\sum_{l=0}^{q+p} X_l t^l \quad (6)$$

порядка $q + p$ системы $F(X) = 0$ такое, что (i) для всех $l = 0, 1, \dots, q$ справедливо равенство $X_l = Y_l$ и (ii) для каждого $l = q + 1, q + 2, \dots, q + p$ вектор X_l лежит в L .

В силу условий теоремы, $0 \in P$. Поэтому $P \neq \emptyset$. Убедимся, что P совпадает со множеством всех неотрицательных целых чисел \mathbf{N} . Для этого достаточно убедиться, что если $p \in P$, то $p + 1 \in P$.

Итак, пусть $p \in P$ и пусть приближенное решение (6) обладает свойствами (i) и (ii). Чтобы убедиться, что $p + 1 \in P$, достаточно найти вектор $X_{q+p+1} \in L$, удовлетворяющий линейной алгебраической системе уравнений

$$CX_{q+p+1} = - \sum_{l=1}^{q+p} B(X_l, X_{q+p+1-l}). \quad (7)$$

Согласно допущениям (i) и (ii), каждый из векторов X_{q+1}, \dots, X_{q+p} лежит в L , а значит — является линейной комбинацией векторов Y_k, Y_{k+1}, \dots, Y_q . Поэтому правая часть уравнения (7) представляет собой линейную комбинацию векторов $B(Y_i, Y_j) + B(Y_j, Y_i)$, где $1 \leq i \leq q$ и $k \leq j \leq q$. Поэтому, в соответствии с условиями теоремы, система (7) имеет решение, лежащее в L . Значит, $p + 1 \in P$ и $P = \mathbf{N}$.

Таким образом, мы убедились, что система $F(X) = 0$ имеет приближенные решения любого порядка, начальный отрезок каждого из которых совпадает с приближенным решением (5). Осталось убедиться, что из этих приближенных решений сколь угодно высокого порядка можно сконструировать точное решение в форме степенного ряда, начальный отрезок которого совпадает с (5).

Доказательство этого факта основывается на следующей алгебраической теореме М. Артина (см. [68], [69] и [51]): *Для каждой системы полиномиальных уравнений $f(x, y) = 0$, где $f = (f_1, \dots, f_k)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, существует целое число $\beta = \beta(m, n, d, \alpha)$, зависящее от m, n , общей степени d полиномов f и от неотрицательного целого*

α , такое что если система $f(x, y) = 0$ имеет некоторое приближенное порядка β решение $\overline{y(x)}$, то эта система имеет также (точное) решение $y(x)$, которое может быть взято в форме сходящегося степенного ряда, у которого все начальные коэффициенты до порядка α совпадают с соответствующими коэффициентами многочлена $\overline{y(x)}$.

Чтобы завершить доказательство теоремы 8.1, применим теорему Артина к нашей системе $F(X) = 0$ следующим образом: Положим $\alpha = q$ и найдем число β , существование которого гарантируется теоремой Артина. Как мы видели раньше, приближенное решение (5) может быть продолжено в приближенное решение сколь угодно высокого порядка, в том числе и в приближенное решение порядка β . После чего заключение теоремы 8.1 непосредственно следует из теоремы Артина.

Приведем несколько примеров применения теоремы 8.1.

Пример 8.2. Пусть $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ задано формулами (1), а именно пусть

$$F_1(t, x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0,$$

$$F_2(t, x_1, x_2, x_3) \equiv 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 = 0,$$

$$F_3(t, x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 - 3x_2 + x_3 + 3 = 0.$$

и пусть $X_0 = (5, 5, 7)^T$. Прямые вычисления дают:

$$(\alpha_{ij}^1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (\beta_i^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^1 = -1;$$

$$(\alpha_{ij}^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\beta_i^2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \gamma^2 = 1;$$

$$(\alpha_{ij}^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\beta_i^3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^3 = 3;$$

$$B(X, Y) = (x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3, 0, 0)^T;$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 10 & -14 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \det C = 0.$$

Решая однородную систему линейных алгебраических уравнений $CX = 0$ мы видим, что вектор $X_1 = (4, 3, 5)^T$ образует базис в пространстве ее решений. Прямые вычисления показывают, что $B(X_1, X_1) = (0, 0, 0)^T$, а значит мы можем взять $X_q = 0$ для всех $q \geq 2$. Это позволяет нам сослаться на теорему 8.1 при $q = 2$ и $k = 1$ и заключить, что X_0 не является изолированным решением системы $F(X) = 0$. В данном случае однопараметрическое семейство решений, конечно, может быть выписано явно: $X(t) = X_0 + tX_1$. Его геометрический смысл станет очевидным, если мы заметим, что уравнение $F_1(X) = 0$ задает однополостный гиперболоид, а пара линейных уравнений $F_2(X) = F_3(X) = 0$ задает его прямолинейную образующую, проходящую через точку X_0 .

Пример 8.3. Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ задана формулой $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2$ и пусть $X_0 = (0, 0)^T$.

Преобразуем уравнение $f(X) = 0$ в систему уравнений, степень каждого из которых не превосходит 2:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &\equiv x_1x_3 - x_2^2 = 0, \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &\equiv x_1^2 - x_3 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом мы получаем $B(X, Y) = (\frac{1}{2}x_1y_3 - x_2y_2 + \frac{1}{2}x_3y_1, x_1y_1)^T$,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Мы не будем шаг за шагом решать соответствующие уравнения (4), а заметим, что уравнение $f(X) = 0$, очевидно, имеет следующее аналитическое семейство решений $x_1 = t^2$, $x_2 = t^3$. Отсюда непосредственно получаем $X_0 = X_1 = X_5 = X_6 = \dots = (0, 0, 0)^T$, $X_2 = (1, 0, 0)^T$, $X_3 = (0, 1, 0)^T$, $X_4 = (0, 0, 1)^T$. Найдем наименьшие q и k для которых выполняются условия теоремы 8.1.

Прямые вычисления дают:

$$\begin{aligned} B(X_1, X_i) + B(X_i, X_1) &= (0, 0)^T \quad \text{для всех } i \geq 1, \\ B(X_2, X_i) + B(X_i, X_2) &= (0, 0)^T \quad \text{для } i = 3 \text{ и всех } i \geq 5, \\ B(X_3, X_i) + B(X_i, X_3) &= (0, 0)^T \quad \text{для всех } i \geq 4, \\ B(X_4, X_i) + B(X_i, X_4) &= (0, 0)^T \quad \text{для всех } i \geq 4, \\ B(X_2, X_2) &= (0, 1)^T, \quad B(X_3, X_3) = (-1, 0)^T, \end{aligned}$$

$$B(X_2, X_4) + B(X_4, X_2) = (1, 0)^T.$$

Следовательно, условия теоремы 8.1 выполняются при $q = k = 5$, но не выполняются ни при каких меньших значениях q и k . Поэтому на основании теоремы 8.1 мы можем утверждать, что приближенное решение $X_0 + tX_1 + t^2X_2 + t^3X_3 + t^4X_4 + t^5X_5$ может быть продолжено в точное решение системы (8), но мы не можем сделать такого вывода, основываясь только на приближенном решении $X_0 + tX_1 + t^2X_2 + t^3X_3 + t^4X_4$.

Теперь приведем пример алгебраической системы уравнений, имеющей аналитическое семейство решений, которое не может быть получено на основании теоремы 8.1 ни при каких значениях q и k .

Пример 8.4. Пусть отображение $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задано следующими формулами

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &\equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4, \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &\equiv (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1. \end{aligned} \quad (9)$$

и пусть $X_0 = (2, 0, 0)^T$. Прямые вычисления дают:

$$\begin{aligned} (\alpha_{ij}^1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & (\beta_i^1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; & \gamma^1 &= -4; \\ (\alpha_{ij}^2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & (\beta_i^2) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; & \gamma^2 &= 0; \end{aligned}$$

$$B(X, Y) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, x_1y_1 + x_2y_2)^T;$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\text{rank } C = 1$, $\text{im } C = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 | \xi = 2\eta\}$, $\text{ker } C = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 | u = 0\}$ и $\dim \text{ker } C = 2$.

Заметим, что система (9) задает кривую Вивини и допускает следующее аналитическое по параметру семейство решений:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + \cos t, \\ x_2(t) &= \sin t, \\ x_3(t) &= 2 \sin(t/2), \\ X(t) &= (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p. \end{aligned}$$

Ясно, что каждый конечный отрезок последнего ряда является приближенным решением некоторого порядка системы (9). Допустим, что он удовлетворяет условиям теоремы 8.1 с параметрами q и k .

Из доказательства теоремы 8.1 следует, что при $p \geq k$ вектор X_p строится как линейная комбинация решений уравнений

$$CX = -B(X_i, X_j) - B(X_j, X_i)$$

при $1 \leq i \leq q$ и $k \leq j \leq q$. Следовательно, каждый из векторов $B(X_2, X_p) + B(X_p, X_2)$ должен лежать в образе оператора C , т. е. его первая компонента должна быть в 2 раза больше второй. Но это условие, очевидно, не выполняется, т.к. $B(X_2, Y) + B(Y, X_2) = (-y_1, -y_1)^T$, а среди векторов X_p бесконечно много имеют ненулевую первую компоненту.

Таким образом, пример 8.4 показывает, что, вообще говоря, условия теоремы 8.1 не являются необходимыми для существования неявной функции. Это означает, что теорему 8.1 невозможно использовать для доказательства изолированности данного решения алгебраической системы уравнений. В следующем параграфе мы укажем несколько дополнительных условий, при выполнении которых условия теоремы 8.1 будут не только достаточными, но станут и необходимыми для существования аналитического семейства решений системы алгебраических уравнений.

§3. Необходимые условия существования неявной функции

Простейшее необходимое условие существования непрерывного семейства решений известно в теории изгибаний гладких поверхностей по крайней мере со времени работ С. Кон-Фоссена [33]. Для алгебраических систем уравнений оно может быть сформулировано так (мы используем обозначения, введенные в предыдущем параграфе).

Теорема 8.5. *Если система $CX = 0$ имеет только нулевое решение, то система алгебраических уравнений $F(X) = 0$ не имеет непостоянного аналитического семейства решений, представленного в виде суммы сходящегося степенного ряда с заданным свободным членом X_0 .*

Доказательство будем вести от противного. Допустим, что система алгебраических уравнений $F(X) = 0$ имеет непостоянное аналитическое по параметру семейство решений, представленное в виде суммы сходящегося

степенного ряда

$$X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p$$

и пусть q является наименьшим положительным числом, для которого $X_q \neq 0$. Согласно (4), вектор X_q должен удовлетворять линейной алгебраической системе

$$CX_q = - \sum_{p=1}^{q-1} B(X_p, X_{q-p}) = 0,$$

которая, согласно условиям теоремы, может иметь только нулевое решение. Значит $X_q = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 8.5.

В теории изгибаний гладких поверхностей известны и более продвинутое необходимые условия (см., например, [81], [20]). Соответствующий алгебраический вариант приведем в следующей теореме.

Теорема 8.6. *Если система алгебраических уравнений $F(X) = 0$ и вектор X_0 таковы, что никакое ее приближенное решение первого порядка $X_0 + tX_1$ с $X_1 \neq 0$ не может быть продолжено в приближенное решение второго порядка, то система $F(X) = 0$ не имеет непостоянного аналитического семейства решений, представленного в виде суммы сходящегося степенного ряда со свободным членом X_0 .*

Доказательство снова будем вести от противного. Допустим, что система алгебраических уравнений $F(X) = 0$ имеет непостоянное аналитическое по параметру семейство решений, представленное в виде суммы сходящегося степенного ряда

$$X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p$$

и пусть q является наименьшим положительным числом, для которого $X_q \neq 0$. Вектор X_q лежит в ядре оператора C , а значит, ввиду условий теоремы, вектор $B(X_q, X_q)$ не лежит в образе оператора C . Согласно (4), вектор X_{2q} должен удовлетворять линейной алгебраической системе

уравнений

$$CX_{2q} = - \sum_{p=1}^{2q-1} B(X_p, X_{2q-p}) = -B(X_q, X_q).$$

Поскольку вектор $B(X_q, X_q)$ не лежит в образе оператора C , то последняя система решения не имеет. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 8.6.

Перейдем к обсуждению дополнительных условий, при выполнении которых условия теоремы 8.1 будут не только достаточными, но станут и необходимыми для существования аналитического семейства решений системы алгебраических уравнений. Полученные на этом пути результаты будут в определенном смысле обобщать теоремы 8.5 и 8.6. Прежде всего изучим ситуацию, когда в последовательности X_1, X_2, \dots, X_q , состоящей из коэффициентов приближенных решений, мало линейно независимых векторов.

Теорема 8.7. Пусть система алгебраических уравнений $F(X) = 0$ имеет аналитическое семейство решений, представленное в виде суммы сходящегося степенного ряда

$$X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p,$$

причем векторы X_3 и X_4 содержатся в линейной оболочке векторов X_1 и X_2 . Тогда для всех $1 \leq i, j \leq 2$ система уравнений

$$CX = -B(X_i, X_j) - B(X_j, X_i)$$

имеет решение, лежащее в линейной оболочке векторов X_1 и X_2 .

Доказательство. Векторы X_1, X_2, X_3 и X_4 удовлетворяют следующим уравнениям

$$\begin{aligned} CX_1 &= 0, \\ CX_2 &= -B(X_1, X_1), \\ CX_3 &= -B(X_1, X_2) - B(X_2, X_1), \\ CX_4 &= -B(X_1, X_3) - B(X_2, X_2) - B(X_3, X_1). \end{aligned}$$

Линейную оболочку векторов X_1 и X_2 обозначим через L . Из второго уравнения непосредственно получаем $B(X_1, X_1) \in CL$. Поскольку $X_3 \in L$, то из третьего уравнения мы также непосредственно получаем $B(X_1, X_2) +$

$B(X_2, X_1) \in CL$. Наконец, поскольку $X_3 \in L$, то найдутся числа c_3^1 и c_3^2 такие, что $X_3 = c_3^1 X_1 + c_3^2 X_2$. Поэтому четвертое уравнение может быть переписано в виде $CX_4 = -2c_3^1 B(X_1, X_1) - c_3^2 [B(X_1, X_2) + B(X_2, X_1)] - B(X_2, X_2)$. Вектор CX_4 принадлежит CL согласно условиям теоремы, а векторы $B(X_1, X_1)$ и $B(X_1, X_2) + B(X_2, X_1)$ принадлежат CL согласно доказанному ранее. Поэтому $B(X_2, X_2) \in CL$. Теорема 8.7 доказана.

Теорема 8.8. Пусть система алгебраических уравнений $F(X) = 0$ имеет аналитическое семейство решений, представленное в виде суммы сходящегося степенного ряда

$$X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p,$$

причем векторы X_4, X_5, X_6 и X_7 содержатся в линейной оболочке векторов X_1, X_2 и X_3 . Тогда для всех $1 \leq i, j \leq 3$ система уравнений

$$CX = -B(X_i, X_j) - B(X_j, X_i)$$

имеет решение, лежащее в линейной оболочке векторов X_1, X_2 и X_3 .

Доказательство. Фиксируем произвольное $\alpha \in \mathbf{R}$ и сделаем замену переменной $t = \tau + \alpha\tau^2$ в решении $X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p : Y(\tau) \equiv X(\tau + \alpha\tau^2) =$

$\sum_{p=0}^{\infty} \tau^p Y_p$. Очевидно, $Y(\tau)$ является аналитическим семейством решений уравнения $F(Y) = 0$ и поэтому при каждом $q \geq 1$ выполняется равенство

$$CY_q = -\sum_{p=1}^{q-1} B(Y_p, Y_{q-p}). \quad (10)$$

С другой стороны, векторы Y_p могут быть выражены через X_i перегруппировкой членов в выражении

$$\sum_{p=0}^{\infty} \tau^p Y_p = \sum_{p=0}^{\infty} (\tau + \alpha\tau^2)^p Y_p.$$

Это дает

$$\begin{aligned} Y_0 &= X_0; \\ Y_1 &= X_1; \end{aligned} \quad (11)$$

$$Y_2 = X_2 + \alpha X_1; \quad (12)$$

$$Y_3 = X_3 + 2\alpha X_2; \quad (13)$$

$$Y_4 = X_4 + 3\alpha X_3 + \alpha^2 X_2; \quad (14)$$

$$Y_5 = X_5 + 4\alpha X_4 + 3\alpha^2 X_3; \quad (15)$$

$$Y_6 = X_6 + 5\alpha X_5 + 6\alpha^2 X_4 + \alpha^3 X_3. \quad (16)$$

Согласно условиям теоремы, каждый из векторов X_4 , X_5 и X_6 принадлежит линейной оболочке векторов X_1 , X_2 и X_3 , а значит — найдутся числа c_j^i , $1 \leq i \leq 3$, $4 \leq j \leq 6$ такие, что $X_j = c_j^1 X_1 + c_j^2 X_2 + c_j^3 X_3$ для каждого $4 \leq j \leq 6$. С учетом этих равенств формулы (14)–(16) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} Y_4 &= (c_4^3 + 3\alpha)X_3 + (c_4^2 + \alpha^2)X_2 + c_4^1 X_1, \\ Y_5 &= (c_5^3 + 4\alpha c_4^3 + 3\alpha^2)X_3 + (c_5^2 + 4\alpha c_4^2)X_2 + (c_5^1 + 4\alpha c_4^1)X_1, \\ Y_6 &= (c_6^3 + 5\alpha c_5^3 + 6\alpha^2 c_4^3 + \alpha^3)X_3 + (c_6^2 + 5\alpha c_5^2 + 6\alpha^2 c_4^2)X_2 \\ &\quad + (c_6^1 + 5\alpha c_5^1 + 6\alpha^2 c_4^1)X_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Линейную оболочку векторов X_1 , X_2 и X_3 обозначим через L .

При $q = 2$ уравнение (10) принимает вид $CY_2 = -B(Y_1, Y_1)$ или, с учетом (11) и (12), $CX_2 + \alpha CX_1 = -B(X_1, X_1)$. Откуда непосредственно вытекает $B(X_1, X_1) \in CL$.

При $q = 3$ уравнение (10) принимает вид $CY_3 = -B(Y_1, Y_2) - B(Y_2, Y_1)$ или, с учетом (12) и (13), $CX_3 + 2\alpha CX_2 = -2\alpha B(X_1, X_1) - [B(X_1, X_2) + B(X_2, X_1)]$. Откуда непосредственно вытекает $B(X_1, X_2) + B(X_2, X_1) \in CL$.

При $q = 4$ уравнение (10) принимает вид $CY_4 = -B(Y_1, Y_3) - B(Y_2, Y_2) - B(Y_3, Y_1)$ или, с учетом (14) и (17), $(c_4^3 + 3\alpha)CX_3 + (c_4^2 + \alpha^2)CX_2 + c_4^1 CX_1 = -\alpha^2 B(X_1, X_1) - 3\alpha[B(X_1, X_2) + B(X_2, X_1)] - [B(X_1, X_3) + B(X_3, X_1)] - B(X_2, X_2)$. Откуда с учетом уже доказанного вытекает

$$[B(X_1, X_2) + B(X_2, X_1)] + B(X_2, X_2) \in CL. \quad (18)$$

Аналогично, из уравнения (10) при $q = 5$ мы получаем

$$[B(X_1, X_3) + B(X_3, X_1)] + [B(X_2, X_3) + B(X_3, X_2)] \in CL, \quad (19)$$

при $q = 6$ получаем

$$\begin{aligned} & (c_5^3 + 4\alpha c_4^3 + 3\alpha^2)[B(X_1, X_3) + B(X_3, X_1)] \\ & + (2c_4^2 - 10\alpha^2 - 4\alpha c_4^3)B(X_2, X_2) \\ & + (c_4^3 + 3\alpha)[B(X_2, X_3) + B(X_3, X_2)] \in CL, \end{aligned} \quad (20)$$

наконец, при $q = 7$ получаем

$$\begin{aligned} & (c_4^1 - \alpha c_4^2 + 6\alpha^4 + c_6^3 + 5\alpha c_5^3 + 8\alpha^2 c_4^3)[B(X_1, X_3) + B(X_3, X_1)] \\ & + (c_5^2 + 4\alpha c_4^2 - 2\alpha c_5^3 + 8\alpha^2 c_4^3 - 6\alpha^3)B(X_2, X_2) \\ & + (c_5^3 + 2\alpha c_4^3 + c_4^2 + 4\alpha^2)[B(X_2, X_3) + B(X_3, X_2)] \\ & + (c_4^3 + 3\alpha)B(X_3, X_3) \in CL. \end{aligned} \quad (21)$$

Соотношения (18)–(21) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно четырех векторных неизвестных $B(X_1, X_3) + B(X_3, X_1)$, $B(X_2, X_2)$, $B(X_2, X_3) + B(X_3, X_2)$ и $B(X_3, X_3)$. Правые части этих уравнений являются некоторыми векторами U_1, U_2, U_3, U_4 из CL . Если определитель этой системы отличен от нуля, то каждая из четырех векторных неизвестных окажется линейной комбинацией векторов U_1, U_2, U_3 и U_4 , а значит — будет лежать в CL .

Прямые вычисления показывают, что определитель системы (18)–(21) равен

$$\begin{aligned} & -6\alpha^4 + 18\alpha^3 + 20\alpha^2 c_4^3 + \alpha[2c_4^2 + (c_4^3)^2 - c_5^3] \\ & + [-c_4^1 + c_5^2 - c_4^2 c_4^3 - (c_4^3)^2 + 2c_4^3 c_5^3 - c_6^3]. \end{aligned}$$

Этот многочлен от α не равен нулю тождественно ни при каких значениях коэффициентов c_j^i разложения векторов X_4, X_5, X_6 по векторам X_1, X_2, X_3 . Поэтому, выбрав подходящее значение α , мы можем добиться того, чтобы определитель системы, соответствующей (18)–(21) был отличен от нуля. Из этого, как было сказано выше, следует заключение теоремы 8.8.

Приведенный выше пример 8.4 показывает, что в случае когда четыре вектора X_1, X_2, X_3 и X_4 являются линейно независимыми, может оказаться, что некоторые из векторов $B(X_i, X_j) + B(X_j, X_i)$ не лежат в образе оператора C , но система $F(X) = 0$ определяет неявную функцию. Это означает, что прямого аналога теорем 8.7 и 8.8 не существует уже для случая, когда четыре вектора X_1, X_2, X_3 и X_4 являются линейно независимыми.

Это обстоятельство, безусловно затрудняет доказательство того факта, что данная система уравнений $F(X) = 0$ не имеет аналитического семейства решений. Но имеются еще и другие причины, не позволяющие делать такие заключения. Одна из них носит чисто технический характер и состоит в быстром разрастании объема вычислений: если, изучая возможность продолжения приближенного решения первого порядка $X_0 + tX_1$ в приближенное решение второго порядка, мы нашли одно такое продолжение $X_0 + tX_1 + t^2X_2$, то при любом $\tilde{X} \in \ker C$ выражение $X_0 + tX_1 + t^2(X_2 + \tilde{X})$ также будет приближенным решением второго порядка и мы вынуждены изучать вопрос о продолжении в приближенное решение третьего порядка не для одного приближенного решения второго порядка, а для целого семейства таких решений. Другая причина носит более принципиальный характер. Допустим, мы сумели пробиться через вышеописанные разрастающиеся вычисления и нашли число N такое, что никаким способом нельзя продолжить никакое приближенное решение первого порядка $X_0 + tX_1$, $X_1 \in \ker C$, $X_1 \neq 0$, хоть в какое-нибудь приближенное решение порядка N . Означает ли это, что система $F(X) = 0$ не определяет неявной функции в окрестности точки X_0 ? Нет! Мы должны убедиться в невозможности продолжения и такого $X_0 + t \cdot 0 + t^2X_1$, и такого $X_0 + t \cdot 0 + t^2 \cdot 0 + t^3X_1$ и всех прочих приближенных решений, начинающихся с нулей, где $X_1 \in \ker C$, $X_1 \neq 0$. Пример 8.3 показывает, что у (точного) решения системы $F(X) = 0$ действительно несколько первых коэффициентов X_p могут обращаться в ноль. Вместе с тем у нас нет оценки того, сколько именно нулей может встретиться среди начальных членов тейлоровского разложения неявной функции, определяемой данным уравнением. Поэтому мы вынуждены проверять бесконечное число возможностей, происходящих от “дописывани нулей” в начальных членах приближенного решения. Значит, в общем случае у нас нет конечного алгоритма, гарантирующего отсутствие неявной функции.

Ниже мы покажем, что в случае $\dim \ker C = 1$ такой алгоритм все же существует. Прежде всего уточним терминологию. По-прежнему будем считать, что нам дана алгебраическая система уравнений $F(X) = 0$, каждое из которых имеет степень не выше 2, и по которой построены билинейный оператор B и линейный оператор C . Допустим, что $\dim \ker C = 1$. В

области определения оператора C фиксируем произвольное подпространство T коразмерности 1 такое, что $T \cap \ker C = \{0\}$. Формальный степенной ряд $X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p$ мы будем называть T -стандартным формальным решением системы $F(X) = 0$, если выполняются следующие условия:

- 1) для каждого $q \geq 1$ справедливо равенство $CX_q = -\sum_{p=1}^{q-1} B(X_p, X_{q-p})$;
- 2) $X_1 \neq 0$;
- 3) $X_p \in T$ для каждого $p \geq 2$.

Ключевую роль в нашем подходе играет следующая

Теорема 8.9. *Если система $F(X) = 0$ имеет (точное) непостоянное решение в форме сходящегося степенного ряда $X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p$ и $\dim \ker C = 1$, то, для любого подпространства T коразмерности 1 такого, что $T \cap \ker C = \{0\}$, система $F(X) = 0$ имеет также и T -стандартное формальное решение $Y(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p Y_p$ такое, что $Y_0 = X_0$.*

Чтобы не прерывать изложения, доказательство этой теоремы будет приведено в конце настоящего параграфа.

Коэффициенты Y_p T -стандартного формального решения системы $F(X) = 0$ находятся последовательно как решения линейной системы алгебраических уравнений $CY_p = -\sum_{l=1}^{p-1} B(Y_l, Y_{p-l})$. При этом если решение имеется, то оно единственно ввиду требования $Y_p \in T$ (а значит, не происходит разрастания объема вычислений). Если же при некотором p решение Y_p не существует, то не существует и T -стандартного формального решения системы $F(X) = 0$. В силу теоремы 8.9 это означает, что у системы $F(X) = 0$ не существует и (точного) непостоянного решения в форме сходящегося степенного ряда (с любым количеством нулевых начальных коэффициентов). Таким образом мы получили алгоритм, который в некоторых случаях после конечного числа шагов гарантирует нам отсутствие неявной функции, определяемой системой $F(X) = 0$ в окрестности точки X_0 . Приведем простейший пример работы предложенного алгоритма.

Пример 8.10. Пусть отображение $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ задано следующими формулами

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &\equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4, \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &\equiv (x_1 - 3)^2 + x_2^2 - 1, \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &\equiv x_2, \end{aligned}$$

и пусть $X_0 = (2, 0, 0)^T$. Ясно, что уравнение $F_1 = 0$ определяет сферу в \mathbb{R}^3 , а уравнение $F_2 = 0$ определяет цилиндр, имеющий со сферой лишь одну общую точку X_0 . Поэтому система уравнений $F(X) = 0$ неявной функции не определяет. Покажем как можно прийти к этому же выводу опираясь на теорему 8.9.

Прямые вычисления дают:

$$(\alpha_{ij}^1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (\beta_i^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^1 = -4;$$

$$(\alpha_{ij}^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\beta_i^2) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^2 = -1;$$

$$(\alpha_{ij}^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\beta_i^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^3 = 0;$$

$$B(X, Y) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, x_1y_1 + x_2y_2, 0)^T;$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\text{rank } C = 2$, $\text{im } C = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 | \xi = 2\eta\}$, $\ker C = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 | u = v = 0\}$, $\dim \ker C = 1$, $X_1 = (0, 0, 1)$ и $B(X_1, X_1) = (1, 0, 0)^T \notin \text{im } C$.

Последнее означает, что приближенное решение $X_0 + tX_1$ не может быть продолжено в приближенное решение второго порядка. Значит не существует и T -стандартного формального решения системы $F(X) = 0$. В силу теоремы 8.9 это означает, что система $F(X) = 0$ не определяет неявной функции в окрестности точки X_0 .

Доказательство теоремы 8.9. Обозначим через N наименьший положительный номер p для которого $X_p \neq 0$ и через q — наибольшее число при котором (точное) непостоянное решение системы $F(X) = 0$, данное нам согласно условиям теоремы в форме сходящегося степенного ряда $X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p$, обладает свойствами (i) $X_p = 0$ для всех $0 < p \leq q$, $p \neq 0 \pmod{N}$ и (ii) $X_p \in T$ для всех $0 < p \leq q$, $p \neq N$, $p = 0 \pmod{N}$.

Убедимся, что можно сделать полиномиальную замену переменной $t = t(\tau)$ так, что новое (точное) непостоянное решение $\tilde{X}(\tau) \equiv X(t(\tau))$ системы $F(X) = 0$, данное нам в форме сходящегося степенного ряда $\tilde{X}(\tau) = \sum_{p=0}^{\infty} \tau^p \tilde{X}_p$, обладает свойствами (i) и (ii) для числа $q+1$ и, является таким, что $\tilde{X}_0 = X_0$, $\tilde{X}_N = X_N$.

Другими словами, мы собираемся убедиться, что заменами переменной t можно последовательно занулять коэффициенты X_p с номерами, не кратными N и превращать их в векторы, лежащие в T , если p кратно N , не изменяя при этом X_0 и X_N и получая после такого преобразования опять (точное) непостоянное решение в форме сходящегося степенного ряда. Совершив бесконечно много таких полиномиальных замен переменной t , и не следя за радиусами сходимости получающихся по ходу дела рядов, мы получим формальный степенной ряд $Z(\tau) = \sum_{p=0}^{\infty} \tau^p Z_p$ коэффициенты которого Z_p , $p = 0, 1, \dots$, обладают следующими свойствами:

- (a) $Z_0 = X_0$;
- (b) $Z_p = 0$ для всех $p \neq 0 \pmod{N}$;
- (c) $Z_N = X_N \neq 0$;
- (d) $Z_p \in T$ для всех $p > 0$, $p = 0 \pmod{N}$;
- (e) для каждого $q \geq 1$ справедливо равенство $CZ_q = - \sum_{p=1}^{q-1} B(Z_p, Z_{q-p})$.

Наконец, сделав в формальном степенном ряду $Z(\tau)$ замену переменной $t = \tau^N$, мы получим T -стандартное формальное решение $Y(t)$, существование которого и утверждает теорема 8.9.

Итак, для завершения доказательства теоремы 8.9 нам необходимо обосновать возможность описанного выше перехода от решения $X(t)$, обладающего свойствами (i) и (ii) для q к решению $\tilde{X}(\tau)$ обладающего свойствами (i) и (ii) для $q+1$ и такого, что $\tilde{X}_0 = X_0$, $\tilde{X}_N = X_N$.

Пусть $q = iN + j$, где $0 \leq j \leq N - 1$. Сделаем замену переменной $t = \tau + \alpha\tau^{q+1-N}$ (здесь τ — новая переменная, а α — постоянная, значение которой будет уточнено ниже):

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\tau) &= X(\tau + \alpha\tau^{q+1-N}) \\ &= X_0 + (\tau + \alpha\tau^{q+1-N})^N X_N + (\tau + \alpha\tau^{q+1-N})^{2N} X_{2N} + \dots \\ &\quad + (\tau + \alpha\tau^{q+1-N})^{iN} X_{iN} + (\tau + \alpha\tau^{q+1-N})^{iN+j} X_{iN+j} + \dots \\ &= X_0 + \tau^N X_N + \tau^{2N} X_{2N} + \dots + \tau^{iN} X_{iN} + \tau^q (X_q + N\alpha X_N) + \dots.\end{aligned}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $0 < j \leq N - 1$. Как известно, вектор X_p находится из системы линейных алгебраических уравнений

$$CX_q = - \sum_{r=1}^{iN+j} B(X_r, X_{iN+j-r}). \quad (22)$$

Если $r = 0 \pmod{N}$, то $iN + j - r = j \pmod{N}$ и, в частности, $iN + j - r \neq 0 \pmod{N}$. Значит, при любом $1 \leq r \leq iN + j - 1$ хотя бы один из двух векторов X_r , X_{iN+j-r} равен нулю. Поэтому правая часть равенства (22) равна нулю и $X_q \in \ker C$. С другой стороны, $X_N \in \ker C$ и $\dim \ker C = 1$. Значит векторы X_q и X_N пропорциональны. А поскольку $X_N \neq 0$, то найдется число α такое, что $X_q + \alpha N X_N = 0$. При таком выборе α (точное) решение $\tilde{X}(\tau) = X(\tau + \alpha\tau^{q+1-N})$ и будет обладать свойствами (i) и (ii) для числа $q+1$ и для него будут справедливы равенства $\tilde{X}_0 = X_0$ и $\tilde{X}_N = X_N$.

Теперь рассмотрим случай, когда $j = 0$. В этом случае, если $r = sN$ ($0 \leq s \leq i$), то $iN + j - r = (i - s)N$. Значит, уравнение (22) может быть переписано в виде

$$CX_q = - \sum_{s=1}^i B(X_{sN}, X_{(i-s)N}).$$

Правая часть последнего выражения, вообще говоря, не равна нулю. Поэтому X_q , вообще говоря, не лежит в $\ker C$. Но пользуясь тем, что линейная оболочка подпространств T и $\ker C$ совпадает со всем пространством,

мы можем найти такое α , что $X_q + \alpha NX_N \in T$. При таком выборе α (точное) решение $\tilde{X}(\tau) = X(\tau + \alpha\tau^{q+1-N})$ и будет обладать свойствами (i) и (ii) для числа $q + 1$ и для него будут справедливы равенства $\tilde{X}_0 = X_0$ и $\tilde{X}_N = X_N$.

Тем самым доказана возможность перехода от $X(t)$ к $\tilde{X}(\tau)$ с соблюдением свойств (i), (ii), и $\tilde{X}_0 = X_0$, $\tilde{X}_N = X_N$. Это и завершает доказательство теоремы 8.9.

§4. Применения к изучению изгибаемых многогранников и каркасов

Пусть K — симплициальный комплекс, тело которого является $(n - 1)$ -мерным связным компактным топологическим многообразием без края. Многогранником в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n называется непрерывное отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$, линейное на каждом симплексе. Если тело комплекса K гомеоморфно сфере, то многогранник $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ называют *многогранной сферой* в \mathbb{R}^n .

Говорят, что многогранник не имеет самопересечений, если отображение f глобально инъективно. Вообще говоря, в настоящей статье мы работаем с многогранниками, имеющими самопересечения.

Многогранник $P = f(K)$ называется *изгибаемым*, если существует аналитическое по параметру семейство многогранников $P_t = (f_t, K)$, $0 \leq t \leq 1$, такое что

- 1) $P = P_0$;
- 2) для любых 0-мерных симплексов v_j, v_k комплекса K , принадлежащих некоторому его 1-мерному симплексу, равенство $|f(v_j) - f(v_k)| = |f_t(v_j) - f_t(v_k)|$ справедливо для всех $0 \leq t \leq 1$ (здесь и далее $|y|$ обозначает евклидову норму вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, т. е. $|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$);
- 3) найдутся два 0-мерных симплекса v_j, v_k комплекса K , не принадлежащих никакому его 1-мерному симплексу, для которых выражение $|f_t(v_j) - f_t(v_k)|$ не постоянно по t на отрезке $[0, 1]$.

Семейство P_t , обладающее свойствами 1)–3), называется *нетривиальным изгибанием* многогранника P . Подчеркнем, что в процессе изгибания комплекс K остается неизменным.

Другими словами, многогранник называется изгибаемым, если его пространственную форму можно изменять аналитически по параметру (см. условие 3)), не изменяя его внутренней метрики (см. условие 2)). Впрочем, требование аналитической зависимости от параметра можно существенно ослабить. А именно, в [91] показано, что если существует непрерывная по параметру деформация многогранника, обладающая свойствами 1)–3), то существует также и аналитически зависящая от (возможно другого) параметра его деформация, обладающая свойствами 1)–3).

За последние 25 лет в теории изгибаемых многогранников получено два замечательных результата: в 1977 году Р. Коннелли построил пример изгибаемой многогранной сферы в \mathbb{R}^3 , не имеющей самопересечений [79], а в 1996 году И. Х. Сабитов опубликовал полное доказательство того, что любой изгибаемый многогранник (даже с самопересечениями) в \mathbb{R}^3 сохраняет ограничиваемый им (ориентированный) объем в процессе изгибания [54]. Последнее утверждение несколько десятилетий было известно как “гипотеза кузнечных мехов”. Другие его доказательства даны в [83], [55] и [113].

Нас интересует вопрос о том, является ли данный многогранник $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ изгибаемым или нет. Изгибание $f_t : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ многогранника достаточно задавать на его 0-мерных симплексах v_j ($1 \leq j \leq N$): $x_j(t) = f_t(v_j) \in \mathbb{R}^n$. При этом свойства 1)–3) переформулируются следующим образом: 1') векторы $x_j(0)$ принимают заранее заданные значения; 2') если 0-мерные симплексы v_i и v_j соединены 1-мерным симплексом в K , то равенство $|x_i(t) - x_j(t)|^2 = |x_i(0) - x_j(0)|^2$ справедливо для всех $0 \leq t \leq 1$; 3') найдутся 0-мерные симплексы v_i и v_j , не соединенные 1-мерным симплексом в K , такие, что выражение $|x_i(t) - x_j(t)|^2$ не постоянно по t на отрезке $[0, 1]$.

Другими словами, вопрос об изгибаемости данного многогранника эквивалентен вопросу о том является ли набор векторов $x_j = x_j(0)$, $j = 1, 2, \dots, N$ изолированным решением алгебраической системы уравнений

$$|x_i - x_j|^2 = |x_i(0) - x_j(0)|^2 \quad (23)$$

или же эта система определяет неявную функцию $x_j = x_j(t)$ в окрестности точки $x_j = x_j(0)$, $j = 1, 2, \dots, N$. Правда, при этом мы не интересуемся движениями $f(K)$ как твердого тела в \mathbb{R}^n , т. е. мы интересуемся лишь решениями, обладающими свойствами 3) или 3'). Это требование легко соблюсти, если, выбрав один $(n - 1)$ -мерный симплекс комплекса K и считая что он содержит 0-мерные симплексы v_1, v_2, \dots, v_n , условиться, что вершина $f_t(v_1)$ в процессе деформации многогранника всегда находится в начале координат (а значит всегда имеет только нулевые координаты), вершина $f_t(v_2)$ всегда находится на первой оси в пространстве \mathbb{R}^n (а значит все ее координаты, кроме первой, всегда равны нулю), вершина $f_t(v_3)$ всегда лежит в двумерной плоскости, натянутой на первую и вторую оси пространства \mathbb{R}^n (а значит все ее координаты, кроме первой и второй, всегда равны нулю) и т.д. Это обстоятельство уменьшает количество независимых переменных в уравнении (23), но не препятствует описанному выше сведению задачи об изгибаемости данного многогранника к задаче о том является ли данное решение системы алгебраических уравнений изолированным или же данная система определяет неявную функцию в окрестности этого решения.

Аналогичным образом может быть переформулирована и задача об изгибаемости каркаса в \mathbb{R}^n .

Каркасом в \mathbb{R}^n называется связный граф вершинами которого являются точки в \mathbb{R}^n , а ребрами — прямолинейные отрезки, соединяющие некоторые вершины друг с другом. При этом вершины принято называть *шарнирами*, а отрезки, их соединяющие, — *стержнями*. Типичным примером каркаса может служить совокупность 0-мерных и 1-мерных граней некоторого многогранника в \mathbb{R}^n .

Каркас в \mathbb{R}^n называется *изгибаемым*, если он допускает нетривиальные аналитические деформации, т. е. если положения его шарниров могут быть аналитическим образом изменяемы в \mathbb{R}^n так, что длины всех стержней будут оставаться постоянными и, вместе с тем, расстояние между некоторыми двумя (не соединенными стержнем) шарнирами будет изменяться.

Некоторые авторы рассматривают также так называемые *каркасы с закрепленными шарнирами*, т. е. такие каркасы, у которых пространственное положение некоторых шарниров фиксировано и не должно изменяться в процессе деформации.

Как было сказано выше, каждому многограннику может быть сопоставлен некоторый каркас, образованный совокупностью его 0-мерных и 1-мерных граней. Этот каркас иногда называют *одномерным скелетом* многогранника. При этом многогранник является изгибаемым если и только если его одномерный скелет является изгибаемым (все дело в том, что, согласно нашему определению, все грани многогранника — симплексы). Таким образом, задача о том является данный многогранник изгибаемым или нет представляет собой частный случай задачи о том является данный каркас изгибаемым или нет. Поэтому мы сосредоточим свое внимание на решении последней задачи.

Пространственное положение каркаса задается указанием положений его шарниров $x_i(0) \in \mathbb{R}^n$. Вопрос о том является ли данный каркас изгибаемым, очевидно эквивалентен вопросу о том является ли набор векторов $x_i(0)$ изолированным решением системы (23) или эта система определяет неявную функцию $x_i = x_i(t)$ в окрестности набора векторов $x_i(0)$. При этом надо, конечно, позаботиться об исключении тривиальных деформаций, при которых весь каркас движется как твердое тело. Это может быть сделано также как это было сделано выше для многогранников. Для каркасов с закрепленными шарнирами эта проблема зачастую совсем не возникает, поскольку они часто вообще не допускают тривиальных деформаций.

В параграфе 2 мы ввели понятие приближенного порядка q решения алгебраической системы уравнений. Применительно к системе (23), порожденной каркасом, для обозначения этого понятия традиционно используют термин “бесконечно малое изгибание порядка q ”. Более точно: Пусть нам известно положение шарниров $x_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, N$ некоторого каркаса в \mathbb{R}^n . Набор векторов $x_{i,p}$, $i = 1, 2, \dots, N$, $p = 1, 2, \dots, q$ называется *бесконечно малым изгибанием порядка q* этого каркаса, если

$$\left| \sum_{p=1}^q x_{i,p} t^p - \sum_{p=1}^q x_{j,p} t^p \right| = 0 \pmod{t^q}$$

для всех номеров i и j для которых шарниры $x_i(0)$ и $x_j(0)$ соединены стержнем. Бесконечно малое изгибание называется *тривиальным*, если оно представляет собой начальную часть тейлоровского разложения траекторий векторов $x_i(0)$ под действием некоторой однопараметрической группы изометрий пространства \mathbf{R}^n .

Каркас называется *изгибаемым порядка q* , если у него имеется нетривиальное бесконечно малое изгибание порядка q . В противном случае он называется *жестким порядка q* .

Следующая теорема показывает, что если каркас допускает “регулярное” бесконечно малое изгибание достаточно высокого порядка, то он является изгибаемым.

Теорема 8.11. Пусть каркас P является изгибаемым порядка q , причем $\sum_{p=0}^q X_p t^p$ является нетривиальным бесконечно малым изгибанием порядка q . Пусть операторы B и C построены по системе (23), соответствующей каркасу P , причем пусть существует число k ($0 \leq k < q$) такое, что для всех $i = 1, 2, \dots, q$ и всех $j = k, k + 1, \dots, q$ уравнение

$$CX = -B(X_i, X_j) - B(X_j, X_i)$$

имеет решение, лежащее в линейной оболочке векторов X_k, X_{k+1}, \dots, X_q . Тогда каркас P является изгибаемым.

Доказательство теоремы 8.11 непосредственно следует из теоремы 8.1.

Все изгибаемые октаэдры были расклассифицированы Р. Брикаром в [73] (см. также [51]). В статье [A10] (в несколько иных обозначениях) показано, что условия теоремы 8.11 соблюдаются для одномерного скелета октаэдра Брикара первого типа при $q = 5$ и $k = 1$.

Идея использования жесткости (какого-то порядка) каркаса для доказательства его неизгибаемости эксплуатируется очень давно и основывается, прежде всего, на следующем хорошо известном утверждении

Теорема 8.12. Если каркас в \mathbb{R}^n является жестким первого порядка, то он является неизгибаемым.

Доказательство теоремы 8.12 немедленно вытекает из теоремы 8.5 и описанного выше сведения задачи об изгибаемости каркаса к задаче том определяет ли система уравнений (23) неявную функцию или ее решение $x_j = x_j(0)$, $j = 1, \dots, N$ является изолированным.

Теорема 8.12 служит одним из краеугольных камней в вопросах существования и единственности выпуклых многогранников при том способе изложения, который принят в классической книге [2]. Из недавних работ, использующих теорему 8.12, отметим статьи Х. Маехары [101] и [102], в которых доказано что на плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве существуют неизгибаемые каркасы, у которых все стержни имеют длину 1 и которые не содержат ни одного треугольника, образованного стержнями. Другие утверждения о взаимосвязи понятий изгибаемости и наличия нетривиальных бесконечно малых изгибаний см., например, в [71], [85], [100], [123], [124], [125], [126].

Следующее утверждение, по-видимому, впервые было доказано (другими методами) в [81].

Теорема 8.13. *Если каркас в \mathbb{R}^n является жестким второго порядка, то он является неизгибаемым.*

Доказательство теоремы 8.13 немедленно вытекает из теоремы 8.6.

Основным результатом настоящего параграфа является следующее (ранее не известное) обобщение теорем 8.12 и 8.13.

Теорема 18.14. *Пусть каркас K в \mathbb{R}^n имеет одно нетривиальное линейно независимое бесконечно малое изгибание первого порядка и пусть существует число $q \geq 2$ для которого K является жестким порядка q . Тогда K является неизгибаемым.*

Доказательство. Избавимся от тривиальных изгибаний как это было объяснено выше. Тогда ядро оператора C , построенного по системе (23), имеет размерность 1. Пусть $T = (\ker C)^\perp$. Согласно теореме 8.6, система (23) имеет T -стандартное формальное решение $Y(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} Y_p t^p$ такое, что $Y_0 = K$ и $K + Y_1 t$ является нетривиальным бесконечно малым изгибанием первого порядка. При этом выражение $Y(t) = \sum_{p=0}^q Y_p t^p$ является нетривиальным бесконечно малым изгибанием порядка q . Это, однако, противоречит условиям теоремы, согласно которым K является жестким порядка q . Полученное противоречие доказывает теорему 8.14.

Другие утверждения о взаимосвязи бесконечно малых изгибаний высших порядков с изгибаемостью каркасов читатель может найти, например, в [82], [116] и [117]. Для гладких поверхностей результаты, отчасти аналогичные нашей теореме 8.14, были получены Н. Г. Перловой [43], [44] и И. Х. Сабитовым [52].

Следующая теорема означает, что свойство каркаса быть нежестким первого порядка сохраняется при проективных преобразованиях. Для гладких поверхностей это было доказано в работе Р. Зауера [114] (см. также [45]). Для каркасов это свойство, по-видимому, оставалось неизвестным несмотря на то, что проективные свойства каркасов в связи с изгибаемостью изучались специально (см., например, [85]). Прежде чем переходить к формулировке теоремы, условимся об обозначениях.

Пусть \mathcal{A} — некоторое проективное преобразование пространства \mathbb{R}^n в себя, т. е. отображение, которое точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ сопоставляет точку $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ по формулам

$$y_i = \frac{a_{i0} + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{a_{00} + \sum_{j=1}^n a_{0j}x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь a_{ij} — фиксированные числа. Считаем, что отображение \mathcal{A} не определено на тех векторах x , для которых $a_{00} + \sum_{j=1}^n a_{0j}x_j = 0$.

Пусть каркас P в \mathbb{R}^n имеет шарниры p_1, p_2, \dots, p_N и пусть все p_i лежат в области определения проективного преобразования \mathcal{A} . Через $\mathcal{A}P$ обозначим новый каркас в \mathbb{R}^n , шарнирами которого являются точки $\mathcal{A}p_1, \mathcal{A}p_2, \dots, \mathcal{A}p_N$, причем шарниры $\mathcal{A}p_i$ и $\mathcal{A}p_j$ соединены стержнем в $\mathcal{A}P$ если и только если шарниры p_i и p_j соединены стержнем в P .

Теорема 8.15. *Если каркас P в \mathbb{R}^n является нежестким первого порядка, то каркас $\mathcal{A}P$ также является нежестким первого порядка. Более того, каркасы P и $\mathcal{A}P$ имеют одинаковое число линейно независимых бесконечно малых изгибаний первого порядка.*

Доказательство. Как обычно, избавимся от тривиальных изгибаний каркаса P и построим по нему оператор S . Поскольку каркас P является нежестким первого порядка, то система линейных уравнений $SX = 0$ имеет ненулевое решение. Обозначим компоненты шарнира p_i через $p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,n}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Будем также трактовать X как мультивектор, т. е. как набор из N векторов x_1, x_2, \dots, x_N , причем вектор x_i

имеет компоненты $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}$. При этом система $CX = 0$ записывается в виде набора уравнений

$$\sum_{k=1}^n (p_{i,k} - p_{j,k})(x_{i,k} - x_{j,k}) = 0, \quad (24)$$

где $1 \leq i, j \leq N$ и шарниры p_i и p_j соединены стержнем в P . Используя формулы (24), мы можем дать следующее описание матрицы оператора C , точнее того ее столбца, который при вычислении произведения CX умножается на переменную $x_{i,k}$: если этот элемент стоит на пересечении нашего столбца со строкой, соответствующей уравнению (24) (т. е. если индексы i и j таковы, что шарниры p_i и p_j соединены стержнем), то он равен $p_{i,k} - p_{j,k}$, в противном случае он равен нулю.

Аналогичным образом построим оператор $\mathcal{A}C$ для каркаса $\mathcal{A}P$. Его матрицу можно получить из матрицы оператора C , заменив каждый элемент вида $p_{i,k} - p_{j,k}$ выражением

$$\frac{a_{k0} + \sum_{l=1}^n a_{kl}p_{i,l}}{a_{00} + \sum_{l=1}^n a_{0l}p_{i,l}} - \frac{a_{k0} + \sum_{l=1}^n a_{kl}p_{j,l}}{a_{00} + \sum_{l=1}^n a_{0l}p_{j,l}} = \frac{\sum_{l=1}^n (a_{k0}a_{0l} + a_{00}a_{kl})(p_{i,l} - p_{j,l})}{\left(a_{00} + \sum_{l=1}^n a_{kl}p_{i,l}\right) \left(a_{00} + \sum_{l=1}^n a_{0l}p_{i,l}\right)}.$$

Последнее выражение означает, что при переходе от матрицы C к матрице $\mathcal{A}C$ каждый столбец матрицы C , соответствующий переменной $x_{i,k}$ заменяется линейной комбинацией n столбцов, соответствующих переменным $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}$. При этом столбец, соответствующий переменной $x_{i,l}$ умножается на число

$$\frac{a_{k0}a_{0l} + a_{00}a_{kl}}{\left(a_{00} + \sum_{m=1}^n a_{km}p_{i,m}\right) \left(a_{00} + \sum_{m=1}^n a_{0m}p_{i,m}\right)}.$$

Но при таком преобразовании ранг матрицы не меняется. Значит матрицы операторов C и $\mathcal{A}C$ имеют не только одинаковое число строк и столбцов, но и одинаковый ранг. Поэтому из того, что уравнение $CX = 0$ имеет ненулевое решение вытекает, что уравнение $\mathcal{A}CX = 0$ также имеет ненулевое решение. Но это и означает, что каркас $\mathcal{A}P$ является нежестким первого порядка. Теорема 8.15 доказана.

Укажем пару нерешенных проблем, имеющих прямое отношение к изложенному в настоящей главе.

Во-первых было бы интересно освободиться в теореме 8.10 от условия, что у многогранника существует всего одно линейно независимое изгибание первого порядка. Примеры показывают, что при наличии нескольких линейно независимых бесконечно малых изгибаний первого порядка можно гарантировать неизгибаемость многогранника только если всякое его бесконечно малое изгибание заведомо непродолжимо в бесконечно малое изгибание достаточно высокого порядка N . Проблема как раз и состоит в том, чтобы найти N .

Во-вторых было бы интересно описать все нежесткие второго порядка октаэдры. Известно несколько разных описаний нежестких первого порядка октаэдров. Например, если известны координат вершин октаэдра, то он является нежестким первого порядка если и только если зануляется определитель его матрицы жесткости. Отсюда в частности вытекает, что множество нежестких первого порядка октаэдров является алгебраическим в пространстве, образованном координатами всех вершин. При этом ясно, что множество нежестких второго порядка октаэдров заведомо не является алгебраическим, поскольку оно не является замкнутым (в самом деле, взяв какой-нибудь нежесткий второго порядка октаэдр и применяя к нему гомотеию с коэффициентом $1/n$ при неограниченно возрастающем n получим в пределе вырожденный октаэдр длины всех ребер которого равны нулю и который, очевидно, является жестким второго порядка). Тем не менее некоторая надежда на существование разумного описания нежестких второго порядка октаэдров остается. Она поддерживается известными метрическими условиями того, что октаэдр является нежестким второго порядка [116], которые однако слишком громоздки, чтобы быт воспроизведенными здесь.

Глава 9. Изгибаемые многогранники в пространстве Минковского

В данной главе мы доказываем, что в трехмерном пространстве Минковского существуют изгибаемые многогранники и что каждый из них сохраняет в процессе изгибания свой обобщенный объем и интегральную среднюю кривизну. Для доказательства последнего результата мы вводим понятие угла между произвольными двумя ненулевыми неизотропными векторами на плоскости Минковского, которое может представлять независимый интерес.

Результаты этой главы опубликованы в работе автора [A12].

§1. Введение

Напомним, что n -мерным пространством Минковского \mathbb{R}_1^n называется линейное пространство, образованное упорядоченными наборами из n вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, снабженное следующим скалярным произведением: $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n$. При этом длина $|x| = \sqrt{(x, x)}$ вектора x является либо положительным числом, либо положительным числом, умноженным на мнимую единицу i , либо нулем (см., например, [106]).

Понятие изгибаемого многогранника в пространстве Минковского определяется аналогично понятию изгибаемого многогранника в евклидовом или сферическом пространстве. Тем не менее приведем точное определение.

Пусть Σ — связный $(n-1)$ -мерный симплициальный комплекс, который является также многообразием. Непрерывное отображение $P : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ называется многогранником в \mathbb{R}_1^n если оно аффинно и инъективно на каждом симплексе комплекса Σ . Иногда мы называем многогранником также образ $P(\Sigma)$ комплекса Σ при таком отображении. Мы говорим, что многогранник P является многогранным диском или сферой, если тела комплекса Σ гомеоморфно диску на евклидовой плоскости или стандартной сфере в евклидовом трехмерном пространстве, соответственно.

Многогранник $P = P(\Sigma)$ называется изгибаемым, если существует аналитическое (относительно некоторого параметра) семейство многогранников $P_t = P_t(\Sigma)$ ($0 \leq t \leq 1$) такое, что

- i) $P_0 = P$;
- ii) для каждого ребра e комплекса Σ длина ребра $P_t(e)$ не зависит от t ;
- iii) существуют две вершины v_1 и v_2 комплекса Σ такие, что расстояние (в смысле метрики Минковского) между точками $P_t(v_1)$ и $P_t(v_2)$ не является постоянным по t .

Семейство $\{P_t\}$ ($0 \leq t \leq 1$) называется нетривиальным изгибанием многогранника P .

Напомним наиболее важные результаты, полученные в теории изгибаемых многогранников в трехмерном евклидовом пространстве:

- a) не существует выпуклых изгибаемых многогранников (О.Коши, 1813 [75]; А.Д.Александров, 1950 [2]);
- b) существуют вложенные изгибаемые многогранные сферы (Р.Коннелли, 1977 [79]; К.Штеффен, 1980 (см., например, [6], [57] или [A7]));
- c) каждый изгибаемый многогранник сохраняет свою (интегральную) среднюю кривизну с процессе изгибания (Р.Александр, 1985 [66]; Ф.Альмгрен и И.Ривин, 1998 [67]);
- d) каждый изгибаемый многогранник сохраняет свой (обобщенный) объем с процессе изгибания (И.Х.Сабитов, 1996 [54], [55], [113]; Р.Коннелли, И.Х.Сабитов и А.Вальц, 1997 [83]).

В этой главе мы доказываем, что вышеупомянутые результаты переносятся на изгибаемые многогранники в трехмерном пространстве Минковского. Точнее, мы показываем, что в трехмерном пространстве Минковского существуют погруженные изгибаемые многогранные сферы, причем всякий изгибаемый многогранник в таком пространстве сохраняет свой (обобщенный) объем и свою (интегральную) среднюю кривизну в процессе изгибания.

§2. Существование

Мы без пояснений используем стандартные обозначения теории пространств Минковского. Читатель может найти их в [46] или [106].

Пусть $eu : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — «тождественное» отображение n -мерного пространства Минковского \mathbb{R}_1^n на n -мерное евклидово пространство \mathbb{R}^n . Отметим, что множество $D \subset \mathbb{R}_1^n$ является выпуклым если и только если множество $eu(D) \subset \mathbb{R}^n$ выпукло. Выпуклый многогранник мы называем строго выпуклым, если ни один из его двугранных углов не является развернутым.

В следующей лемме очень важно, что, согласно нашему определению, все грани многогранника являются треугольниками.

Лемма 9.1. Пусть $P : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ — строго выпуклый многогранник, гомеоморфный сфере и пусть Q — многогранный диск, который получен из P удалением двух смежных граней. Тогда Q — изгибаемый многогранник.

Доказательство. Фиксируем треугольник $\Delta \subset \Sigma$ такой, что $P(\Delta) \subset Q$. Пусть комплекс Σ имеет v вершин (0-граней) V_1, V_2, \dots, V_v и пусть $V_{v-2}, V_{v-1}, V_v \in \Delta$. Предположим, что Σ имеет e ребер (1-граней), причем ребра, помеченные индексами $e-2$, $e-1$ и e лежат в Δ .

Рассмотрим семейство всех многогранников $\mathcal{P} : \Sigma \rightarrow E_{2,1}^3$ таких, что $\mathcal{P}|_{\Delta} = P|_{\Delta}$. Это семейство зависит от $3v-9$ параметров, $x_1, y_1, z_1, \dots, x_{v-3}, y_{v-3}, z_{v-3}$, где $(x_j, y_j, z_j) = \mathcal{P}(V_j)$ ($j = 1, 2, \dots, v-3$) — координаты j ой вершины \mathcal{P} .

Пусть вершины $\mathcal{P}(V_j)$ и $\mathcal{P}(V_k)$ ($j, k = 1, 2, \dots, v-3$) соединены ребром и пусть это ребро помечено индексом m ($m = 1, 2, \dots, e-3$). Определим вспомогательную вещественно-значную функцию f_m с помощью формулы

$$f_m(x_1, y_1, z_1, \dots, x_{v-3}, y_{v-3}, z_{v-3}) = [(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 - (z_j - z_k)^2]/2.$$

Компоненты вектор-функции $f = (f_1, f_2, \dots, f_{e-3})$ представляют собой половины квадратов длин тех ребер \mathcal{P} , которые не принадлежат $\mathcal{P}(\Delta)$.

Согласно формуле Эйлера $3v - e = 6$ и, следовательно, $e - 3 = 3(v - 3)$. Это означает, что матрицы Якоби отображения f является квадратной. Очевидно, ее m -я строка имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_j - x_k & y_j - y_k & z_k - z_j & 0 & \dots \\ \dots & 0 & x_k - x_j & y_k - y_j & z_j - z_k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы Якоби не обращается в нуль в точке, соответствующей многограннику $P : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_1^3$. Чтобы доказать это утверждение, повторим приведенные выше построения для выпуклого многогранника $eu(P) \subset \mathbb{R}^3$. В результате мы получим вектор-функцию $g = (g_1, g_2, \dots, g_{e-3})$ со следующими компонентами:

$g_m(x_1, y_1, z_1, \dots, x_{v-3}, y_{v-3}, z_{v-3}) = [(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2]/2$ ($m = 1, 2, \dots, e - 3$), равными половинам квадратов (Евклидовых) длин тех ребер многогранника $eu(\mathcal{P})$, которые не принадлежат $eu(\mathcal{P})(\Delta)$. При этом m -я строка матрицы Якоби отображения g имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_j - x_k & y_j - y_k & z_j - z_k & 0 & \dots \\ \dots & 0 & x_k - x_j & y_k - y_j & z_k - z_j & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что якобиан отображения f получается из якобиана отображения g умножением на ± 1 . Но последний якобиан, как известно, отличен от нуля в каждой точке, соответствующей любому выпуклому многограннику трехмерного евклидова пространства. Это утверждение получено в [88] прямыми вычислениями. Помимо этого, оно, как известно, эквивалентно утверждению о том, что всякий строго выпуклый многогранник в трехмерном евклидовом пространстве является жестким первого порядка (см., например, [2]).

Из того, что якобиан отображения f отличен от нуля в точке, соответствующей многограннику $P : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, заключаем, что f гомеоморфно отображает некоторую окрестность U этой точки на ее образ $f(U)$. Для любого t , достаточно близкого к нулю, существует точка $f^t = (f_1^t, f_2^t, \dots, f_{e-3}^t) \in f(U)$ со следующими свойствами:

α) f_m^t равняется сумме числа t и значения функции f_m в точке, соответствующей многограннику P , если m соответствует именно тому ребру комплекса Σ , которое является общим для тех треугольников, которые были удалены из P при построении Q ,

и

β) f_m^t равняется значению функции f_m в точке, соответствующей многограннику P , в противном случае.

Поскольку f является локальным гомеоморфизмом, то существует многогранник P_t^* такой, что f отображает точку окрестности U , соответствующую P_t^* именно в точку f^t . Это означает, что сколь угодно близко к P ,

существует многогранник P_t^* , который не конгруэнтен P и все его ребра, за исключением того, в котором сходятся две грани, удаленные при построении Q , имеют те же самые длины, что и соответствующие ребра P . Удалив из P_t^* эти две грани, мы получим многогранник Q_t^* , который сколь угодно близок к Q , изометричен Q во внутренних метриках, но не конгруэнтен Q . В [91] показано, что существование такого семейства многогранников Q_t^* влечет существование семейства многогранников Q_t , которое аналитично по отношению к параметру t и которое удовлетворяет следующим условиям: i) $Q_0 = Q$; ii) длина каждого ребра многогранника Q_t не зависит от t ; iii) существуют две вершины многогранника Q_t не является постоянным по t . Следовательно, семейство $\{Q_t\}$ является нетривиальным изгибанием многогранника Q . Лемма доказана.

Пусть α обозначает либо времениподобную либо пространственноподобную прямую. Для каждого $x \in \mathbb{R}_1^3$ проведем через x перпендикуляр α^\perp (в смысле пространства Минковского) к α и обозначим точку пересечения прямых α и α^\perp через y . Обозначим через $f_\alpha(x)$ такую точку, что $f_\alpha \in \alpha^\perp$ и $|f_\alpha(x) - y| = |x - y| = |f_\alpha(x) - x|/2$. Возникающее при этом отображение $f_\alpha : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ называем отражением относительно прямой α в пространстве Минковского.

Отметим, что отражение относительно прямой α является изометрией пространства Минковского (достаточно проверить это утверждение только для тех случаев, когда α совпадает с первой или третьей координатной осями, а в этих случаях f_α задается матрицами

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

соответственно, и, очевидно, является изометрией пространства Минковского.)

Ниже нам понадобится следующее утверждение, евклидова версия которого может быть найдена в [99]:

Лемма 9.2. Пусть $q_1q_2q_3q_4$ — пространственный четырехугольник в \mathbb{R}_1^3 , обладающий следующими свойствами (см. Рис. 1):

1) противоположные стороны четырехугольника $q_1q_2q_3q_4$ попарно равны, т.е. $|q_1 - q_2| = |q_3 - q_4|$ и $|q_2 - q_3| = |q_4 - q_1|$;

- 2) ни одна из диагоналей q_1q_3 или q_2q_4 не лежит на световом конусе;
 3) средняя точка q_5 диагонали q_1q_3 не совпадает со средней точкой q_6 диагонали q_2q_4 ;
 4) прямая линия α , проходящая через q_5 и q_6 , не лежит на световом конусе.
 Тогда отражение относительно α переводит четырехугольник $q_1q_2q_3q_4$ в себя.

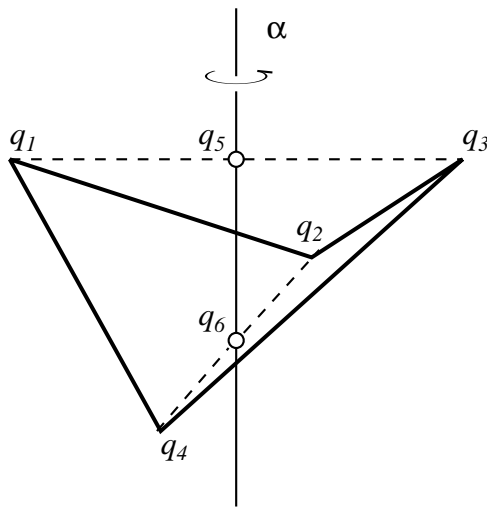


Рис. 1

Доказательство. Из условий леммы следует, что треугольники $q_1q_2q_3$ и $q_1q_3q_4$ имеют попарно равные стороны. С другой стороны, очевидно, что «равенство параллелограмма» $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$ справедливо для произвольных векторов x, y пространства Минковского \mathbb{R}_1^3 . Следовательно, длина медианы $(x+y)/2$ может быть выражена в терминах длин ребер x, y и $x+y$ треугольника. Поэтому соответственные медианы треугольников $q_1q_2q_3$ и $q_1q_3q_4$ имеют равные длины: $|q_2 - q_5| = |q_4 - q_5|$. А значит треугольник $q_2q_4q_5$ является равнобедренным и отрезок q_5q_6 является не только медианой, но и высотой. (Последнее проверяется непосредственно: если векторы $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ представляют равные стороны равнобедренного треугольника в пространстве Минковского \mathbb{R}_1^3 , т.е. если $|x| = |y|$, то векторы $(x+y)/2$ и $x-y$ представляют

медиану и основание этого треугольника и, с помощью прямых вычислений, мы получаем $(x + y, x - y) = |x|^2 - |y|^2 = 0$ независимо от сигнатуры скалярного произведения.)

Таким образом мы пришли к выводу, что прямая α ортогональна прямой q_2q_4 и, следовательно, отражение относительно α меняет точки q_2 и q_4 местами.

Аналогично, треугольники $q_1q_2q_4$ и $q_2q_3q_4$ имеют попарно равные стороны, их медианы q_1q_6 и q_3q_6 имеют равные длины, прямая α ортогональна прямой q_1q_3 , а отражение относительно прямой α меняет местами точки q_1 и q_3 .

В итоге мы заключаем, что отражение относительно прямой α отображает четырехугольник $q_1q_2q_3q_4$ в себя, что и завершает доказательство леммы.

Теорема 9.1. *В трехмерном пространстве Минковского существуют изгибаемые многогранные сферы.*

Доказательство. Пусть Q — многогранный диск в пространстве Минковского \mathbb{R}_1^3 , обладающий следующими свойствами:

А) Q получем из некоторого строго выпуклого многогранника P , гомеоморфного сфере посредством удаления двух смежных (треугольных) граней;

В) граница ∂Q многогранника Q является четырехугольником, удовлетворяющим условиям леммы 9.2;

С) Q не симметричен относительно той прямой, относительно которой симметричен четырехугольник ∂Q .

Из леммы 9.1 вытекает, что многогранник Q является изгибаемым. Пусть $\{Q_t\}$ ($0 \leq t \leq 1$) обозначает нетривиальное изгибание многогранника Q . Используя лемму 9.2, заключаем, что для каждого t , граница ∂Q_t многогранника Q_t переходит в себя при отражении относительно некоторой прямой линии. Обозначим это отражение через R_t . Тогда $\{Q_t \cup R_t(Q_t)\}$ ($0 \leq t \leq 1$) является нетривиальным изгибанием многогранной сферы $Q \cup R_0(Q)$. Теорема доказана.

§3. Объем

Мы полагаем объем области D в n -мерном пространстве Минковского \mathbb{R}_1^n ($n \geq 2$) по определению равным евклидову объему его образа $eu(D)$ в евклидовом n -мерном пространстве \mathbb{R}^n , т.е., мы по определению полагаем

$$\text{vol } D = \int_{eu(D)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Это определение встречается уже в книге П.К.Рашевского [46] и является естественным в том смысле, что объем оказывается аддитивной, однородной порядка n функцией, инвариантной относительно изометрий пространства \mathbb{R}_1^n .

Лемма 9.4. Пусть дана $n + 1$ точка p_0, p_1, \dots, p_n пространства Минковского \mathbb{R}_1^n , и пусть квадраты попарных расстояний между ними обозначены через $d_{jk}^2 = |p_j - p_k|^2$ ($j \neq k = 0, 1, \dots, n$). Пусть, наконец, $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ обозначает симплекс с вершинами p_0, p_1, \dots, p_n . Тогда

$$\text{vol}^2[p_0, p_1, \dots, p_n] = \frac{(-1)^n}{2^n(n!)^2} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \cdots & d_{0n}^2 \\ 1 & d_{10}^2 & 0 & d_{12}^2 & \cdots & d_{1n}^2 \\ 1 & d_{20}^2 & d_{21}^2 & 0 & \cdots & d_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & d_{n2}^2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Отметим, что правая часть в (1) отличается только знаком «минус» от хорошо известной формулы Кэли–Менгера, выражающей объем симплекса в евклидовом пространстве через длины его ребер [70].

Доказательство. Обозначая координаты точки p_j через $(p_j^{(1)}, p_j^{(2)}, \dots, p_j^{(n)})$ ($j = 0, 1, \dots, n$) и используя данное выше определение объема, мы получаем по стандартной формуле аналитической геометрии:

$$\text{vol } [p_0, p_1, \dots, p_n] = \frac{1}{n!} \det \begin{pmatrix} p_0^{(1)} & p_0^{(2)} & \cdots & p_0^{(n)} & 1 \\ p_1^{(1)} & p_1^{(2)} & \cdots & p_1^{(n)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_n^{(1)} & p_n^{(2)} & \cdots & p_n^{(n)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, определитель не изменит своего значения если мы окаймим его $(n+2)$ ой строкой и $(n+2)$ ой колонкой, на пересечении которых стоит 1, а все остальные элементы равны 0. Умножим определитель полученной таким образом расширенной матрицы на определитель матрицы, полученной из расширенной матрицы путем следующих операций: поменяем местами первые две строки, поменяем местами последние две колонки, умножим n ю колонку на (-1) , результат транспонируем. В итоге получим:

$$\text{vol}^2[p_0, p_1, \dots, p_n] = \frac{1}{(n!)^2} \det \begin{pmatrix} (p_0, p_0) & (p_0, p_1) & \cdot & \cdot & (p_0, p_n) & 1 \\ (p_1, p_0) & (p_1, p_1) & \cdot & \cdot & (p_1, p_n) & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (p_n, p_0) & (p_n, p_1) & \cdot & \cdot & (p_n, p_n) & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $(p_j, p_k) = p_j^{(1)} p_k^{(1)} + p_j^{(2)} p_k^{(2)} + \dots + p_j^{(n-1)} p_k^{(n-1)} - p_j^{(n)} p_k^{(n)}$ ($j, k = 0, 1, \dots, n$) обозначает скалярное произведение в \mathbb{R}_1^n .

Подставим теперь $(p_j, p_k) = [(p_j, p_j) + (p_k, p_k) - d_{jk}^2]/2$ ($j, k = 0, 1, \dots, n$) в определитель в формуле (2) и вычтем из j ой строки последнюю строку, умноженную на $(p_{j-1}, p_{j-1})/2$ ($j = 1, 2, \dots, n$). После очевидных упрощений получим (1). Лемма доказана.

Пусть P — компактный ориентируемый многогранник в \mathbb{R}_1^n , не имеющий границы. Фиксируем некоторую точку $p_* \in \mathbb{R}_1^n$. Определим обобщенный объем многогранника P формулой

$$\text{Vol } P = \sum \varepsilon(p_*, \Delta) \text{vol } [p_*, \Delta].$$

Здесь сумма берется по всем положительно ориентированным граням Δ многогранника P , $[p_*, \Delta]$ обозначает (возможно — вырожденный) n -мерный симплекс, являющийся выпуклой оболочкой точки p_* и симплекса Δ , снабженный ориентацией, порожденной ориентацией симплекса Δ . Наконец, число $\varepsilon(p_*, \Delta)$ здесь равно $+1$ (соответственно, -1) если ориентация симплекса $[p_*, \Delta]$ согласована (соответственно, противоположна) ориентации всего пространства \mathbb{R}_1^n .

Отметим, что значение обобщенного объема не зависит от выбора точки p_* (это утверждение немедленно выводится из аналогичного утверждения для евклидова пространства) и, в случае когда P является вложенным многогранником, обобщенный объем $\text{Vol } P$ совпадает с объемом $\text{vol } D$ ограниченной области D , имеющей P в качестве границы.

Теорема 9.5. *Обобщенный объем изгибаемого многогранника в трехмерном пространстве Минковского остается постоянным в процессе изгибания.*

Доказательство дословно повторяет доказательства аналогичной теоремы для изгибаемых многогранников в трехмерном евклидовом пространстве, которые приведены в [54], [55], [113] или [83]. Нам необходимо сделать только одно изменение: во всех формулах, выводимых из определителя Кэли–Менгера (1) необходимо добавлять дополнительный знак «минус».

§4. Ориентированный угол

Как известно из элементарной геометрии, число φ_0 ($0 \leq \varphi_0 \leq \pi$) называется углом между двумя ненулевыми векторами x, y в евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 если φ_0 равняется удвоенной площади меньшего из секторов, вырезаемых единичными векторами $x/|x|$ и $y/|y|$ (трактуемыми как направленные отрезки) из единичного круга.

Однако многих задачах более удобно трактовать (ориентированный) угол как многозначную функцию $\varphi = \varphi_1 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), которая удовлетворяет соотношению

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}, \quad (3)$$

где либо $\varphi_1 = \varphi_0$ либо $\varphi_1 = \pi - \varphi_0$.

Мы используем подобный подход к понятию угла на плоскости Минковского \mathbb{R}_1^2 .

Световой конус разбивает плоскость Минковского \mathbb{R}_1^2 на четыре сектора (связных компоненты). Обозначим их через S_1, \dots, S_4 (мы считаем, что $(1, 0) \in S_1$, $(0, 1) \in S_2$, $(-1, 0) \in S_3$, и $(0, -1) \in S_4$). В соответствии с классическим определением, угол между ненулевыми неизотропными векторами $x, y \in \mathbb{R}_1^2$ определен только в том случае, если оба вектора

лежат в одном секторе, т.е. если $x, y \in S_j$ для некоторого $j = 1, \dots, 4$. В этом случае абсолютное значение угла θ_0 равняется площади сектора, вырезанного из единичного (или мнимо-единичного, в зависимости от j) круга векторами $x/|x|$ и $y/|y|$. Примем также следующее «соглашение о знаке»: для любой положительно ориентированной пары векторов $x, y \in S_j$ ($j = 1, \dots, 4$), угол θ_0 между векторами x и y положителен, если $j = 1$ или $j = 3$ и отрицателен, если $j = 2$ или $j = 4$.

Приведенное определение можно найти, например, в [46], где, в частности, доказано следующее соотношение, связывающее угол и скалярное произведение

$$\cosh \theta_0 = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}, \quad (4)$$

а также показано, что для любого сектора S_j ($j = 1, \dots, 4$) и любого вещественного числа α , существуют векторы $x, y \in S_j$ такие, что ориентированный угол между x и y равняется именно α .

Следуя [12], мы расширим приведенное выше классическое определение и будем трактовать угол как многозначную функцию, удовлетворяющую (4). Точнее, пусть $x, y \in S_1$. Тогда ориентированный угол θ_0 между x и y уже определен. Станем поворачивать y в положительном направлении. При стремлении y к световому конусу (т.е. к границе сектора S_1) угол θ_0 возрастает и стремится к плюс бесконечности.

Как только y пересечет световой конус в первый раз (и, следовательно, окажется в S_2), дробь в (4) станет отрицательной и мы положим по определению, что ориентированный угол между векторами $x \in S_1$ и $y \in S_2$ равен тому (единственным образом определенному) уомплексному числу $\theta = \theta_0 - i\pi/2$ ($\theta_0 \in \mathbb{R}$), для которого выполняется соотношение

$$\cosh \theta = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}. \quad (5)$$

Отметим, что когда y вращается против часовой стрелки, оставаясь в пределах сектора S_2 , вещественная часть θ_0 угла $\theta = \theta_0 - i\pi/2$ уменьшается от плюс бесконечности до минус бесконечности.

После того, как y пересечет световой конус во второй раз, дробь в (5) опять станет положительной, и мы по определению положим, что ориентированный угол между векторами $x \in S_1$ и $y \in S_3$ равен комплексному числу $\theta = \theta_0 - i\pi$ ($\theta_0 \in \mathbb{R}$), для которого верно равенство (5).

Отметим, что, вообще говоря, существует ровно два вектора $y, \tilde{y} \in S_3$ заданной длины, для которых дробь в (5) принимает предписанное значение. Аналогично, существует ровно два вещественных числа θ_0 и $\tilde{\theta}_0$ таких, что $\cosh(\theta_0 - i\pi) = \cosh(\tilde{\theta}_0 - i\pi)$. В этом случае мы принимаем следующее «соглашение о знаке»: если упорядоченная пара y и \tilde{y} положительно ориентирована и если $\theta > \theta_0$, то мы по определению полагаем, что ориентированный угол между x и y равняется θ , а ориентированный угол между x и \tilde{y} равняется $\tilde{\theta}$.

Отметим, что, в соответствии с принятым определением, вещественная часть θ_0 угла $\theta = \theta_0 - i\pi$ возрастает от минус бесконечности до плюс бесконечности, если y поворачивается против часовой стрелки к пределам сектора S_3 .

После того, как y пересечет световой конус в третий раз, дробь в (5) вновь станет отрицательной и мы по определению полагаем, что ориентированный угол между $x \in S_1$ и $y \in S_4$ равен тому единственному комплексному числу $\theta = \theta_0 - i3\pi/2$ ($\theta_0 \in \mathbb{R}$), для которого выполняется равенство (5). Легко понять, что когда y вращается против часовой стрелки в пределах сектора S_4 , вещественная часть θ_0 угла $\theta = \theta_0 - i3\pi/2$ между векторами $x \in S_1$ и $y \in S_4$ уменьшается от плюс бесконечности до минус бесконечности.

Коротко можно сказать, что наше определение базируется на том факте, что каждый раз, когда при вращении против часовой стрелки y пересекает световой конус, мнимая часть угла получает приращение на величину $-\pi/2$.

Далее, если $x \in S_1$ и y — произвольный ненулевой неизотропный вектор, то мы по определению полагаем, что ориентированный угол между упорядоченной парой векторов y, x равен ориентированному углу между упорядоченной парой векторов x, y , взятому со знаком минус.

Вышеприведенное определение ориентированного угла между вектором $x \in S_1$ и некоторым ненулевым неизотропным вектором $y \in \mathbb{R}_1^2$ проиллюстрировано на рис. 2.

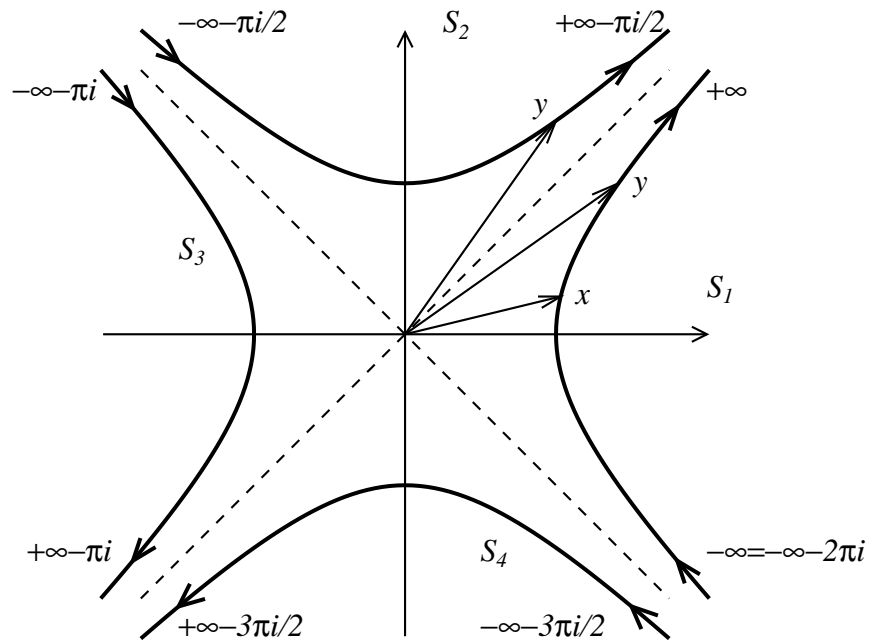


Рис. 2

По определению ориентированным углом между двумя ненулевыми неизотропными векторами $x, y \in \mathbb{R}_1^2$ мы называем сумму ориентированного угла между векторами x и $e = (1, 0)$ и ориентированного угла между векторами e и y . Ориентированный угол обозначаем через $\angle xy$.

Ниже нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 9.6. *Ориентированный угол является аддитивной функцией (т.е., если x, y, z — три ненулевых неизотропных вектора и $\angle xy = \theta_1 + ik_1\pi/2$, $\angle yz = \theta_2 + ik_2\pi/2$, то найдется целое число $n \in \mathbb{Z}$ такое что $\angle xz = (\theta_1 + \theta_2) + i(k_1 + k_2)\pi/2 + 2\pi in$).*

Доказательство. Непосредственно из определения имеем $\angle xy = \angle xe + \angle ey$ и $\angle yz = \angle ye + \angle ez$. Принимая во внимание, что $\angle ey = -\angle ye$ и складывая эти равенства, получаем $\angle xy + \angle yz = \angle xe + \angle ez = \angle xz$. Лемма доказана.

Ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}_1^2$ называется правой нормалью к ненулевому неизотропному вектору $x \in \mathbb{R}_1^2$, если y перпендикулярен x (т.е. если $(x, y) = 0$) и упорядоченная пара векторов x, y ориентирована положительно.

Лемма 9.7. *Пусть $x \in \mathbb{R}_1^2$ — ненулевой неизотропный вектор и y — правая нормаль к x . Тогда $\angle xy = -i\pi/2$.*

Доказательство. Пусть сначала $x = (x_1, x_2) \in S_1$. Не уменьшая общности можем считать, что $x_1^2 - x_2^2 = 1$ и $y = (x_2, x_1)$. Последнее означает, что $y \in S_2$, а значит $\angle ey = \theta - i\pi/2$ для некоторого вещественного числа θ . Тогда $\cosh \angle ey = -i \sinh \theta = -ix_2$ и $\sinh \angle ey = -i \cosh \theta = \pm \sqrt{-x_2^2 - 1} = \pm ix_1$. В последней формуле мы должны выбрать знак «минус», поскольку $\cosh \theta > 0$ и $x_1 > 0$.

Аналогично, из того, что $x \in S_1$ вытекает, что $\angle ex = \varphi$ для некоторого вещественного числа φ . Поэтому $\cosh \angle ex = \cosh \varphi = x_1$ и $\sinh \angle ex = \sinh \varphi = \pm \sqrt{x_1^2 - 1} = \pm x_2$. В соответствии с нашим «соглашением о знаке» φ должно возрасти при возрастании x_2 ; поэтому мы должны выбрать знак «плюс» в последней формуле.

Наконец, мы имеем $\cosh \angle xy = \cosh(\angle xe + \angle ey) = \cosh \angle xe \cdot \cosh \angle ey + \sinh \angle xe \cdot \sinh \angle ey = x_1(-ix_2) + (-x_2) \cdot (-ix_1) = 0$ и $\cosh \angle xy = \cosh(\theta - i\pi/2 - \varphi) = -i \sinh(\theta - \varphi)$. Следовательно, $\theta = \varphi$ и $\angle xy = -i\pi/2$. Это доказывает лемму для случая $x \in S_1$.

Рассмотрим случай $x = (x_1, x_2) \in S_2$. Не уменьшая общности можем считать, что $x_1^2 - x_2^2 = -1$ и $y = -(x_2, x_1)$. Последнее означает, что $y \in S_3$, а значит $\angle ey = \theta - i\pi$ для некоторого вещественного числа θ . Тогда $\cosh \angle ey = -i \cosh \theta = -x_2$ и $\sinh \angle ey = -\sinh \theta = \pm \sqrt{x_2^2 - 1} = \pm x_1$. В соответствии с нашим «соглашением о знаке» θ должно стремиться к плюс бесконечности при $x_1 \rightarrow +\infty$. Поэтому мы должны выбрать знак «минус» в последней формуле.

Из приведенных выше вычислений для случая $x \in S_1$ мы немедленно получаем $\angle ex = \varphi - i\pi/2$ ($\varphi \in \mathbb{R}$), $\cosh \angle ex = -ix_1$ и $\sinh \angle ex = -ix_2$.

Наконец, мы имеем $\cosh \angle xy = \cosh(\angle xe + \angle ey) = (-ix_1) \cdot (-x_2) + (ix_2) \cdot (-x_1) = 0$ и $\cosh \angle xy = \cosh(\theta - i\pi - \varphi + i\pi/2) = -i \sinh(\theta - \varphi)$. Следовательно, $\theta = \varphi$ and $\angle xy = -i\pi/2$. Это доказывает лемму для случая $x \in S_2$.

Рассмотрим случай $x = (x_1, x_2) \in S_3$. Не уменьшая общности можем считать, что $x_1^2 - x_2^2 = 1$ and $y = (x_2, x_1)$. Последнее означает, что $y \in S_4$, а значит $\angle ey = \theta - i3\pi/2$ для некоторого вещественного числа θ . Тогда $\cosh \angle ey = i \sinh \theta = -ix_2$ и $\sinh \angle ey = i \cosh \theta = \pm i \sqrt{x_2^2 + 1} = \pm ix_1$. Поскольку $\cosh \theta > 0$ и $x_1 < 0$, мы должны выбрать знак «минус» в последней формуле.

Из приведенных выше вычислений для случая $x \in S_2$ мы немедленно получаем $\angle ex = \varphi - i\pi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$), $\cosh \angle ex = x_1$, и $\sinh \angle ex = x_2$.

Наконец, мы имеем $\cosh \angle xy = \cosh(\angle xe + \angle ey) = x_1(-ix_2) + (-x_2) \cdot (-ix_1) = 0$ и $\cosh \angle xy = \cosh(\theta - i3\pi/2 - \varphi + i\pi) = -i \sinh(\theta - \varphi)$. Следовательно, $\theta = \varphi$ и $\angle xy = -i\pi/2$. Это доказывает лемму для случая $x \in S_3$.

Рассмотрим, наконец, случай $x = (x_1, x_2) \in S_4$. Не уменьшая общности можем считать, что $x_1^2 - x_2^2 = 1$ и $y = -(x_2, x_1)$. Последнее означает, что $y \in S_1$, а значит $\angle ey = \theta \in \mathbb{R}$. Тогда $\cosh \angle ey = -x_2$ и $\sinh \angle ey = \pm i\sqrt{x_2^2 - 1} = \pm x_1$. В соответствии с нашим «соглашением о знаке» θ должно стремиться к плюс бесконечности при $x_1 \rightarrow -\infty$. Поэтому мы должны выбрать знак «минус» в последней формуле.

Из приведенных выше вычислений для случая $x \in S_3$ мы немедленно получаем $\angle ex = \varphi - i3\pi/2$ ($\varphi \in \mathbb{R}$), $\cosh \angle ex = -ix_1$, и $\sinh \angle ex = -ix_2$.

Наконец, мы имеем $\cosh \angle xy = \cosh(\angle xe + \angle ey) = (-ix_1) \cdot (-x_2) + (ix_2) \cdot (-x_1) = 0$ и $\cosh \angle xy = \cosh(\theta - \varphi + i3\pi/2) = -i \sinh(\theta - \varphi)$. Следовательно, $\theta = \varphi$ и $\angle xy = -i\pi/2$. Это рассуждение доказывает лемму для случая $x \in S_4$ и, тем самым, полностью завершает ее доказательство.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}_1^2$ — два ненулевых неизотропных вектора и либо $|y| = 1$, либо $|y| = i$. Вещественное число t называется ортогональной проекцией вектора x на ориентированную прямую, натянутую на вектор y , если вектор $x - ty$ перпендикулярен вектору y , т.е. мы полагаем по определению $t = (x, y)$, если вектор y пространственноподобен и полагаем $t = -(x, y)$, если y — времениподобен.

Лемма 9.8. Пусть $x, y \in \mathbb{R}_1^2$ — два ненулевых неизотропных вектора и либо $|y| = 1$, либо $|y| = i$. Пусть t — ортогональная проекция вектора x на ориентированную прямую, натянутую на вектор y . Тогда $t = |x| \cosh \angle xy$ для пространственноподобных векторов y и $t = -i|x| \cosh \angle xy$ для времениподобных векторов y .

Доказательство получается прямым вычислением:

$$\cosh \angle xy = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{(x - (x - ty), y)}{|x| \cdot |y|} = t \frac{|y|^2}{|x| \cdot |y|}.$$

Лемма 9.9. Пусть упорядоченная пара векторов $a, b \in \mathbb{R}_1^2$ положительно ориентирована и такова, что $|a| = 1$, $|b| = i$. Тогда для произвольного неизотропного вектора $x \in \mathbb{R}_1^2$ справедливо равенство $x = a|x| \cosh \angle ax + b|x| \sinh \angle ax$ (другими словами, если a, b — координатный базис, то $x = (|x| \cosh \angle ax, |x| \sinh \angle ax)$).

Доказательство. Пусть t является ортогональной проекцией вектора x на ориентированную прямую, натянутую на вектор a и пусть s является ортогональной проекцией вектора x на ориентированную прямую, натянутую на вектор b . Тогда $x = ta + sb$. Из леммы 9.8 вытекает $t = |x| \cosh \angle ax$. Согласно леммам 9.6 и 9.7, справедливы равенства $\angle bx = \angle ba + \angle ax = -\angle ab + \angle ax = i\pi/2 + \angle ax$. Теперь, на основании леммы 9.8, получаем $s = -i|x| \cosh \angle bx = -i|x| \cosh(i\pi/2 + \angle ax) = |x| \sinh \angle ax$. Лемма доказана.

Отметим также, что значение ориентированного угла инвариантно относительно изометрий плоскости \mathbb{R}_1^2 .

§5. Средняя кривизна

Пусть P — $(n - 1)$ -мерный ориентируемый многогранник в евклидовом n -мерном пространстве \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) и пусть F — совокупность всех $(n - 1)$ -мерных граней многогранника P . Обозначим через m_j ($j \in F$) направленную внутрь многогранника P нормаль к его грани $j \in F$, такую, что длина вектора m_j равняется $(n - 1)$ -серному объему соответствующей $(n - 1)$ -мерной грани j . Согласно хорошо известному наблюдению Г. Минковского, справедливо равенство $\sum_{j \in F} m_j = 0$ (см., например, [2], [66]).

Приводимая ниже лемма 9.10 устанавливает аналогичный результат на плоскости Минковского. Подчеркнем, что в этом случае мы должны использовать внутренние нормали для пространственноподобных ребер и внешние нормали для времениподобных ребер (или наоборот). Мы используем следующие обозначения. Если $w = (w_1, w_2)$ — вектор в \mathbb{R}_1^2 , то мы полагаем по определению $\varepsilon(w) = \operatorname{sgn} |w|^2 = \operatorname{sgn} (w_1^2 - w_2^2)$ и обозначаем модуль комплексного числа $|w|$ через $\|w\|$. Напомним, что вектор w называется единичным, если $\|w\| = 1$.

Лемма 9.10. Пусть $g_j \in \mathbb{R}_1^2$ ($j = 1, 2, \dots, k$) — неизотропные векторы такие, что $\sum_{j=1}^k g_j = 0$. Для каждого $j = 1, 2, \dots, k$, обозначим через n_j правую единичную нормаль к g_j . Тогда $\sum_{j=1}^k \varepsilon(g_j) \|g_j\| n_j = 0$.

Доказательство. Пусть $g_j = (x_j, y_j)$ ($j = 1, 2, \dots, k$). Положим по определению $u_j = (y_j, x_j)$. Согласно условиям леммы,

$$\sum_{j=1}^k g_j = \left(\sum_{j=1}^k x_j, \sum_{j=1}^k y_j \right) = (0, 0) = 0.$$

Докажем теперь, что $\varepsilon(g_j) \|g_j\| n_j = u_j$.

Если вектор g_j пространственноподобен, то u_j — правая нормаль к g_j , поскольку $(u_j, g_j) = 0$ и

$$\det \begin{pmatrix} x_j & y_j \\ y_j & x_j \end{pmatrix} = |g_j|^2 > 0.$$

Таким образом, векторы $\varepsilon \|g_j\| n_j$ и u_j лежат на одном луче и имеют одинаковые длины, а значит — совпадают.

Если вектор g_j является времениподобным, то $-u_j$ — правая нормаль к g_j , поскольку $(-u_j, g_j) = 0$ и

$$\det \begin{pmatrix} x_j & y_j \\ -y_j & -x_j \end{pmatrix} = -|g_j|^2 > 0.$$

Таким образом, векторы $\varepsilon(g_j) \|g_j\| n_j$ и u_j лежат на одном луче и имеют одинаковые длины, а значит — совпадают.

Наконец, $\sum_{j=1}^k \varepsilon(g_j) \|g_j\| n_j = \sum_{j=1}^k u_j = (\sum_{j=1}^k y_j, \sum_{j=1}^k x_j) = 0$, что и завершает доказательство леммы.

Введем теперь понятие неориентированного угла между двумя ненулевыми неизотропными векторами $x, y \in \mathbb{R}_1^n$ ($n \geq 2$). Пусть Π — ориентированная двумерная плоскость, проходящая через x и y . Тогда реализуется одна из следующих возможностей:

- Если плоскость Π определена единственным образом и является пространственноподобной, то мы упорядочим векторы x, y таким образом, чтобы ориентированный угол (относительно Π) между ними равнялся $\varphi_0 + 2\pi k$ ($0 \leq \varphi_0 \leq \pi$, $k \in \mathbb{Z}$). В этом случае число φ_0 называется неориентированным углом между векторами x и y .

- Если плоскость Π определена единственным образом и является времениподобной, то мы упорядочим векторы x, y таким образом, чтобы вещественная часть θ_0 ориентированного угла (относительно Π) между ними была положительной. В этом случае число θ_0 называется неориентированным углом между векторами x и y .

- Если плоскость Π определена единственным образом, но несет вырожденную метрику, то считаем, что неотриентированный угол между векторами x и y не определен.

- Если векторы x и y лежат на общей прямой линии l , то мы по определению полагаем, что неориентированный угол между векторами x и y равен 0 , если прямая l пространственноподобна и $(x, y) > 0$; равен π , если прямая l пространственноподобна и $(x, y) < 0$; и равен 0 , если прямая l является времениподобной.

Пусть $P \subset \mathbb{R}_1^3$ — замкнутый ориентируемый многогранник такой, что никакое его ребро не лежит на изотропной прямой и никакая его грань не лежит в плоскости, несущей вырожденную метрику. Пусть E и F обозначают множества ребер и граней P соответственно. Предположим, что грани $f_1, f_2 \in F$ имеют общее ребро $g \in E$. Обозначим через m_j внешнюю нормаль единичную нормаль к f_j ($j = 1, 2$), а через $\theta(g)$ — неориентированный угол между векторами m_1 и m_2 . Число

$$M(P) = \frac{1}{2} \sum_{g \in E} \theta(g) \varepsilon(g) \|g\| \quad (6)$$

называется интегральной средней кривизной многогранника P .

Отметим, что если последнее определение применить к многограннику трехмерного евклидова пространства, то мы получим обычное определение интегральной средней кривизны многогранника (см., например, [66]).

Пусть $\{P(t) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_1^3\}$ ($0 \leq t \leq 1$) — гладкое семейство замкнутых ориентируемых многогранников таких, что для каждого t каждое ребро многогранника $P(t)$ лежит на неизотропной прямой, а каждая грань лежит в плоскости, несущей невырожденную метрику. Пусть E и F обозначают множества ребер и граней многогранника $P(t)$. Пусть грани $f_1(t), f_2(t) \in F$ имеют общее ребро $g(t) \in E$. Обозначим через $n_j(t)$ ($j = 1, 2$) единичный вектор, который лежит в плоскости, натянутой на грань $f_j(t)$. Более того, будем предполагать, что вектор $n_j(t)$ перпендикулярен ребру $g(t)$ и

направлен внутрь грани $f_j(t)$. Наконец, обозначим через $m_j(t)$ ($j = 1, 2$) единичный вектор внешней нормали к грани f_j многогранника $P(t)$.

Лемма 9.11. При введенных выше обозначениях, равенство

$$\frac{d\theta(g(t))}{dt} = \left(\frac{dm_1}{dt}, n_1(t) \right) + \left(\frac{dm_2}{dt}, n_2(t) \right) \quad (7)$$

справедливо для всех t таких, что $m_1(t) \neq \pm m_2(t)$.

Доказательство. Пусть $\Pi(t)$ обозначает ориентированную двумерную плоскость, ортогональную ребру $g(t)$. Поскольку $g(t)$ не лежит на изотропной прямой, то $\Pi(t)$ несет невырожденную метрику. Порознь рассмотрим два случая.

Случай I: Ребро $g(t)$ лежит на времениподобной прямой. Тогда $\Pi(t)$ несет евклидову метрику. Пусть единичные векторы e_1, e_2 образуют ортогональный положительно определенный базис в $\Pi(t)$. Обозначим через $\varphi_j(t)$ ($j = 1, 2$) ориентированный угол между векторами e_1 и $m_j(t)$. Если нужно, поменяем местами индексы $j = 1$ и $j = 2$ таким образом, чтобы уравнение $\theta(g(t)) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ выполнялось для интересующего нас значения t и для всех вещественных чисел, достаточно близких к t (см. рис. 3). Тогда

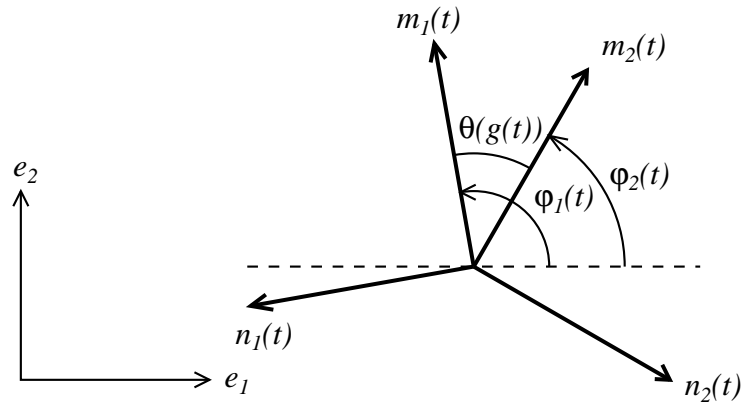


Рис. 3

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \cos \varphi_1(t)e_1 + \sin \varphi_1(t)e_2, \\ m_2(t) &= \cos \varphi_2(t)e_1 + \sin \varphi_2(t)e_2, \\ n_1(t) &= -\sin \varphi_1(t)e_1 + \cos \varphi_1(t)e_2, \\ n_2(t) &= \sin \varphi_2(t)e_1 - \cos \varphi_2(t)e_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dm_1}{dt} &= [-\sin \varphi_1(t)e_1 + \cos \varphi_1(t)e_2] \frac{d\varphi_1}{dt}, \\ \frac{dm_2}{dt} &= [-\sin \varphi_2(t)e_1 + \cos \varphi_2(t)e_2] \frac{d\varphi_2}{dt}, \\ \left(\frac{dm_1}{dt}, n_1(t)\right) + \left(\frac{dm_2}{dt}, n_2(t)\right) &= [\sin^2 \varphi_1(t) + \cos^2 \varphi_1(t)] \frac{d\varphi_1}{dt} + \\ &+ [-\sin^2 \varphi_2(t) - \cos^2 \varphi_2(t)] \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\theta(g(t))}{dt}.\end{aligned}$$

Это доказывает (7) в рассматриваемом случае.

Случай II: Ребро $g(t)$ лежит на пространственноподобной прямой. Тогда плоскость $\Pi(t)$ несет метрику Минковского. Пусть единичные векторы e_1, e_2 образуют стандартный положительно ориентированный базис в плоскости $\Pi(t)$ (в частности, вектор e_1 — пространственноподобен). Обозначим через $\varphi_j(t)$ ($j = 1, 2$) ориентированный угол между векторами e_1 и $m_j(t)$. В случае необходимости поменяем местами индексы $j = 1$ и $j = 2$ таким образом, чтобы при интересующем нас значении параметра t и всех достаточно близких к нему вещественных чисел значение угла $\theta(g(t))$ равнялось вещественной части разности $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ (см. рис. 4). Тогда, в силу леммы 9.9 можем написать

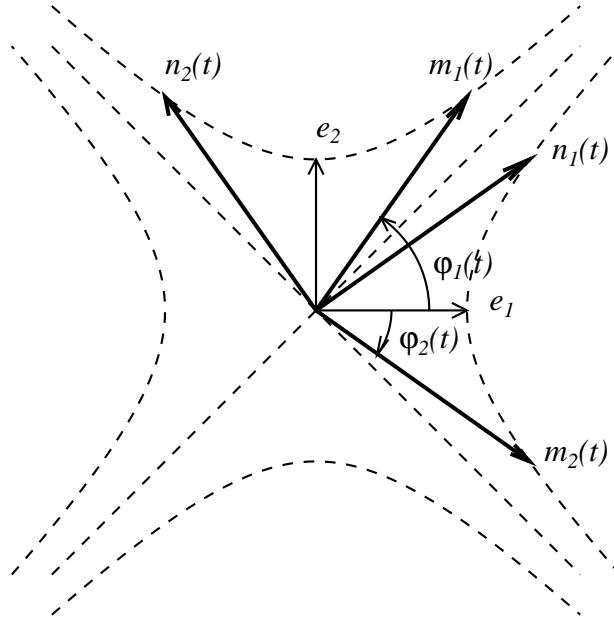


Рис. 4

$$\begin{aligned} m_1(t) &= |m_1| \cosh \varphi_1(t) e_1 + |m_1| \sinh \varphi_1(t) e_2, \\ m_2(t) &= |m_2| \cosh \varphi_2(t) e_1 + |m_2| \sinh \varphi_2(t) e_2. \end{aligned}$$

Используя обычные формулы гиперболической тригонометрии $\cosh(\varphi \pm i\pi/2) = \pm i \sinh \varphi$, $\sinh(\varphi \pm i\pi/2) = \pm i \cosh \varphi$ и принимая во внимание равенства $|n_j| = -i\varepsilon(n_j)|m_j|$ ($j = 1, 2$), мы получаем

$$\begin{aligned} n_1(t) &= |n_1| \cosh(\varphi_1 + i\pi/2) e_1 + |n_1| \sinh(\varphi_1 + i\pi/2) e_2 = \\ &= \varepsilon(n_1) |m_1| \sinh \varphi_1 e_1 + \varepsilon(n_1) |m_1| \cosh \varphi_1 e_2, \\ n_2(t) &= |n_2| \cosh(\varphi_2 - i\pi/2) e_1 + |n_2| \sinh(\varphi_2 - i\pi/2) e_2 = \\ &= -\varepsilon(n_2) |m_2| \sinh \varphi_2 e_1 - \varepsilon(n_2) |m_2| \cosh \varphi_2 e_2, \\ \frac{dm_1}{dt} &= [|m_1| \sinh \varphi_1 e_1 + |m_1| \cosh \varphi_1 e_2] \frac{d\varphi_1}{dt}, \\ \frac{dm_2}{dt} &= [|m_2| \sinh \varphi_2 e_1 + |m_2| \cosh \varphi_2 e_2] \frac{d\varphi_2}{dt}, \\ \left(\frac{dm_1}{dt}, n_1(t) \right) + \left(\frac{dm_2}{dt}, n_2(t) \right) &= \varepsilon(n_1) |m_1|^2 [\sinh^2 \varphi_1 - \cosh^2 \varphi_1] \frac{d\varphi_1}{dt} - \\ &- \varepsilon(n_2) |m_2|^2 [\sinh^2 \varphi_2 - \cosh^2 \varphi_2] \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\theta(g(t))}{dt}. \end{aligned}$$

При выводе последней формулы были использованы равенства $\varepsilon(n_j) |m_j|^2 = -1$ ($j = 1, 2$). Полученные формулы завершают доказательство формулы (7) в случае II, а вместе с этим — и всей леммы.

Теорема 9.12. Пусть P_t ($0 \leq t \leq 1$) — замкнутый ориентируемый изгибаемый многогранник такой, что при каждом значении параметра t ни одно его ребро не лежит на изотропной прямой и ни одна из его граней не содержится в плоскости, немущей вырожденную метрику. Тогда интегральная средняя кривизна многогранника P_t сохраняется в процессе изгибания.

Доказательство. Пусть E и F обозначают множества ребер и граней многогранника P_t соответственно. Для данной грани $f(t) \in F$ обозначим через $m(t)$ единичный вектор внешней нормали к $f(t)$. Для данных грани $f(t) \in F$ и ребра $g(t) \subset f(t)$ обозначим через $n(t)$ единичный вектор, который лежит в плоскости, содержащей грань $f(t)$, перпендикулярен ребру $g(t)$ и направлен внутрь грани $f(t)$.

Принимая во внимание, что длины ребер не зависят от t , мы получаем из (6) следующее равенство, справедливое для всех значений параметра t таких, что у многогранника P_t нет ребер $g(t)$ таких, что $\theta(g(t)) = 0$ или $\theta(g(t)) = \pi$:

$$\frac{d}{dt}M(P_t) = \frac{1}{2} \sum_{g \in E} \frac{d\theta(g(t))}{dt} \varepsilon(g(t)) \|g(t)\| =$$

теперь мы используем лемму 9.11 и суммируем сначала по всем ребрам данной грани, а затем — по всем граням:

$$= \sum_{f \in F} \sum_{g \in E; g \subset f} \left(\frac{dm}{dt}, n\varepsilon(g) \|g\| \right) = \sum_{f \in F} \left(\frac{dm}{dt}, \sum_{g \in E; g \subset f} n\varepsilon(g) \|g\| \right) =$$

теперь мы применяем лемму 9.10:

$$= \sum_{f \in F} \left(\frac{dm}{dt}, 0 \right) = 0. \quad (8)$$

Пусть $\tau \in [0, 1]$. Если у многогранника P_τ имеется ребро $g(\tau)$ такое, что $\theta(g(\tau)) = 0$ или $\theta(g(\tau)) = \pi$, заменим одну из граней, примыкающих к ребру $g(\tau)$ боковой поверхностью тетраэдра, основанием которого служит данная грань, а высота выбрана столь малой, чтобы у получающегося в результате многогранника Q_τ двугранный угол при ребре $g(\tau)$ не равнялся ни 0, ни π . Подобным образом поступим со всеми «нежелательными» ребрами. Многогранник Q_τ , очевидно, является изгибаемым и найдется достаточно малый открытый интервал (a, b) , содержащий число τ , такой что для всех $t \in (a, b)$ ни одно ребро $g(t)$ многогранника Q_t не удовлетворяет равенствам $\theta(g(t)) = 0$ or $\theta(g(t)) = \pi$. Из соотношения (8) следует, что $M(Q_t)$ постоянно по t на (a, b) . Очевидно, $M(P_t)$ является линейной комбинацией интегральной средней кривизны многогранника Q_t и нескольких тетраэдров, каждый из которых движется как твердое тело. Поэтому $M(P_t)$ постоянно на (a, b) , а значит и на $[0, 1]$. Теорема доказана.

Отметим, что в статьях [115] и [118] введено понятие неориентированного угла между двумя неизотропными ненулевыми векторами $x, y \in \mathbb{R}_1^n$, которое отличается от используемого в этой главе.

Отметим также, что в теореме 9.3 построены примеры изгибаемых, но не вложенных и даже не погруженных многогранников. В этом смысле они похожи на октаэдры Брикара в случае евклидовых пространств [73].

Интересно было бы выяснить существуют ли в трехмерном пространстве Минковского вложенные изгибаемые многогранники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Александров А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948.
- [2] Александров А.Д. Выпуклые многогранники. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950.
- [3] Александров А.Д., Владимирова С.М. Об изгибании многогранника с твердыми гранями// Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия. 1962. Вып. 3, N13. С. 138–141. -
- [4] Андреев Е.М. О выпуклых многогранниках в пространстве Лобачевского// Матем. сб. 1970. Т. 81. С. 445–478.
- [5] Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука. 1976.
- [6] Берже М. Геометрия. М.: Мир, 1984. Т. 1.
- [7] Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. Т. 1. Элементарная дифференциальная геометрия. М.- Л.: ОНТИ, 1935.
- [8] Болтянский В.Г. Третья проблема Гильберта. М.: Наука, 1977.
- [9] Бурого Ю.Д., Залгаллер В.А. Изометрические кусочно-линейные погружения двумерных многообразий// Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, N3. С. 76–95.
- [10] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
- [11] Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
- [12] Гайдалович Г.С., Соколов Д.Д. Выпуклые многогранники с инфинитной метрикой// Бюлл. Моск. гос. ун-та. 1986. Т. 41, N5. С. 1–9.
- [13] Гейсберг С.Л. О свойствах нормального отображения, порожденного уравнением $rt - s^2 = -f^2(x, y)$ // Матем. сб. 1970. Т. 82. С. 224–232.
- [14] Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
- [15] Громов М.Л., Рохлин В.А. Вложения и погружения в римановой геометрии// Успехи матем. наук. 1970. Т. 25. Вып. 5. С. 3–62.
- [16] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. Т. 1.
- [17] Долбилин Н.П.; Штанько М.А.; Штогрин М.И. Неизгибаемость квадрильяжа сферы// Докл. Акад. наук. 1997. Т. 354, N4. С. 443–445.

- [18] Долбиллин Н.П.; Штанько М.А.; Штогрин М.И. Неизгибаемость квадрильяжа тора// Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, N4. С. 167–168.
- [19] Долженко Е.П., Соломенцев Е.Д., Чирка Е.М. Дробно-линейное отображение// Математическая энциклопедия. 1979. Т. 2. С. 384–387.
- [20] Ефимов Н.В. Некоторые предложения о жесткости и неизгибаемости// Успехи мат. наук. 1951. Т. 7, N5. С. 215–224.
- [21] Ефимов Н.В. Дифференциальные признаки гомеоморфности некоторых отображений с применением в теории поверхностей//Матем. сб. 1968. Т. 76. С. 499–512.
- [22] Залгаллер В.А. Некоторые изгибания длинного цилиндра// Зап. науч. семина. ПОМИ. 1997. Т. 246. С. 66–83.
- [23] Зорич В.А. О допустимом порядке роста характеристики квазиконформности в теореме М.А.Лаврентьева// ДАН СССР. 1968. Т. 181. С. 530–533.
- [24] Зубков А.Н. Пример нежесткой замкнутой поверхности вращения, имеющей стационарный объем// Таганрог, гос. пед. ин-т. Таганрог. 1984. Деп. в ВИНТИ 31.05.84, N3834.
- [25] Иванова-Каратопраклиева И., Марков П.Е., Сабитов И.Х. Изгибание поверхностей. III// Фундам. прикл. матем. (в печати).
- [26] Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И.Х. Изгибание поверхностей. I// Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. ВИНТИ. 1991. Т. 23. С. 131–184.
- [27] Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И.Х. Изгибание поверхностей. II// Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. ВИНТИ. 1996. Т. 24. С. 108–167.
- [28] Камке Э. Интеграл Лебега — Стилтъяеса. М.: Физматгиз, 1959.
- [29] Кантор Б.Е. К вопросу о нормальном образе полной поверхности отрицательной кривизны// Матем. сб. 1970. Т. 82. С. 220–223.
- [30] Кёйпер Н.Х. Изгибаемые полиэдральные сферы в E^3 , по Роберту Коннелли// Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир. 1980. С. 210–227.
- [31] Коннелли Р. Об одном подходе к проблеме неизгибкости// Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980.— С. 164–209.

- [32] Коннелли Р. Некоторые предположения и нерешенные вопросы в теории изгибаний// Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980.— С. 228–238.
- [33] Кон-Фоссен С.Э. Изгибаемость поверхностей в целом// Успехи мат. наук. 1936. Вып.1. С. 33–76.
- [34] Кон-Фоссен С.Э. Нежесткие замкнутые поверхности// Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М.: Физматгиз. 1959. С. 87–114.
- [35] Куратовский К. Топология. М.: Мир, 1966. Т. 1.
- [36] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
- [37] Милка А.Д. Аналог формулы Бляшке для многогранников// Укр. геометр. сб. Харьков. 1965. Вып. 1. С. 62–64.
- [38] Милка А.Д. О точках относительной нежесткости выпуклой поверхности вращения// Укр. геометр. сб. Харьков. 1965. Вып. 1. С. 65–74.
- [39] Милка А.Д. Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников// Мат. физика, анализ, геометрия. 1994. Т. 1, N1. С. 116–130.
- [40] Милка А.Д. Нежесткие звездчатые бипирамиды А.Д.Александрова и С.М.Владимировой// Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Институт математики им. С.Л.Соболева. 2000. С. 414–430.
- [41] Мышкис А.Д., Бунт А.Я. Об одном достаточном условии гомеоморфизма непрерывно дифференцируемого отображения// Успехи мат. наук. 1955. Т. 10, N1. С. 139–142.
- [42] Павлова О.В. Объем подвески как функция длин ее ребер// Успехи мат. наук. 1995. Т. 50, вып. 4. С. 165–166.
- [43] Перлова Н.Г. О соотношении между жесткостью n -го порядка и аналитической неизгибаемостью// Укр. геом. сб. 1991. Т. 34. С. 98–104.
- [44] Перлова Н.Г. О связи между жесткостью порядка $k > 3$ и аналитической неизгибаемостью поверхностей класса C^1 // Мат. физика, анализ и геом. 1995. Т. 2, N3/4. С. 456–461.
- [45] Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.
- [46] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: ГИТТЛ, 1953.

- [47] Решетняк Ю.Г. О нежестких поверхностях вращения// Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, N4. С. 591–604.
- [48] Решетняк Ю.Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Наука, 1982.
- [49] Сабитов И.Х. Изометрическое погружение локально-евклидовых метрик в \mathbb{R}^3 // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, N3. С. 156–167.
- [50] Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения локально-евклидовых метрик в \mathbb{R}^2 // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу МГУ. 1988. Вып. 23. С. 147–156.
- [51] Сабитов И.Х. Локальная теория изгибающих поверхностей// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНТИ. 1989. Т. 48. С. 196–270.
- [52] Сабитов И.Х. О связях между бесконечно малыми изгибаниями разных порядков// Укр. геометр. сб. 1992. Т. 35. С. 118–124.
- [53] Сабитов И.Х. К проблеме инвариантности объема изгибаемого многогранника// Успехи мат. наук. 1995. Т. 50, вып. 2. С. 223–224.
- [54] Сабитов И.Х. Объем многогранника как функция его метрики// Фундамент. прикл. матем. 1996. Т. 2, N4. С. 1235–1246.
- [55] Сабитов И.Х. Обобщенная формула Герона-Тарталья и некоторые ее следствия// Матем. сб. 1998. Т. 189, N10. С. 105–134.
- [56] Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения локально-евклидовых метрик в \mathbb{R}^2 // Изв. Росс. Акад. Наук, Сер. Матем. 1999. Т. 63, N6. С. 147–166.
- [57] Сабитов И.Х. Объемы многогранников. Библиотека «Математическое просвещение». М.: МЦНМО, 2002.
- [58] Сакс С. Теория интеграла. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
- [59] Троценко Д.А. О нежестких аналитических поверхностях вращения// Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, N5. С. 100–108.
- [60] Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
- [61] Фет А.И. Об условиях Фомина для взаимной однозначности непрерывно дифференцируемого отображения// Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, N5. С. 163–164.
- [62] Фомин А.М. Об одном достаточном условии гомеоморфизма непрерывно дифференцируемого отображения// Успехи мат. наук. 1949. Т. 4, N5. С. 198–199.

- [63] Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.
- [64] Яненко Н.Н. Некоторые вопросы теории вложения римановых метрик в евклидовы пространства// Успехи матем. наук. 1953. Т. 8. Вып. 1. С. 21–100.
- [65] Agard S., Marden A. A removable singularity theorem for local homeomorphisms// Indiana univ. math. J. 1970. V. 20. P. 455–461.
- [66] Alexander R. Lipschitzian mappings and total mean curvature of polyhedral surfaces. I// Trans. Am. Math. Soc. 1985. V. 288. P. 661–678.
- [67] Almgren F.J., Rivin, I. The mean curvature integral is invariant under bending// The Epstein Birthday Schrift. Warwick: University of Warwick, 1998. P. 1–21.
- [68] Artin M. On the solutions of analytic equations// Invent. Math. Vol. 5. P. 277–291.
- [69] Artin M. Algebraic approximation of structures over complete local rings// Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 1969. Vol. 36. P. 23–58.
- [70] Blumenthal L.M. Theory and Applications of Distance Geometry. Oxford: Oxford Univ. Press, 1953.
- [71] Bolker E., Roth B. When is a bitartite graph a rigid framework?// Pacific J. Math. 1980. V. 90. P. 27–44.
- [72] Borsuk K. On homeomorphisms preserving lengths of arcs// Glas. Mat. Ser. III. 1981. V. 16, no.2. P. 307–311.
- [73] Bricard R. Memoire sur la théorie de l’octaèdre articulé// J. Math. Pures Appl. 1897. T. 3. P. 113–148.
- [74] Browder F.E. Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces// Proceedings of symposia in pure math. 1976. V. 18, part 2. Amer. Math. Soc.: Providence.
- [75] Cauchy A. Sur les polygones et polyèdres, Second Mémoire// J. Ecole Polytechnique. 1813. T. 9. P. 87–98.
- [76] Chamberland M., Meisters G. A mountain pass to the Jacobian conjecture// Can. Math. Bull. 1998. V. 41, no.4. P. 442–451.
- [77] Cobo M., Gutierrez C., Llibre J. On the injectivity of C^1 maps of the real plane// Can. J. Math. 2002. V. 54, No.6. P. 1187–1201.
- [78] Connelly R. An immersed polyhedral surface which flexes// Indiana University Math. J. 1976. V. 25, no.10. P. 965–972.

- [79] Connelly R. A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra// Publ. math. IHES. 1977. T. 47. P. 333–338.
- [80] Connelly R. The rigidity of polyhedral surfaces// Math. Mag. 1979. V. 52, no.5. P. 275–283.
- [81] Connelly R. The rigidity of certain cabled frameworks and the second-order rigidity of arbitrarily triangulated convex surfaces// Adv. Math. 1980. V. 37. P. 272–299.
- [82] Connelly R., Whiteley W. Second-order rigidity and prestress stability for tensegrity frameworks// SIAM J. Discrete Math. 1996. Vol. 9, no.3. P. 453–491.
- [83] Connelly R., Sabitov I., Walz, A. The Bellows conjecture// Beitr. Algebra Geom. 1997. V. 38, no.1. P. 1–10.
- [84] Connelly R., Servatius H. Higher-order rigidity — what is the proper definition?// Discr. Comput. Geom. 1994. V. 11, no.2. P. 193–200.
- [85] Crapo H., Whiteley W. Statics of frameworks and motions of panel structures, a projective geometric introduction// Structural Topology. 1982. V. 6. P. 43–82.
- [86] Craven B.D., Nashed, M.Z. Generalized implicit function theorems when the derivative has no bounded inverse// Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 1982. V. 6, no.4. P. 375–387.
- [87] Darboux G. Lecons sur la theorie generale des surfaces. T. 3. Paris, 1894.
- [88] Dehn M. Über die Starrheit konvexer Polyeder// Math. Ann. 1916. S. 77. P. 466–473.
- [89] Eisenhart L.P. Riemannian geometry. Princeton: Princeton Univ. Press, 1926.
- [90] Gale D., Nikaidô H. The Jacobian matrix and global univalence of mappings// Math. Ann. 1965. V. 159. P. 81–93.
- [91] Gluck H. Almost all simply connected closed surfaces are rigid. Geom. Topol., Proc. Conf. Park City 1974, Lect. Notes Math. V. 438 (1975), 225–239. (Пер. на рус.яз. в кн.: Исследования по метрической теории поверхностей. — М. Мир, 1980.)
- [92] Hadamard J. Sur les transformations ponctuelles// Bull. Soc. Math. France. 1906. T. 34. P. 71–84.
- [93] Hartman Ph., Wintner A. Gaussian curvature and local embedding// Amer. J. Math. 1951. V. 73. P. 876–884.

- [94] Herburt I. On intrinsic isometries and rigid subsets of Euclidean spaces// Demonstratio Math. 1989. V. 22, N 4. P. 1205–1227.
- [95] Herburt I., Moszyńska M. On intrinsic embeddings// Glas. Mat. Ser. III. 1987. V. 22, N 2. P. 421–427.
- [96] Herburt I. Some $(n - 1)$ -dimensional rigid sets in \mathbb{R}^n // Geom. Dedicata. 1994. V. 49, no.2. P. 221-230.
- [97] Herburt I., Ungar Š. Rigid sets of dimension $n-1$ in \mathbb{R}^n // Geom. Dedicata. 1999. V. 76. P. 331–339.
- [98] John F. On quasi-isometric mappings. I// Comm. pure appl. math. 1968. V. 21, no.1. P. 77–110.
- [99] Kuiper N. Spheres polyedriques flexibles dans E^3 , d'apres Robert Connelly. Lect. Notes Math. 1979. V. 710, 147–168.
- [100] Maehara H. Vector fields and quadratic surfaces// Ryukyu Math. J. 1998. V. 11. P. 53–63.
- [101] Maehara H., Chinen K. An infinitesimally rigid unit-bar-framework in the plane which contains no triangle// Ryukyu Math. J. 1995. V. 8. P. 37–41.
- [102] Maehara H., Norihide T. A spatial unit-bar-framework which is rigid and triangle-free// Graphs Comb. 1996. V. 12, no.4. P. 341–344.
- [103] Milka A.D. Linear bending of star-like pyramids// C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. II, Fasc. B Mec. 2003. T. 331, no.12. P. 805–810.
- [104] Moszyńska M. On rigid subsets of some manifolds// Colloq. Math. 1989. V. 57, no.2. P. 247–254.
- [105] Nashed M.Z. Generalized inverse mapping theorems and related applications of generalized inverses in nonlinear analysis// Nonlinear equations in abstract spaces, Proc. int. Symp., Arlington 1977. 1978. P. 217–252.
- [106] O'Neill B. Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity. New York: Academic Press, 1983.
- [107] Parthasarathy Th. On global univalence theorems. Berlin: Springer, 1983. (Lecture Notes in Math. V. 977).
- [108] Parthasarathy Th., Ravindran G. Completely mixed games and global univalence in convex regions// Optimization, design of experiments and graph theory: Proc. / Symp., Bombay, dec., 1986. Bombay: Indian Inst. Tech., 1988.

- [109] Plastock R. Homeomorphisms between Banach spaces// Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 200. P. 169–183.
- [110] Pourciau B.H. Global invertibility of nonsmooth mappings// J. math. anal. appl. 1988. V. 131. P. 170–179.
- [111] Rembs E. Zur Verbiegung von Flächen im Großen// Math. Z. 1952. Bd. 56. S. 271–279.
- [112] Rudnik K. Concerning the rigidity problem for subsets of E^2 // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1989. V. 37. P. 251–254.
- [113] Sabitov I.Kh. The volume as a metric invariant of polyhedra// Discrete Comput. Geom. 1998. V. 20, no.4. P. 405–425.
- [114] Sauer R. Infinitesimale Verbiegungen zueinander projektiver Flächen// Math. Ann. 1935. Bd. 111, S. 71–82.
- [115] Schlenker J.-M. Convex polyhedra in Lorentzian space-forms// Asian J. Math. 2001. V. 5, no. 2, 327–364.
- [116] Stachel H. Higher order flexibility of octahedra// Period. Math. Hung. 1999. V. 39, no.1–3. P. 225–240.
- [117] Stachel H. Infinitesimal flexibility of higher order for a planar parallel manipulator// В книге: Karáné, G. (ed.) et al. Topics in algebra, analysis and geometry. Proceedings of the Gyula Strommer national memorial conference, Balatonfüred, Hungary, May 1–5, 1999. Budapest: BPR Kiady, 2000. P. 343–353.
- [118] Suárez-Peiró E. A Schläfli differential formula for simplices in semi-riemannian hyperquadrics, Gauss–Bonnet formulas for simplices in the de Sitter sphere and the dual volume of a hyperbolic simplex// Pac. J. Math. 2000. V. 194, no. 1, 229–255.
- [119] Velimirovic L.S. On the second order infinitesimal bendings of a class of toroids// Mat. Vesn. 1997. V. 49, no.1. P. 51–58.
- [120] Velimirovic L.S. On variation of the volume under infinitesimal bending of a closed rotational surface// Novi Sad J. Math. 1999. V. 29, no.3. P. 377–386.
- [121] Velimirovic, L.S. Change of geometric magnitudes under infinitesimal bending// Facta Univ., Ser. Mech. Autom. Control Robot. 2001. V. 3, no.11. P. 135–148.
- [122] Wallace A.H. Algebraic approximation of curves// Can. J. Math. 1958. V. 10. P. 242–278.

- [123] Whiteley W. Infinitesimally rigid polyhedra. I: Statics of frameworks// Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 285, no.2. P. 431–465.
- [124] Whiteley W. Infinitesimal motions of a bipartite framework// Pacific J. Math. 1984. V. 110, no. 1. P. 233–255.
- [125] Whiteley W. The projective geometry of rigid frameworks’// В книге L. Batten (ed.) and C. Baker (ed). Finite Geometries. New York: Marcel Dekker, 1985. P. 353–370.
- [126] Whiteley W. Rigidity and polarity. I: Statics of sheet structures// Geom. Dedicata. 1987. V. 22. P. 329–362.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

- [A1] Александров В.А. Замечания к гипотезе Сабитова о стационарности объема при бесконечно малом изгибании// Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, N5. С. 16–24.
- [A2] Александров В.А. К теореме Ефимова о дифференциальных признаках гомеоморфизма// Матем. сб. 1990. Т. 181, N2. С. 183–188.
- [A3] Александров В.А. Вложение локально-евклидовых и конформно-евклидовых метрик// Матем. сб. 1991. Т. 182, N8. С. 1105–1117.
- [A4] Александров В.А. Пример одномерного жесткого множества на плоскости// Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, N6. С. 3–9.
- [A5] Александров В.А. О фундаментальной теореме Гейла — Никайдо — Инада об инъективности отображений// Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, N4. С. 715–718.
- [A6] Александров В.А. Новый пример изгибаемого многогранника// Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, N6. С. 1215–1224.
- [A7] Александров В.А. Изгибаемые многогранные поверхности// В кн.: Современное естествознание: Энциклопедия. В 10 т. — Т. 3. Математика. Механика. — М.: Флинта; Наука, 1999. — С. 66–69.
- [A8] Alexandrov V.A. Remarks on Efimov’s theorem about differential tests of homeomorphism// Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 1991. V. 36, no.3–4. P. 101–105.
- [A9] Alexandrov V. An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space// Beitr. Algebra Geom. 1997. V. 38, no.1. P. 11–18.

- [A10] Alexandrov V. Sufficient conditions for the extendibility of an n -th order flex of polyhedra// Beitr. Algebra Geom. 1998. V. 39, no.2. P. 367–378.
- [A11] Alexandrov V. Implicit function theorem for systems of polynomial equations with vanishing Jacobian and its application to flexible polyhedra and frameworks// Monatsh. Math. 2001. V. 132, no.4. P. 269–288.
- [A12] Alexandrov V. Flexible polyhedra in Minkowski 3-space// Manuscripta Math. 2003. V. 111, no.3. P. 341–356.