

**Сумма Бляшке и выпуклые многогранники<sup>1</sup>**  
**В. А. Александров<sup>2</sup>; Н. В. Коптева; С. С. Кутателадзе**

Анатолию Тимофеевичу Фоменко  
к его 60-летию

Abstract. This is an extended version of a lecture given on October 4, 2004 at the research seminar “Differential geometry and applications” (headed by Academician A. T. Fomenko) at Moscow State University. The paper contains an overview of available (but far from well-known) results about the Blaschke addition of convex bodies, some new theorems on the monotonicity of the volume of convex bodies (in particular, convex polyhedra with parallel faces) as well as description of software for visualization of polyhedra with prescribed outward normals and face areas.

**1. Векторная площадь поверхности многогранника.** В нашем изложении мы будем считать известным следующее наблюдение: Пусть  $P$  — компактный выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 2$ );  $n_1, \dots, n_k$  — единичные векторы внешних нормалей к его  $(m-1)$ -мерным граням;  $F_1, \dots, F_k$  —  $(m-1)$ -мерные объёмы его  $(m-1)$ -мерных граней. Тогда

$$\sum_{j=1}^k F_j n_j = 0. \quad (1)$$

Иногда это наблюдение формулируют так: «Векторная площадь поверхности выпуклого многогранника равна нулю» (см., например, [2, стр. 93]). С точки зрения гидродинамики оно означает, что многогранник, погружённый в жидкость и находящийся под действием только сил давления жидкости, остаётся в равновесии. Выпуклость многогранника, конечно, является избыточным требованием. Наблюдение 1 является прямым следствием теоремы Стокса. Его «гладкий» аналог утверждает, что интеграл от единичной внешней нормали по замкнутой поверхности равен нулю. Это утверждение приводится, например, в известном сборнике задач Б. П. Демидовича по математическому анализу (задача 4381). Мы не доказываем наблюдение 1 как общеизвестное. Укажем только следующий его аналог для области на сфере [19]:

Пусть  $\mathbb{S}^2$  — единичная сфера в  $\mathbb{R}^3$  и  $D$  — область на  $\mathbb{S}^2$  с кусочно-гладкой границей. Пусть  $\hat{N}$  обозначает векторное поле на сфере  $\mathbb{S}^2$ , сопоставляющее каждой точке сферы единичный вектор внешней нормали к сфере в этой точке. Пусть  $\hat{n}$  обозначает векторное поле на гладкой части границы  $\partial D$  области  $D$ , которое сопоставляет каждой точке единичный вектор внешней (относительно  $D$ ) нормали к границе  $\partial D$ , параллельный касательной плоскости к сфере в

---

<sup>1</sup>Victor Alexandrov; Natalia Kopteva; S. S. Kutateladze. Blaschke addition and convex polyhedra.

<sup>2</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00104) и Минобразования РФ (грант № E02-1.0-43).

данной точке. Наконец, пусть  $\sigma$  обозначает стандартную меру на сфере  $\mathbb{S}^2$ , а  $s$  обозначает длину дуги на границе области  $D$ . Тогда

$$2 \iint_D \hat{N} d\sigma + \int_{\partial D} \hat{n} ds = 0. \quad (2)$$

Естественно считать, что первый из интегралов, участвующих в формуле (2), задаёт центр тяжести области  $D$ , расположенной на сфере. Было бы любопытно найти по формуле (2) «географические центры» таких областей на земном шаре, искривленностью которых уже нельзя пренебречь (например, — России).

Другим краеугольным камнем нашего изложения будет следующая хорошо известная теорема Г. Минковского [2, стр. 285].

**2. Теорема (Минковский).** Пусть  $m \geq 2$ ,  $F_1, \dots, F_k$  — положительные числа,  $n_1, \dots, n_k$  — единичные векторы в  $\mathbb{R}^m$ , не лежащие в одной гиперплоскости, причём  $\sum_{j=1}^k F_j n_j = 0$ . Тогда существует компактный выпуклый многогранник  $P$  в  $\mathbb{R}^m$ , для которого векторы  $n_1, \dots, n_k$  (и только они) являются векторами внешних нормалей к его  $(m-1)$ -мерным граням, а числа  $F_1, \dots, F_k$  являются  $(m-1)$ -мерными объёмами  $(m-1)$ -мерных граней  $P$ . Более того, такой многогранник  $P$  единственен с точностью до параллельного переноса.

В работе [20] эта теорема Минковского перенесена на некоторый класс невыпуклых многогранников трёхмерного евклидова пространства, называемых ежами. Принятое в [20] определение ежа довольно сложно и включает в себя требование инъективности сферического отображения невыпуклого многогранника. Ссылаясь на недавнее выступление Н. П. Долбилина, А. Т. Фоменко предложил кардинально упростить определение ежа, назвав ежом набор векторов (не лежащих в одной гиперплоскости) и чисел, удовлетворяющих условию (1).

На множестве таких ежей естественным образом определена операция сложения. Суммой двух ежей  $\{n_1, \dots, n_k; F_1, \dots, F_k\}$  и  $\{n'_1, \dots, n'_l; F'_1, \dots, F'_l\}$  называется набор векторов  $\mathcal{N} = \{n_1, \dots, n_k\} \cup \{n'_1, \dots, n'_l\}$ , снабжённых положительными числами по следующему правилу:

- если вектор  $n \in \mathcal{N}$  встречается только в одном из множеств  $\{n_1, \dots, n_k\}$  или  $\{n'_1, \dots, n'_l\}$ , и, для определённости, равен вектору  $n_j$ , то сопоставим вектору  $n$  число  $F_j$ ;
- если же вектор  $n \in \mathcal{N}$  встречается в обоих множествах  $\{n_1, \dots, n_k\}$  и  $\{n'_1, \dots, n'_l\}$ , и, для определённости, равен векторам  $n_j$  и  $n'_p$ , то сопоставим вектору  $n$  число  $F_j + F'_p$ .

При этом, очевидно, набор векторов  $\mathcal{N}$  не лежит ни в какой гиперплоскости и соблюдается условие типа (1), т.е. сумма ежей опять является ежом.

В силу наблюдения 1, компактному выпуклому многограннику соответствует ёж, векторами которого служат единичные внешние нормали к граням старшей размерности, снабжённые «площадями» граней. Два многогранника породят два ежа, сложив которые мы получим нового ежа, которому по теореме Минковского будет соответствовать новый компактный выпуклый многогранник. Такой многогранник определяется с точностью до параллельного переноса. Тем самым на множестве классов транслятов выпуклых многогранников определяется новая операция сложения. Примеры (о которых — ниже), показывают, что эта операция отличается от операции сложения многогранников по Минковскому.

Учитывая важность операции сложения выпуклых тел по Минковскому, представляется естественным изучить свойства этой новой операции. Но сначала, для полноты изложения, напомним некоторые основные факты о сложении по Минковскому.

**3. Сложение выпуклых тел по Минковскому** [2, 4, 10, 11, 33]. Множество  $K + L = \{z \in \mathbb{R}^m | z = x + y, x \in K, y \in L\}$  называется суммой Минковского (или векторной суммой) непустых выпуклых компактных множеств  $K, L \subset \mathbb{R}^m$ .

Другое определение суммы Минковского использует понятие опорной функции выпуклого множества  $K$ , то есть функции  $h_K$ , определённой во всём пространстве  $\mathbb{R}^m$  с помощью формулы

$$h_K(x) = \sup_{y \in K} (x, y),$$

где  $(x, y)$  обозначает стандартное скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$  в  $\mathbb{R}^m$ .

Опорная функция выпуклого компактного множества является выпуклой однородной функцией порядка 1. Более того, между выпуклыми однородными порядка 1 функциями в  $\mathbb{R}^m$  и выпуклыми компактными множествами в  $\mathbb{R}^m$  существует взаимно однозначное соответствие. На взаимной однозначности этого соответствия и базируется другое определение суммы Минковского (естественно, эквивалентное предыдущему): суммой Минковского (или векторной суммой) непустых выпуклых компактных множеств  $K$  и  $L$  из  $\mathbb{R}^m$  называется выпуклое множество  $K + L$ , опорная функция  $h_{K+L}$  которого является суммой опорных функций множеств  $K$  и  $L$ , то есть,  $h_{K+L} = h_K + h_L$ .

Несложно показать, что сумма транслятов (т.е. образов выпуклого тела под действием параллельного переноса всего пространства)  $K$  и  $L$  будет транслятом  $K + L$ . Значит мы можем корректно говорить о сумме Минковского классов транслятов выпуклых тел. Допуская вольность речи, ниже мы порой будем отождествлять класс транслятов выпуклого тела с этим телом.

Понятие векторной суммы выпуклых множеств было введено Минковским для изучения вопросов, связанных с изопериметрическим неравенством [32]. С тех пор это понятие хорошо изучено и нашло широкое применение в самых разнообразных областях математики, см., например, [26] и [33]. Наиболее известным результатом, использующим понятие суммы Минковского, является неравенство Брунна — Минковского

$$(\text{Vol } (K + L))^{1/m} \geq (\text{Vol } K)^{1/m} + (\text{Vol } L)^{1/m}, \quad (3)$$

справедливое для всех выпуклых компактных множеств  $K, L \subset \mathbb{R}^m$ .

**4. Сумма Бляшке выпуклых тел.** Вернёмся, к описанной в пункте 2 операции сложения выпуклых многогранников. Оказывается она известна в литературе как сумма Бляшке. Впрочем, устоявшаяся терминология в определённой степени условна. Например, Б. Грюнбаум пишет [29, стр. 339]: «операция, которую мы назвали суммой Бляшке, была впервые описана Бляшке в [3] для гладких выпуклых множеств, хотя ранее соответствующее сложение многогранников в неявном виде встречалось в работе Минковского [31]».

Сумма Бляшке определяется для произвольных выпуклых тел в  $\mathbb{R}^m$ , т.е. компактных выпуклых множеств с непустой внутренностью. (На самом деле требование непустоты внутренности можно отбросить, но это приведёт к

некоторым техническим трудностям, на которых мы не предполагаем останавливаться в этой статье.) Для этого нам понадобится следующее определение: поверхностной функцией  $S(K, \cdot)$  выпуклого тела  $K$  в  $\mathbb{R}^m$  называется аддитивная функция множеств на единичной сфере  $\mathbb{S}^{m-1}$ , сопоставляющая каждому подмножеству  $U \subset \mathbb{S}^{m-1}$  (поверхностную) меру множества тех точек  $x \in \partial K$ , в каждой из которых существует единичная внешняя нормаль к  $\partial K$  такая, что если отложить её из центра сферы  $\mathbb{S}^{m-1}$ , то конец этой нормали попадёт в множество  $U$ .

Приведём несколько стандартных примеров поверхностных функций.

(4.1) Поверхностная функция сферы радиуса  $r$  в  $\mathbb{R}^m$  пропорциональна поверхностной мере единичной сферы  $\mathbb{S}^{m-1}$  с коэффициентом пропорциональности  $r^{m-1}$ .

(4.2) Поверхностная функция многогранника в  $\mathbb{R}^m$  сосредоточена в нормалях к граням старшей размерности. Её значение в «концевой» точке  $x \in \mathbb{S}^{m-1}$  такой нормали равно  $(m-1)$ -мерному объёму соответствующей грани.

(4.3) Поверхностная функция  $C^2$ -гладкого выпуклого тела задаётся равенством

$$S(K, U) = \int_U \frac{d\sigma}{\varkappa},$$

где  $\varkappa$  — гауссова кривизна поверхности  $\partial K$ , а  $\sigma$  — стандартная мера на сфере  $\mathbb{S}^{m-1}$ .

Понятие поверхностной функции выпуклого тела было введено в 1938 году независимо друг от друга А. Д. Александровым [1] и В. Фенхелем — Б. Йессеном [22]. Это понятие является типичным представителем выпуклого анализа, позволяющим единообразно работать с гладкими и негладкими выпуклыми телами.

Теперь мы готовы сформулировать центральное для этой статьи определение.

*Суммой Бляшке* (классов транслятов) двух выпуклых тел  $K$  и  $L$  в  $\mathbb{R}^m$  называется (класс транслятов) выпуклого тела  $K \# L$ , поверхностная функция которого является суммой поверхностных функций слагаемых:  $S(K \# L, \cdot) = S(K, \cdot) + S(L, \cdot)$ .

Корректность определения суммы Бляшке базируется на следующей разновидности теоремы Минковского о существовании и единственности выпуклого тела с данной поверхностной функцией, впервые доказанной А. Д. Александровым [1]:

**4.4. Теорема.** Пусть на единичной сфере  $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$  задана аддитивная функция множеств  $\mu$  такая, что, во-первых,

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}} x \, d\mu = 0$$

(здесь  $x$  обозначает радиус-вектор точки на сфере  $\mathbb{S}^{m-1}$ ) и, во-вторых, ни для какой гиперплоскости  $\Pi$  мера  $\mu$  не сосредоточена в  $\Pi \cap \mathbb{S}^{m-1}$ . Тогда в  $\mathbb{R}^m$  существует выпуклое тело  $K$ , поверхностная функция которого совпадает с  $\mu$ , т.е. такое тело, что  $S(K, \cdot) = \mu(\cdot)$ . Более того, такое тело  $K$  единственное с точностью до параллельного переноса.

Теорема 2 является частным случаем теоремы 4.4.

Для многогранников только что определённая сумма Бляшке совпадает с операцией, порождённой сложением её и описанной выше в пункте 2.

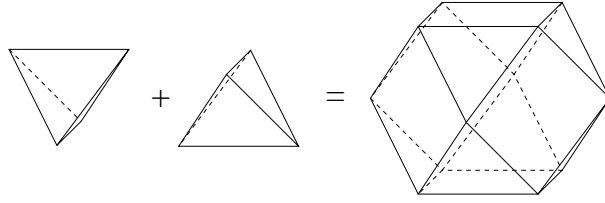


Рис. 1. Сумма Минковского двух тетраэдров

**5. Свойства суммы Бляшке.** Несмотря на очевидную аналогию в определениях суммы Минковского и суммы Бляшке, последняя изучена значительно меньше. Перечислим те свойства суммы Бляшке, которые нам удалось найти в литературе.

(5.1) *На евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  сумма Бляшке любых двух выпуклых многоугольников совпадает с суммой Минковского этих же многоугольников, т.е.  $K\#L = K + L$ .*

Доказательство легко получить, проанализировав, например, детальное построение суммы Минковского выпуклых многоугольников в [11] на стр. 119–122 и 161–164.

(5.2) *В трёх и более мерном пространстве сумма Бляшке выпуклых многогранников не обязательно совпадает с суммой Минковского этих многогранников.*

Не вдаваясь в детали, укажем, в качестве примера следующий рисунок из [2, стр. 264], иллюстрирующий сумму Минковского двух правильных тетраэдров, один из которых получен из другого поворотом на  $90^\circ$  вокруг вертикальной оси. Из рис. 1 видно, что сумма Минковского обсуждаемых тетраэдров является 14-гранником. В то же время непосредственно из определения ясно, что их сумма Бляшке является 8-гранником. Несовпадение очевидно.

(5.3) *Для любых выпуклых тел  $K, L$  в  $\mathbb{R}^m$  справедливо неравенство Кнезера — Зюсса*

$$(\text{Vol } (K\#L))^{1-1/m} \geq (\text{Vol } K)^{1-1/m} + (\text{Vol } L)^{1-1/m},$$

*причём равенство имеет место если и только если  $K$  и  $L$  гомотетичны.*

Доказательство можно найти в [33, теорема 7.1.3] и [30].

(5.4) *Каждый компактный выпуклый многогранник с непустой внутреннейстью в  $\mathbb{R}^m$  может быть представлен как конечная сумма Бляшке симплексов пространства  $\mathbb{R}^m$ . Более того, всегда можно выбрать эти симплексы так, что сумма будет содержать не более  $f - m$  слагаемых, где  $f$  — количество граней старшей размерности в исходном многограннике.*

Доказательство можно найти в [29, стр. 334–335] и [24].

О недостаточной изученности суммы Бляшке свидетельствуют, например, то, что до сих пор не известно можно ли с помощью суммы Бляшке породить функционалы, аналогичные смешанным объёмам, порождаемым суммой Минковского, и доказать неравенства для этих функционалов, аналогичные неравенствам Минковского и Александрова — Фенхеля для смешанных объёмов.

**6. Сумма Бляшке и экстремальные задачи.** Как известно, классическая изопериметрическая задача состоит в том, чтобы среди всех выпуклых



Рис. 2. Максимизация вогнутого функционала

множеств в  $\mathbb{R}^m$ , имеющих данную площадь поверхности, найти то, объём которого максимален. Чтобы применять средства анализа, задачу параметризуют, например, отождествляя выпуклые множества и их опорные функции. При этом приходят к задаче о нахождении максимума «выпуклого вверх»<sup>3</sup> функционала (а именно — объёма множества) в линейном пространстве непрерывных функций на сфере (а именно — опорных функций) при наличии ограничения (в данном случае — постоянстве площади поверхности). Трудности в доказательстве существования и единственности решения классической изопериметрической задачи возникают из-за того, что ограничение даётся функционалом (площадью поверхности), выпуклым в ту же сторону, что и максимизируемый функционал (объём), см. рис. 2 а). Выпуклость обоих функционалов гарантируется как раз неравенством Брунна — Минковского (3) (для площади поверхности имеется соответствующий аналог).

Эти трудности «сами собой» отпадают, если параметризовать задачу, отождествляя выпуклые тела с их поверхностными функциями. При этом ограничение (площадь поверхности постоянна) превратится в гиперплоскость в линейном пространстве всех поверхностных функций, а максимизируемый функционал (объём) по-прежнему будет вогнутым (что гарантируется неравенством Кнезера — Зюсса (5.3)). В такой ситуации применимы самые общие положения теории выпуклых экстремальных задач, в результате чего и существование и единственность решения получаются «даром» (см. рис. 2 б)), а само решение может быть найдено из уравнения Эйлера (выражающего тот факт, что в точке экстремума касательная к максимизируемому функционалу параллельна касательной к функционалу-условию).

В [7] изучался вопрос о том, почему хорошо развитая современная теория экстремальных задач мало помогает в решении изопериметрических задач. Там развит функционально-аналитический взгляд на изопериметрические задачи и, в частности, предложено подразделять их на те, которые «стратегически правильно» параметризовать посредством опорных функций (при этом ключевую роль играет сложение Минковского), посредством поверхностных функций (тут принципиальное значение имеет сложение Бляшке), а также на те, в

<sup>3</sup>Иногда такие функционалы называют вогнутыми. Они характеризуются тем, что у них выпуклым множеством является подграфик, а не надграфик, как у выпуклого функционала.

которых ограничения вообще не допускают параметризации, приводящей к выпуклым экстремальным задачам. Поясним сказанное на примерах известных задач.

(6.1) *Задача Урысона*: среди выпуклых тел в  $\mathbb{R}^m$ , диаметр которых не превосходит 1, найти тело максимального объёма.

С функционально-аналитической точки зрения речь идёт о максимизации вогнутого функционала (а именно — объёма) на выпуклом множестве в линейном пространстве опорных функций (ведь тот факт, что диаметр выпуклого тела  $K$  в направлении  $n \in \mathbb{R}^m$  не превосходит 1 эквивалентен выполнению линейного неравенства  $h_K(n) - h_K(-n) \leq 1$ ). Из общих соображений задача имеет единственное решение, которое находится из уравнения Эйлера. Решение этой задачи было найдено П. С. Урысоном ещё в 1924 году [16]. Он показал, что искомым телом является шар и только шар.

(6.2) *Внутренняя изопериметрическая задача*: среди выпуклых тел в  $\mathbb{R}^m$ , содержащихся в данном выпуклом теле  $T$  и имеющих заданную площадь поверхности, найти выпуклое тело наибольшего объёма.

С функционально-аналитической точки зрения сложность этой задачи в том, что совокупность выпуклых поверхностей, содержащихся в данном выпуклом теле, выпукла относительно сложения Минковского (но не относительно сложения Бляшке), в то время как площадь поверхности линейна относительно сложения Бляшке (а относительно сложения Минковского только вогнута, к тому же «в ту же сторону», что и объём). Такое «смещение стилей», когда часть условий хорошо ведёт себя относительно сложения Минковского, а часть — относительно сложения Бляшке, существенно усложняет эту задачу и приводит к тому, что относительно внутренней изопериметрической задачи известно совсем немного даже в случае, когда  $T$  — тетраэдр. Из необходимого условия экстремума (уравнения Эйлера) ясно, что граница экстремального тела состоит из плоских кусков (там где тело контактирует с границей тетраэдра) и кусков поверхностей постоянной средней кривизны (там, где его поверхность попадает внутрь тетраэдра). В 1994 г. А. В. Погорелов показал, что для любого тетраэдра  $T$ , не обязательно правильного, и любого положительного числа  $H$ , большего  $1/R$ , где  $R$  — радиус шара, вписанного в тетраэдр  $T$ , существует гладкая замкнутая выпуклая поверхность внутри тетраэдра  $T$ , контактирующая со всеми его гранями и имеющая в той её части, которая проходит строго внутри тетраэдра  $T$ , постоянную среднюю кривизну  $H$  [15]. Эта поверхность может быть описана так: сначала нужно сложить по Бляшке тетраэдр  $T$  с шаром специальным образом подобранного радиуса, а затем к результату прибавить ещё один шар, но теперь уже — по Минковскому [15]. Однако построенная таким образом поверхность удовлетворяет лишь необходимому условию экстремума и до сих пор остаётся неясным действительно ли она решает внутреннюю изопериметрическую задачу и имеет ли эта задача единственное решение. Других значимых продвижений в решении внутренней изопериметрической задачи нет.

При решении задач изопериметрического типа со многими ограничениями сумму Бляшке систематически использовал С. С. Кутателадзе [7, 8, 9].

Упомянем также, что различные обобщения «сложения выпуклых компактов по Бляшке» рассматривал В. Файри [23, 25] и другие авторы [17, 18, 34].

## 7. Новые теоремы о монотонности объёма выпуклых тел.

**7.1. Теорема.** Пусть  $K$  и  $L$  — выпуклые тела в  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 2$ ), причём поверхностная функция тела  $K$  не превосходит поверхностной функции тела  $L$ :  $S(K, \cdot) \leq S(L, \cdot)$ . Тогда объём тела  $K$  не превосходит объёма тела  $L$ :  $\text{Vol } K \leq \text{Vol } L$ .

**Доказательство.** Фиксируем число  $0 < t < 1$ . Рассмотрим аддитивную функцию множеств на единичной сфере  $\mathbb{S}^{m-1}$ :  $\mu(\cdot) = S(L, \cdot) - tS(K, \cdot)$ . Поскольку  $t < 1$ , то для всякого множества  $U \subset \mathbb{S}^{m-1}$ , для которого  $S(K, U) > 0$ , с необходимостью выполняется  $\mu(U) > 0$ . С учётом того, что  $S(K, \cdot)$  не сосредоточена ни в какой гиперплоскости (точнее — её носитель не содержится в  $\Pi \cap \mathbb{S}^{m-1}$  ни для какой гиперплоскости  $\Pi$ ), из сказанного заключаем, что  $\mu$  не сосредоточена ни в какой гиперплоскости. Наконец, условие

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}} x d\mu = 0$$

соблюдено потому, что зануляются аналогичные интегралы, вычисленные по аддитивным функциям множеств  $S(K, \cdot)$  и  $S(L, \cdot)$ .

Согласно теореме Минковского 4.4 в пространстве  $\mathbb{R}^m$  найдётся (единственное с точностью до параллельного переноса) выпуклое тело  $M$ , поверхностная функция которого совпадает с  $\mu$ :  $\mu(\cdot) = S(M, \cdot)$ . Но тогда  $S(L, \cdot) = S(M, \cdot) + tS(K, \cdot)$ , а значит,  $L = M \# (t^{1/(m-1)}K)$ . В силу неравенства Кнезера — Зюсса отсюда получаем

$$\begin{aligned} (\text{Vol } L)^{1-1/m} &= (\text{Vol } (M \# (t^{1/(m-1)}K)))^{1-1/m} \geq \\ &\geq (\text{Vol } M)^{1-1/m} + (\text{Vol } (t^{1/(m-1)}K))^{1-1/m} = \\ &= (\text{Vol } M)^{1/(m-1)} + t(\text{Vol } K)^{1-1/m} \geq t(\text{Vol } K)^{1-1/m}. \end{aligned}$$

Устремляя здесь  $t$  к единице, получаем  $(\text{Vol } L)^{1-1/m} \geq (\text{Vol } K)^{1-1/m}$ , что и завершает доказательство теоремы.

Приведём несколько очевидных следствий из теоремы 7.1.

**7.2. Следствие.** Пусть  $\{n_1, \dots, n_k\}$  — единичные векторы внешней нормали к  $(m-1)$ -мерным граням компактного выпуклого многогранника  $P \subset \mathbb{R}^m$  с непустой внутренностью, и пусть  $\{n'_1, \dots, n'_l\}$  — единичные векторы внешней нормали к  $(m-1)$ -мерным граням компактного выпуклого многогранника  $Q \subset \mathbb{R}^m$  с непустой внутренностью. Положим  $\mathcal{N} = \{n_1, \dots, n_k\} \cup \{n'_1, \dots, n'_l\}$ . Для каждого вектора  $n \in \mathcal{N}$  найдём грань  $\Gamma_P(n)$  многогранника  $P$  с внешней нормалью  $n$  и грань  $\Gamma_Q(n)$  многогранника  $Q$  с внешней нормалью  $n$ . Хотя одна из этих граней имеет размерность  $m-1$ . Допустим, что для каждого вектора  $n$  из  $\mathcal{N}$   $(m-1)$ -мерный объём грани  $\Gamma_P(n)$  больше или равен  $(m-1)$ -мерного объёма грани  $\Gamma_Q(n)$ :  $\text{Vol}_{m-1} \Gamma_P(n) \geq \text{Vol}_{m-1} \Gamma_Q(n)$ . Тогда  $m$ -мерный объём многогранника  $P$  не меньше чем  $m$ -мерный объём многогранника  $Q$ :  $\text{Vol}_m P \geq \text{Vol}_m Q$ .

Следствие 7.2 можно сформулировать несколько короче следующим образом.

**7.3. Следствие.** Пусть компактные выпуклые многогранники  $P$  и  $Q$  в пространстве  $\mathbb{R}^m$  таковы, что объём любой  $(m-1)$ -мерной грани многогранника  $P$  больше или равен  $(m-1)$ -мерного объёма параллельной ей грани многогранника  $Q$ , и наоборот объём любой  $(m-1)$ -мерной грани многогранника  $Q$  меньше или равен  $(m-1)$ -мерного объёма параллельной ей грани многогранника  $P$ . Тогда  $m$ -мерный объём многогранника  $P$  больше или равен  $m$ -мерного объёма многогранника  $Q$ :  $\text{Vol}_m P \geq \text{Vol}_m Q$ .



**7.4. Замечание.** Чтобы подчеркнуть нетривиальность утверждений 7.1–7.3, заметим что, в условиях следствия 7.3, нельзя утверждать, что многогранник  $Q$  может быть помещён внутрь многогранника  $P$  подходящим движением всего пространства. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять в трёхмерном евклидовом пространстве в качестве  $P$  куб со стороной 10, а в качестве  $Q$  — прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны граням  $Q$ , а стороны имеют длины 1, 1 и 50: двумерные грани  $Q$  имеют площади, меньшие площадей параллельных им граней  $P$ , но  $Q$  «слишком длинный», чтобы уместиться внутри куба  $P$ . Тем не менее, в соответствии со следствием 7.3, объём куба  $P$  действительно больше объёма параллелепипеда  $Q$ .

Явно указать подобный пример поверхностей с непрерывной кривизной мы не можем. Более того, Бляшке доказал, что на плоскости такой пример невозможен вовсе, см. [3, стр. 138]. Тем не менее, ниже мы докажем, что такой пример существует в  $\mathbb{R}^3$ , а именно, покажем, что существуют бесконечно дифференцируемые выпуклые поверхности  $F, G \subset \mathbb{R}^3$  такие, что в точках с параллельными внешними нормальными векторами гауссова кривизна поверхности  $F$  всегда не больше гауссовой кривизны поверхности  $G$  и, тем не менее, никаким движением пространства поверхность  $G$  не может быть помещена в выпуклое тело, ограниченное поверхностью  $F$ .

Будем считать, что грани упомянутого выше куба  $P$  параллельны координатным плоскостям в  $\mathbb{R}^3$ . Очевидно, найдётся число  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) такое, что для любого единичного вектора  $a \in \mathbb{R}^3$  найдётся грань  $p$  куба  $P$  такая, что внешняя нормаль к  $p$  образует с  $a$  угол не больше  $\alpha$ . Следовательно, площадь проекции грани  $p$  на плоскость, перпендикулярную вектору  $a$ , будет не меньше  $100 \cos \alpha > 0$ . Тем самым мы пришли к очевидному заключению, что площадь проекции куба на любую плоскость в  $\mathbb{R}^3$  равномерно отделена от нуля.

Усложним ситуацию. Поверхностная функция  $S(P, \cdot)$  куба  $P$  сосредоточена в шести точках  $\pm n_1, \pm n_2, \pm n_3$  на единичной сфере и в каждой из этих точек принимает значение 100. Для каждого натурального числа  $s$  и произвольного единичного вектора  $n$  обозначим через  $U_s(n)$  множество точек на сфере  $\mathbb{S}^2$ , лежащих на расстоянии менее  $1/s$  от конца вектора  $n$ , положим  $N = \{\pm n_1, \pm n_2, \pm n_3\}$ , а также построим на сфере  $\mathbb{S}^2$  бесконечно дифференцируемую функцию  $\nu_s$  такую, что (а)  $\nu_s$  равняется нулю вне множества  $\cup_{n \in N} U_s(n)$ ; (б)  $\nu_s$  положительна в каждом из множеств  $U_s(n)$ ,  $n \in N$ ; (в)  $\nu_s$  центрально симметрична, т.е.  $\nu_s(x) = \nu_s(-x)$  для любого  $x \in \mathbb{S}^2$ ; (д) интеграл от функции  $\nu_s$  по стандартной мере  $d\sigma$  на сфере  $\mathbb{S}^2$  по каждому множеству  $U_s(n)$ ,  $n \in N$ , равен 100.

По теореме Минковского 4.4 существует единственное выпуклое тело  $P_s$  в  $\mathbb{R}^3$ , поверхностная функция которого имеет плотность  $\nu_s + 1/s$ :

$$S(P_s, V) = \int_V (\nu_s + 1/s) d\sigma, \quad V \subset \mathbb{S}^2.$$

Ниже мы убедимся, что каждое из тел  $P_s$  бесконечно дифференцируемо, а вся последовательность  $P_1, \dots, P_s, \dots$  равномерно ограничена (т.е. содержится в шаре конечного радиуса). По теореме выбора Бляшке [3, стр. 79] из последовательности  $P_1, \dots, P_s, \dots$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $P_{s_1}, \dots, P_{s_j}, \dots$  (сходимость понимается в метрике Хаусдорфа). Пусть  $P_{s_j} \rightarrow P_0$  при  $j \rightarrow \infty$ . Тогда, с одной стороны,  $S(P_{s_j}, \cdot) \rightarrow S(P_0, \cdot)$ , а с другой стороны, по построению,  $S(P_{s_j}, \cdot) \rightarrow S(P, \cdot)$ . Значит,  $S(P_0, \cdot) = S(P, \cdot)$  и, в силу

единственности выпуклого тела с данной поверхностной функцией (см. теорему Минковского 4.4),  $P_0 = P$ . Следовательно, последовательность бесконечно дифференцируемых поверхностей  $P_{s_1}, \dots, P_{s_j}, \dots$  сходится к кубу  $P$ .

Аналогично можно построить последовательность бесконечно дифференцируемых поверхностей  $Q_{s_1}, \dots, Q_{s_j}, \dots$ , сходящуюся к параллелепипеду  $Q$ . Поскольку неравенство  $S(Q, \{n\}) < S(P, \{n\})$  выполняется для любого  $n \in N$ , то сглаживать поверхностную функцию параллелепипеда  $Q$  можно таким образом, что всюду плотность поверхностной функции поверхности  $Q_{s_j}$  будет меньше или равна, чем плотность поверхностной функции поверхности  $P_{s_j}$  (то есть чем  $\nu_{s_j} + 1/s_j$ ). При таком построении, при каждом  $j \in \mathbb{N}$ , для поверхностей  $P_{s_j}$  и  $Q_{s_j}$  выполнены условия теоремы 7.1, однако, при всех достаточно больших  $j$ , никаким движением всего пространства поверхность  $Q_{s_j}$  нельзя поместить внутрь тела, ограниченного поверхностью  $P_{s_j}$ , поскольку эти поверхности близки, соответственно, к границам многогранников  $Q$  и  $P$ , а (евклидов) диаметр параллелепипеда  $P$  строго больше (евклидова) диаметра куба  $Q$ .

Теперь убедимся, что каждое из тел  $P_s$  бесконечно дифференцируемо. Это непосредственно вытекает из следующей теоремы А. В. Погорелова [12, стр. 523]: *Пусть на единичной сфере  $\mathbb{S}^2$  задана регулярная  $k$  раз дифференцируемая ( $k \geq 3$ ) положительная функция  $\varkappa$ . Пусть эта функция удовлетворяет условию*

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{x d\sigma}{\varkappa(x)} = 0,$$

где  $d\sigma$  — элемент площади сферы  $\mathbb{S}^2$ , а интегрирование распространяется на всю сферу. Тогда существует регулярная (по крайней мере  $k + 1$  раз дифференцируемая) поверхность  $F$ , которая в точке с внешней нормалью  $x$  имеет гауссову кривизну  $\varkappa(x)$ .

Многомерные варианты этой теоремы потребовали значительных усилий и породили обширную литературу, см., например, [5]. Впервые эти теоремы были доказаны А. В. Погореловым [13, 14]. Немного позже они были передоказаны С. Ченгом и Ш. Т. Яу [21], причём последний получил за этот цикл работ Филдсовскую премию за 1980 год. Так что порой на эти многомерные теоремы ссылаются как на «теоремы Погорелова, за которые Яу получил Филдсовскую премию».

Наконец, убедимся, что последовательность  $P_1, \dots, P_s, \dots$  равномерно ограничена (т.е. содержится в евклидовом шаре конечного радиуса). При этом мы будем в значительной степени следовать рассуждениям А. В. Погорелова [12, стр. 506]. Допустим, что рассматриваемая совокупность выпуклых тел не ограничена. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что (евклидов) диаметр тела  $P_s$  больше  $s$ . Тогда внутри тела  $P_s$  найдётся пара точек  $A_s$  и  $B_s$ , расстояние между которыми больше  $s$ . Спроектируем тело  $P_s$  на плоскость  $\Pi$ , перпендикулярную прямой  $A_s B_s$ . При этом мы получим выпуклую фигуру  $\bar{P}_s$ . Выше мы обозначили через  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) такое число, что для любого единичного вектора  $a \in \mathbb{R}^3$  найдётся грань  $p$  куба  $P$  такая, что внешняя нормаль к  $p$  образует с  $a$  угол не больше  $\alpha$ . Отсюда вытекает, что для любого вектора  $a$  найдётся построенная выше область  $U_s(n) \subset \mathbb{S}^2$ ,  $n \in N = \{\pm n_1, \pm n_2, \pm n_3\}$ , такая что произвольный вектор  $x \in U_s(n)$  образует с  $a$  угол не больше  $\alpha - 1/s$ . Следовательно, проекция области  $\widetilde{U}_s(n)$  на поверхности  $\partial P_s$ , соответствующей области  $U_s(n)$  на сфере  $\mathbb{S}^2$ , на плоскость, перпендикулярную вектору  $a$ , будет

иметь площадь, равномерно (по  $a$  и по  $s$ ) отделённую от нуля:

$$\text{площадь проекции области } \widetilde{U}_s(n) = \int_{U_s(n)} \frac{(\nu_s(x) + 1/s) d\sigma}{\cos \angle(x, a)} \geq \frac{100}{\cos(\alpha - 1/s)}.$$

Таким образом, для всех достаточно больших  $s$  площадь выпуклой фигуры  $\overline{P}_s$  не меньше некоторого положительного числа  $\beta$ . Поскольку всякая выпуклая фигура диаметра  $\gamma$  заведомо содержится в некотором круге радиуса  $\gamma$ , а значит имеет площадь не больше  $\pi\gamma^2/4$ , то диаметр фигуры  $\overline{P}_s$  заведомо не меньше, чем  $2\sqrt{\beta/\pi}$ , то есть не меньше некоторого (одного и того же для всех достаточно больших  $s$ ) числа  $2\sqrt{\beta/\pi}$ . Значит внутри выпуклой фигуры  $\overline{P}_s$  найдутся точки  $\overline{C}_s$  и  $\overline{D}_s$ , евклидово расстояние между которыми не меньше  $\sqrt{\beta/\pi}$ . Пусть  $C_s$  и  $D_s$  — точки выпуклого тела, ограниченного поверхностью  $P_s$ , которые проектируются в точки  $\overline{C}_s$  и  $\overline{D}_s$  на плоскость  $\Pi$ . Проведём плоскость  $\tilde{\Pi}$ , параллельную прямым  $A_s B_s$  и  $C_s D_s$ . Спроектируем поверхность  $P_s$  на плоскость  $\tilde{\Pi}$ . Эта проекция содержит четырёхугольник, вершины которого являются проекциями точек  $A_s, B_s, C_s$  и  $D_s$ . Площадь этого четырёхугольника, очевидно, не меньше произведения длин отрезков  $A_s B_s$  и  $C_s D_s$ , т.е. не меньше  $s\sqrt{\beta/\pi}$ . Следовательно, выбрав достаточно большое  $s$ , мы можем сделать площадь проекции поверхности  $P_s$  на плоскость  $\tilde{\Pi}$  больше любого наперёд заданного числа. Отсюда вытекает, что выбрав достаточно большое  $s$ , мы можем сделать площадь поверхности  $P_s$  больше любого наперёд заданного числа. Последнее, однако, невозможно, поскольку выпуклые поверхности  $P_s$  сходятся к поверхности  $P$ , имеющей конечную площадь. Это противоречие завершает доказательство того, что в  $\mathbb{R}^3$  существуют гладкие поверхности, удовлетворяющие условиям теоремы 7.1, ни одну из которых невозможно поместить внутри другой движением всего пространства. Многомерный пример строится аналогично.

**7.5. Теорема.** *Каковы бы ни были выпуклые тела  $K$  и  $L$  в пространстве  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 2$ ), объём их суммы Бляшке не превосходит объёма их суммы Минковского:  $\text{Vol}(K \# L) \leq \text{Vol}(K + L)$ .*

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что достаточно доказать эту теорему для многогранников: общий случай получится в результате предельного перехода.

Для многогранников доказательство ведётся индукцией по размерности пространства  $\mathbb{R}^m$ . Как отмечено в пункте 5.1, на евклидовой плоскости сумма Бляшке любых двух выпуклых многоугольников совпадает с суммой Минковского этих же многоугольников:  $K \# L = K + L$ . Поэтому при  $m = 2$  утверждение теоремы 7.5 тривиально.

Если  $m = 3$ , то, как известно [11, стр. 164], сумма Минковского двух выпуклых многогранников опять является выпуклым многогранником, грани которого получены как сумма Минковского: (а) граней исходных многогранников; (б) грани одного из этих многогранников с ребром или вершиной другого; (с) непараллельных рёбер этих многогранников, причём участвующие здесь грани, рёбра и вершины лежат в опорных плоскостях с параллельными внешними нормальными. Для нас сейчас особенно важны возможности (а) и (б).

В самом деле если слагаемые суммы Минковского имели грани с одинаковой нормалью, то сумма имеет грань с той же нормалью и площадью, большей

или равной сумме площадей слагаемых: ведь, в соответствии с (а), параллельные грани  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  нужно складывать по Минковскому, а, в силу неравенства Брунна — Минковского (3),

$$\text{Vol } (\Gamma_1 + \Gamma_2)^{1/2} \geq \text{Vol } \Gamma_1^{1/2} + \text{Vol } \Gamma_2^{1/2}.$$

Отсюда вытекает

$$\left[ \frac{\text{Vol } (\Gamma_1 + \Gamma_2)}{\text{Vol } \Gamma_1} \right]^{1/2} \geq 1 + \left[ \frac{\text{Vol } \Gamma_2}{\text{Vol } \Gamma_1} \right]^{1/2},$$

а значит

$$\frac{\text{Vol } (\Gamma_1 + \Gamma_2)}{\text{Vol } \Gamma_1} \geq \left\{ 1 + \left[ \frac{\text{Vol } \Gamma_2}{\text{Vol } \Gamma_1} \right]^{1/2} \right\}^2 \geq 1 + \frac{\text{Vol } \Gamma_2}{\text{Vol } \Gamma_1}$$

или

$$\text{Vol } (\Gamma_1 + \Gamma_2) \geq \text{Vol } \Gamma_1 + \text{Vol } \Gamma_2.$$

Следовательно, если мы складываем по Минковскому грани с одинаковыми внешними нормальными, то получаем грань с той же нормалью, причём площадь этой грани не меньше, чем сумма площадей слагаемых. То есть, в этом случае грань многогранника  $K + L$  заведомо имеет не меньшую площадь, чем параллельная ей грань многогранника  $K \# L$ .

Аналогично разбирая случаи (b) и (c) происхождения граней в сумме Минковского  $K + L$  убеждаемся, что площадь каждой грани суммы Минковского не меньше площади параллельной ей грани суммы Бляшке  $K \# L$ . Теперь заключение теоремы 7.5 для многогранников следует из теоремы 7.1 (или её следствий 7.2 или 7.3).

В общем случае шаг индукции осуществляется аналогично проделанному выше переходу от  $m = 2$  к  $m = 3$ .

**8. О точности показателей в неравенствах Брунна — Минковского и Кнезера — Зюсса.** При доказательстве теоремы 7.5 мы по сути указали «арифметическую» причину того, что из выпуклости вверх квадратного корня из площади суммы Минковского плоских фигур вытекает выпуклость вверх самой площади суммы Минковского. Это наводит на мысль о том, что, во-первых, показатели в неравенствах Брунна — Минковского и Кнезера — Зюсса можно изменять в некоторых пределах не нарушая самих неравенств, а, во-вторых, — что должен существовать «неулучшаемый» показатель. Насколько нам известно, в литературе так вопрос не ставился, и мы считаем целесообразным привести здесь соответствующие аргументы невзирая на их бесхитростность.

**8.1. Теорема.** Для каждого  $a \geq 1$  и для любых выпуклых тел  $K$  и  $L$  пространства  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 2$ ) справедливы неравенства

$$(\text{Vol } (K + L))^{a/m} \geq (\text{Vol } K)^{a/m} + (\text{Vol } L)^{a/m} \quad (4)$$

и

$$(\text{Vol } (K \# L))^{a-a/m} \geq (\text{Vol } K)^{a-a/m} + (\text{Vol } L)^{a-a/m}. \quad (5)$$

Вместе с тем для любого  $0 < a < 1$  найдутся выпуклые тела  $K$  и  $L$  пространства  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 2$ ) для которых неравенства (4) и (5) нарушаются.

Другими словами можно сказать, что увеличивая показатель в неравенствах Брунна — Минковского или Кнезера — Зюсса мы огрубляем неравенства, оставляя их верными. Сами же неравенства Брунна — Минковского и Кнезера — Зюсса оптимальны в том смысле, что участвующие в них показатели не могут быть уменьшены.

Для доказательства теоремы 8.1 нам потребуется следующая совершенно элементарная лемма, доказательство которой мы оставляем читателю.

**8.2. Лемма.** Для любых  $a \geq 1$  и  $x > 0$  справедливо неравенство

$$(1+x)^a \geq 1+x^a. \quad (6)$$

Вместе с тем для любого  $0 < a < 1$  найдётся  $x > 0$  такое, что неравенство (6) не выполняется.

**Доказательство теоремы 8.1** приведём лишь для неравенства Брунна — Минковского, поскольку к неравенству Кнезера–Зюсса применимы те же аргументы.

Для всякого  $a \geq 1$  в силу неравенства Брунна — Минковского и неравенства (6) получаем

$$\left[ \frac{\text{Vol}(K+L)}{\text{Vol} K} \right]^{a/m} \geq \left\{ 1 + \left[ \frac{\text{Vol} L}{\text{Vol} K} \right]^{1/m} \right\}^a \geq 1 + \left[ \frac{\text{Vol} L}{\text{Vol} K} \right]^{a/m},$$

что и доказывает справедливость неравенства (4) при  $a \geq 1$ .

Пусть теперь  $0 < a < 1$ . В качестве тела  $K$  выберем шар радиуса  $r$ , а в качестве тела  $L$  — шар радиуса  $R$ . Тогда  $K+L$  будет шаром радиуса  $r+R$ , и, обозначив через  $\omega_m$  объём единичного шара в  $\mathbb{R}^m$ , можем написать  $\text{Vol} K = \omega_m r^m$ ,  $\text{Vol} L = \omega_m R^m$  и  $\text{Vol}(K+L) = \omega_m (r+R)^m$ . При этом неравенство (4) будет эквивалентно такому

$$[\omega_m (r+R)^m]^{a/m} \geq [\omega_m r^m]^{a/m} + [\omega_m R^m]^{a/m},$$

или

$$(r+R)^a \geq r^a + R^a, \quad \text{или} \quad \left( 1 + \frac{r}{R} \right)^a \geq 1 + \left[ \frac{r}{R} \right]^a.$$

Однако, согласно лемме 8.2, при  $0 < a < 1$  последнее неравенство заведомо нарушается для некоторых  $x = r/R$ .

**9. Визуализация суммы Бляшке выпуклых многогранников.** На базе пакета OpenGeometry [27] авторами разработана программа для визуализации суммы Бляшке многогранников в трёхмерном евклидовом пространстве. Основная трудность состоит в построении многогранника, заданного с помощью набора внешних нормалей к граням и площадей граней. Опишем соответствующий алгоритм.

Пусть требуется построить многогранник  $P$ , такой что  $n_1, \dots, n_k$  — единичные векторы внешних нормалей к его граням, а  $F_1, \dots, F_k$  — площади граней.

Мы начинаем с многогранника  $P_0$ , описанного вокруг единичной сферы с центром в начале координат, внешними нормальными к граням которого являются векторы  $n_1, \dots, n_k$ , и деформируем его, изменяя опорные числа и оставляя неизменными векторы  $n_1, \dots, n_k$ .

**Шаг 1.** Пусть  $P_0$  — многогранник, внешними нормальными к граням которого являются векторы  $n_1, \dots, n_k$ , а опорные числа  $h_j = 1$  для всех  $j = 1, \dots, k$ . Ясно, что такой многогранник всегда существует. Обозначим через  $F_1^0, \dots, F_k^0$  площади граней многогранника  $P_0$ . Тогда  $\sum_{j=1}^k F_j^0 n_j = 0$ .

**Шаг 2.** Для каждого  $t \in [0, 1]$  рассмотрим многогранник  $P_t$ , являющийся суммой Бляшке  $(1-t)P_0 \# tP$ , т.е. многогранник, внешними нормальными к граням которого будут векторы  $n_1, \dots, n_k$ , а площадь  $j$ -й грани вычисляется

по формуле  $F_j^t = (1-t)F_j^0 + tF_j$ . Ясно, что для каждого  $t \in [0, 1]$  выполнено  $\sum_{j=1}^k F_j^t n_j = 0$ , и, следовательно, многогранник  $P_t$  существует.

**Шаг 3:** Вычисление опорных чисел  $h_1^t, \dots, h_k^t$  плоскостей  $\alpha_1^t, \dots, \alpha_k^t$ , ограничивающих многогранник  $P_t$ . Мы разбиваем отрезок  $[0, 1]$  на равные интервалы длины  $\Delta t$ . Допустим уже определены опорные числа  $h_1^t, \dots, h_k^t$  многогранника  $P_t$ , соответствующего левому концу некоторого интервала длины  $\Delta t$ . Опорные числа  $h_1^{t+\Delta t}, \dots, h_k^{t+\Delta t}$  многогранника  $P_{t+\Delta t}$ , соответствующего правому концу этого интервала, мы найдём из некоторой линейной системы алгебраических уравнений. Поскольку при  $t = 0$  все опорные числа известны (они равны 1), то как только мы доберёмся до  $t = 1$ , наша задача будет решена.

Опишем построение нужной нам системы уравнений.

Каждый многогранник  $P_t$  определяется заданием опорных чисел  $h_1^t, \dots, h_k^t$ . Поэтому множество всех многогранников  $P_t$  можно представить как подмножество  $k$ -мерного пространства  $\mathbb{R}^k$  с координатами  $h_1^t, \dots, h_k^t$ . Это подмножество открыто, потому что при малых смещениях плоскостей граней грани не исчезают.

Объединим в один класс все многогранники  $P_t$ , равные и параллельные друг другу. Так как перенос определяется тремя составляющими, то каждый класс задаётся  $k - 3$  переменными. Множество всех этих классов образует  $(k - 3)$ -мерное многообразие  $\mathbf{A}_t$ .

Рассмотрим множество  $\mathbf{B}_t$  всех комплексов чисел  $F_1^t, \dots, F_k^t$ , таких что  $F_j^t > 0$  для всех  $j = 1, \dots, k$  и выполнено условие  $\sum_{j=1}^k F_j^t n_j = 0$ . Векторы  $n_1, \dots, n_k$  считаем неизменными. Векторное равенство  $\sum_{j=1}^k F_j^t n_j = 0$  эквивалентно трём скалярным равенствам и, следовательно, определяет в  $\mathbb{R}^k$   $(k - 3)$ -мерную плоскость. Неравенства  $F_j^t > 0$  определяют в ней открытое выпуклое множество. Это и будет многообразие  $\mathbf{B}_t$ .

Таким образом, мы имеем естественное взаимно однозначное отображение  $F : \mathbf{A}_t \rightarrow \mathbf{B}_t$  (см. [2]).

Положим  $\Delta F_j = F_j^{t+\Delta t} - F_j^t$  и  $\Delta h_j = h_j^{t+\Delta t} - h_j^t$ . Тогда

$$\Delta F_j = \frac{\partial F_j}{\partial h_1} \Delta h_1 + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial h_k} \Delta h_k, \quad j = 1, \dots, k. \quad (7)$$

Заметим, что  $\Delta F_j = \Delta t(-F_j^0 + F_j)$ , т.е. является константой для заданного  $\Delta t$ .

Остаётся вычислить  $\frac{\partial F_j}{\partial h_i}$ . Пусть  $j$ -я грань многогранника  $P_t$  высекается плоскостями  $\alpha_{q_1}, \dots, \alpha_{q_{m_j}}$ . Обозначим через  $\ell_{jp}$  длину ребра, лежащего на прямой  $\alpha_j \cap \alpha_p$ . Несложно показать, что при изменении опорного числа  $h_j$  площадь  $j$ -й грани изменяется на величину

$$\frac{\partial F_j}{\partial h_j} = \sum_{p \in \{q_1, \dots, q_{m_j}\}} \ell_{jp} \operatorname{ctg} \angle(n_j, n_p),$$

а площадь  $i$ -й грани ( $i \neq j$ ) — на величину

$$\frac{\partial F_i}{\partial h_j} = \frac{\ell_{ji}}{\sin \angle(n_j, n_i)}.$$

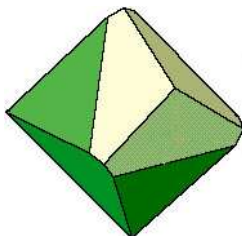
Таким образом, система (7) является системой линейных уравнений ранга  $k - 3$  с  $k$  неизвестными  $\Delta h_1, \dots, \Delta h_k$ . Три неизвестных мы задаём произвольно

```

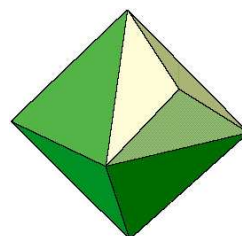
10
1 1 0 2.0412414523
0 1 1 2.0412414523
1 0 1 2.0412414523
-1 1 1 5
1 -1 1 5
1 1 -1 5
-1 -1 1 5
-1 1 -1 5
1 -1 -1 5
-1 -1 -1 5

```

а)



б)



в)

Рис. 3. Построение многогранника Грюнбаума

(например, полагаем равными нулю), а остальные  $k - 3$  неизвестных находим из системы (7). Таким образом, мы находим  $\Delta h_1, \dots, \Delta h_k$ , а значит, и  $h_j^{t+\Delta t} = \Delta h_j + h_j^t$ .

**Шаг 4.** Теперь по известным опорным числам  $h_1^t, \dots, h_k^t$  построим многогранник  $P_t$ . Чтобы это сделать, мы для каждой пары плоскостей  $\alpha_i^t$  и  $\alpha_j^t$  находим множество точек  $\{\alpha_i^t \cap \alpha_j^t \cap \alpha_p^t, p = 1, \dots, k\}$ , из которого затем выбираем точки, являющиеся вершинами многогранника. Поскольку многогранник выпуклый, таких точек не более, чем две. Мы включаем их в список вершин  $\{V\}$  и, если точек оказалось две, присваиваем элементам  $\ell_{ij}$  и  $\ell_{ji}$  расстояние между этими точками. В остальных случаях полагаем  $\ell_{ij} = \ell_{ji} = 0$ .

После того, как список  $\{V\}$  составлен, мы для каждой плоскости  $\alpha_i^t$  выбираем из  $\{V\}$  те точки, которые лежат в  $\alpha_i^t$ . Тем самым определяется  $i$ -я грань многогранника  $P_t$ .

**9.1. Пример.** В процессе деформации многогранник  $P_t$  может менять свою комбинаторную структуру. Чтобы удостовериться, что предложенный алгоритм правильно работает при исчезновении или появлении рёбер, рассмотрим многогранник  $P$ , полученный из октаэдра присоединением тетраэдра, одна из граней которого конгруэнтна грани октаэдра (см. рис. 3 в)).

Для работы программы многогранник  $P$  задается как показано на рис. 3 а). Здесь в первой строке записано число граней, а в каждой следующей строке записаны координаты внешней (не обязательно единичной) нормали к грани и площадь этой грани.

В [28] и [29, стр. 286] показано, что многогранник такого комбинаторного типа не может быть описан вокруг сферы. Многогранник  $P_0$ , описанный вокруг сферы, с теми же внешними нормальными, что и многогранник  $P$ , изображен на рис. 3 б). Хорошо видно несовпадение комбинаторной структуры многогранников  $P$  и  $P_0$ .

**9.2. Замечание.** Пример 9.1 показывает, в частности, что невозможно определить комбинаторную структуру многогранника, зная только векторы внешних нормалей к его граням. (Имеется в виду невозможность определить, какие именно грани многогранника имеют общее ребро.)

Икосаэдр:

```

20
1 1 1 5
-1 1 1 5
1 -1 1 5
1 1 -1 5
-1 -1 1 5
-1 1 -1 5
1 -1 -1 5
-1 -1 -1 5
0 0.6180339887 1.618033989 5
0 -0.6180339887 1.618033989 5
0 0.6180339887 -1.618033989 5
0 -0.6180339887 -1.618033989 5
0.6180339887 1.618033989 0 5
-0.6180339887 1.618033989 0 5
0.6180339887 -1.618033989 0 5
-0.6180339887 -1.618033989 0 5
1.618033989 0 0.6180339887 5
-1.618033989 0 0.6180339887 5
1.618033989 0 -0.6180339887 5
-1.618033989 0 -0.6180339887 5

```

Додекаэдр:

```

12
0 1.618033989 1 3
0 1.618033989 -1 3
0 -1.618033989 1 3
0 -1.618033989 -1 3
1 0 1.618033989 3
-1 0 1.618033989 3
1 0 -1.618033989 3
-1 0 -1.618033989 3
1.618033989 1 0 3
-1.618033989 1 0 3
1.618033989 -1 0 3
-1.618033989 -1 0 3

```

Рис. 4. Исходные данные для икосаэдра и додекаэдра

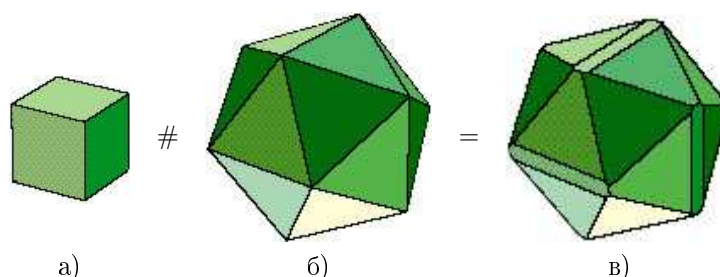


Рис. 5. Сумма Бляшке куба и икосаэдра

**9.3. Пример:** Сумма Бляшке куба и икосаэдра. На рис. 5 в) изображена сумма Бляшке куба, грани которого параллельны координатным плоскостям, а площади граней равны 2, и икосаэдра, заданного как показано на рис. 4.

Результат позволяет выдвинуть гипотезу о наличии параллельных ребер у икосаэдра, которая, конечно же, оказывается верной, а также подсказывает простой способ построения икосаэдра.

Возьмем куб со стороной 2 и построим на его сторонах отрезки, проходящие через середины ребер, как показано на рис. 6 а). На каждом отрезке отметим по две точки на расстоянии  $t = (3 - \sqrt{5})/2$  от тех ребер куба, которым этот отрезок перпендикулярен (рис. 6 б)). Отсекая от куба части плоскостями, проходящими через тройки точек в соответствии с комбинаторной структурой



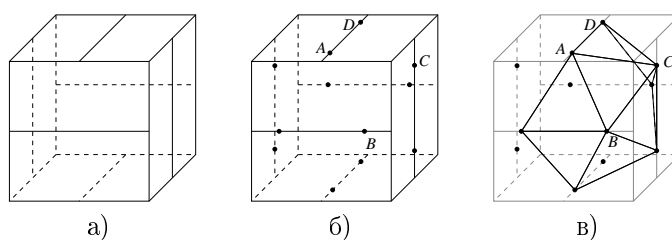


Рис. 6. Построение икосаэдра

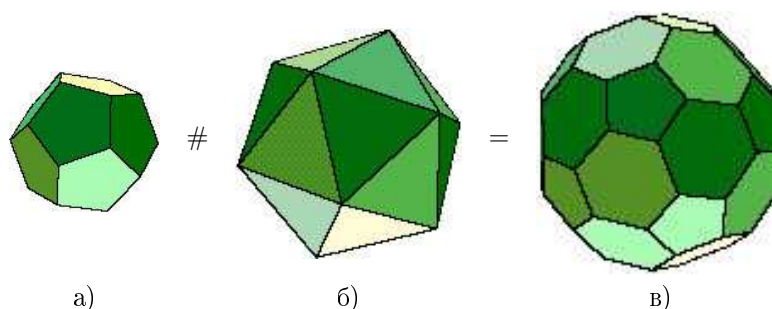


Рис. 7. Сумма Бляшке додекаэдра и икосаэдра

икосаэдра (например, через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а также  $A$ ,  $C$  и  $D$ ), получим икосаэдр (рис. 6 в)).

**9.4. Пример:** Сумма Бляшке додекаэдра и икосаэдра. На рис. 7 в) изображена сумма Бляшке додекаэдра и икосаэдра, заданных как показано на рис. 4. Коротко можно сказать, что сумма Бляшке додекаэдра и икосаэдра является футбольным мячом (который, как известно, шьётся из плоских кожаных пяти- и шестиугольников так, что к каждому пятиугольнику примыкают только шестиугольники, а при обходе сторон любого шестиугольника соседняя грань поочередно оказывается то пяти-, то шестиугольником). Впрочем, у многогранника на рис. 7 в) есть и вполне научное название — «усечённый икосаэдр», см. [6, стр. 33].

**9.5. Замечание.** Наша программа визуализации многогранника с заданными площадями и направлениями граней не является единственной. Нечто подобное осуществлено в [35, 36] при решении задач компьютерной графики. К сожалению, статьи [35, 36] нам не доступны.

**9.6. Замечание.** Наша программа визуализации суммы Бляшке позволяет попутно находить численные значения различных геометрических параметров получаемых многогранников, таких как объём, площадь, средняя кривизна и т.п. Это позволяет нарабатывать геометрическую интуицию и заведомо отвергать некоторые гипотезы, возникающие в процессе работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Александров А. Д. К теории смешанных объёмов выпуклых тел. III: Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела // Мат. сб. 1938. Т. 3, вып. 1. С. 27–44.
- [2] Александров А. Д. Выпуклые многогранники. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.

- [3] *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.
- [4] *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. Пер. с нем. М.: ФАЗИС, 2002.
- [5] *Бураго Ю. Д.* Геометрия поверхностей в евклидовых пространствах // Итоги науки и техн. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. ВИНТИ. 1989. Т. 48. С. 5–97.
- [6] *Веннинджер М.* Модели многогранников. М.: Мир, 1974.
- [7] *Кутателадзе С. С.* Структура Бляшке в программировании изопериметрических задач // Мат. заметки. 1973. Т. 14, №5. С. 745–754.
- [8] *Кутателадзе С. С.* Параметризация выпуклых изопериметрических задач // Сиб. журн. индустр. мат. 1998. Т. 1, №1. С. 132–144.
- [9] *Кутателадзе С. С.* О задачах изопериметрического типа с текущими гиперплоскостями // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 811–815.
- [10] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. Пер. с нем. М.: Наука, 1985.
- [11] *Люстерник Л. А.* Выпуклые фигуры и многогранники. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [12] *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.
- [13] *Погорелов А. В.* Регулярное решение  $n$ -мерной проблемы Минковского // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199. С. 785–788.
- [14] *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского. М.: Наука, 1975.
- [15] *Погорелов А. В.* Погружение «мыльного пузыря» в тетраэдр // Мат. заметки. 1994. Т. 56, №2. С. 90–93.
- [16] *Урысон П.* Зависимость между средней шириной и объемом выпуклых тел в  $n$ -мерном пространстве // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 477–486.
- [17] *Федотов В. П.* О сумме  $p$ -х поверхностных функций // Укр. геом. сб. 1978. Вып. 21. С. 131–141.
- [18] *Федотов В. П.* Контрпример к гипотезе Фаэри // Мат. заметки. 1979. Т. 26, №2. С. 269–275.
- [19] *Alexandrov V.* Problem 10957 // Am. Math. Mon. 2002. V. 109, No.7. P. 664.
- [20] *Alexandrov V.* Minkowski-type and Alexandrov-type theorems for polyhedral herissons. Accepted for publication in Geometriae Dedicata. Available on-line at <http://www.kluweronline.com/issn/0046-5755> (choose link 'Articles in Advance') or <http://xxx.lanl.gov> or <http://www.math.nsc.ru/~vaalex>.
- [21] *Cheng S. Y., Yau Sh. T.* On the regularity of the solution of the  $n$ -dimensional Minkowski problem // Commun. Pure Appl. Math. 1976. V. 29. P. 495–516.
- [22] *Fenchel W., Jessen B.* Mengenfunktionen und konvexe Körper // Danske Vid. Selsk., Mat.-Fys. Medd. 1938. Bd. 16, No.3. S. 1–31.
- [23] *Firey W. J.* Polar means of convex bodies and a dual to the Brunn–Minkowski theorem // Can. J. Math. 1961. V. 13. P. 444–453.
- [24] *Firey W. J., Grünbaum B.* Addition and decomposition of convex polytopes // Isr. J. Math. 1964. V. 2. P. 91–100.
- [25] *Firey, W. J.* Blaschke sums of convex bodies and mixed bodies // Proc. Colloq. Convexity, 1965. Copenhagen: Kobenhavns Univ., 1967. P. 94–101.
- [26] *Gardner R. J.* The Brunn–Minkowski inequality // Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 2002. V. 39, No.3. P.355–405. Electronic version is available at <http://www.ac.wvu.edu/~gardner>.
- [27] *Glaeser G., Stachel H.* Open geometry. OpenGL + advanced geometry. Berlin: Springer, 1999.
- [28] *Grünbaum B.* On Steinitz's theorem about non-inscribable polyhedra // Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A. 1963. V. 66. P. 452–455.
- [29] *Grünbaum B.* Convex polytopes. New York etc.: Springer, 2003.
- [30] *Kneser H., Süß, W.* Die Volumina in linearen Scharen konvexer Körper // Mat. Tidsskr. 1932. Bd. 1. S. 19–25.
- [31] *Minkowski H.* Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder // Gött. Nachr. 1897. S. 198–219.
- [32] *Minkowski H.* Volumen und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd. 57. S. 447–495.
- [33] *Schneider R.* Convex Bodies: the Brunn–Minkowski Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [34] *Schneider R.* Convex surfaces, curvature and surface area measures // В кн.: Gruber P.M. (ed.); Wills J.M. (ed.). Handbook of convex geometry. Volume A. Amsterdam: North-Holland, 1993. P. 273–299.
- [35] *Zouaki H.* Convex set symmetry measurement using Blaschke addition // Pattern Recognition. 2003. V. 36, No.3 P. 753–763.

- [36] *Zouaki H.* Representation and geometric computation using the extended Gaussian image // *Pattern Recognit. Lett.* 2003. V. 24, No.9–10. P. 1489–1501.

Виктор Алексеевич Александров

Наталья Викторовна Коптева

Семён Самсонович Кутателадзе

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. академика Коптюга 4,

630090, Новосибирск, Россия

E-mail address: {alex, natasha, sskut}@math.nsc.ru