МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

АЛЕКСАНДРОВ Виктор Алексеевич

УДК 514.77

ИНЪЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИЗГИБАЕМЫХ МНОГОГРАННИКОВ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2004

Работа выполнена в Институте математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения РАН.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор МГУ Иджад Хакович Сабитов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Николай Петрович Долбилин
	доктор физико-математических наук, профессор Анатолий Дмитриевич Милка
	доктор физико-математических наук, профессор Александр Сергеевич Мищенко
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН

Защита состоится «_1_» октября 2004 г. в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП–2, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14-й этаж).

Автореферат разослан «____» ____________ 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н.Чубариков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. После того, как в 1977 году Р. Коннелли[1] опубликовал пример вложенного замкнутого изгибаемого многогранника, теория изгибаемых многогранников привлекла внимание многих современных геометров. С тех пор были открыты разнообразные и глубокие свойства изгибаемых многогранников, например, — теорема Сабитова о постоянстве объема изгибаемого многогранника в процессе изгибания. Круг задач, методов и математиков, вовлеченных в эту проблематику, неуклонно расширяется.

Цель работы состоит в решении ряда известных и новых задач геометрии «в целом» и прежде всего — теории изгибаемых многогранников.

Методы исследования. В диссертации применяются и развиваются, прежде всего, методы синтетической геометрии, теории поверхностей и геометрической теории функций.

Научная новизна. Все результаты соискателя, включенные в диссертацию, являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в фундаментальных исследованиях по геометрии поверхностей и многогранников, а также в некоторых прикладных исследованиях по теории тонких оболочек, стереохимии, анализу протеинов и т.п.

Вклад диссертации в развитие геометрии «в целом», на наш взгляд, состоит в том, что решен ряд трудных задач, а также предложены новые методы решения некоторых задач геометрии «в целом», интерес к которым в той или иной форме проявляли многие современные геометры. Вот наиболее значимые результаты, выносимые на защиту:

• выведена новая формулировка дифференциального условия Н.В. Ефимова, гарантирующего гомеоморфность отображения $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$;

• найдены условия, гарантирующие вложимость n-мерной локально-евклидовой метрики в пространство $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$;

[1] Connelly R. A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra// Publ. math. IHES. 1977. T. 47. P. 333–338.

• предложен оригинальный метод построения одномерных жестких множеств на плоскости, основанный на теореме устойчивости для пространственных конформных отображений;

• построен пример изгибаемого многогранника в трехмерном сферическом пространстве, не сохраняющего в процессе изгибания ни объем, ни среднюю кривизну;

• предложен новый подход к продолжению бесконечно малых изгибаний многогранников в «настоящие» изгибания, основанный на теореме о неявной функции для систем нелинейных алгебраических уравнений в случае, когда определитель матрицы Якоби равен нулю;

• показано, что в трехмерном пространстве Минковского существуют изгибаемые многогранники, причем все они сохраняют в процессе изгибания и объем и среднюю кривизну.

Апробация работы. Доклады о диссертации в целом были сделаны на следующих семинарах: семинар кафедры дифференциальной геометрии и ее приложений МГУ (рук. акад. А.Т. Фоменко; октябрь 2003), семинар математического отделения Физико-технического института низких температур им. Б.И.Веркина НАН Украины (рук. чл.-корр. НАН Украины Е.Я. Хруслов; октябрь 2003), семинар кафедры геометрии Ростовского гос. университета (рук. проф. С.Б. Климентов; октябрь 2003), семинар отдела анализа и геометрии Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (рук. акад. Ю.Г. Решетняк; ноябрь 2003), общеинститутский математический семинар Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (рук. акад. Ю.Л. Ершов; ноябрь 2003), семинар лаборатории геометрии и топологии Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова (рук. проф. Ю.Д. Бураго; декабрь 2003), семинар кафедры высшей геометрии и топологии МГУ (рук. проф. А.С. Мищенко; январь и февраль 2004), семинар кафедры алгебры МГУ (рук. проф. В.Н. Латышев; февраль 2004), семинар «Геометрия, топология и их приложения» Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (рук. чл.-корр. И.А. Тайманов; март 2004).

Кроме того, результаты, включенные в диссертацию, по мере их появления, докладывались на многих семинарах и конференциях. Назовем только выступления за несколько последних лет: Международная конференция-школа по геометрии и анализу (сентябрь 2002, Новосибирск), конференция по гиперболической геометрии, посвященная 200-летию со дня рождения Я.Больяйи (июль 2002, Будапешт, Венгрия), Вторая российско-германская геометрическая конференция, посвященная 90-летию А.Д. Александрова (июнь 2002, С.-Петербург), семинар лаборатории «Геометрия и динамика» университета Париж-7 (май 2001, рук. проф. Г. Розенберг), конференция по выпуклой геометрии (апрель 2001, Обервольфах, ФРГ), конференция «Геометрия и приложения», посвященная 70-летию В.А. Топоногова (март 2000, Новосибирск), семинар по геометрии в целом на мех.-мате МГУ (ноябрь 1999, рук. доц. Э.Р. Розендорн, проф. МГУ И.Х. Сабитов, проф. Е.В. Шикин), международная конференция «Топология и динамика», посвященная 80-летию В.А. Рохлина (август 1999, С.-Петербург).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах соискателя, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и девяти глав. Она содержит 160 страниц и 31 рисунок. Список цитированной литературы включает 126 наименований. 12 работ соискателя по теме диссертации приведены отдельным списком.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Многие результаты геометрии «в целом» естественным образом могут быть переформулированы в терминах инъективности или сюръективности некоторых специальных отображений метрических пространств или даже областей в $\mathbb{R}^n$. Именно такая трактовка геометрических задач позволила А.Д.Александрову в его знаменитой книге «Выпуклые многогранники»[2] доказать теорему существования для выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$ с данной разверткой, а также теоремы Линделёфа и Минковского. По сути тем же методом Е.М.Андреев доказал теорему о существовании многогранника с заданными двугранными углами в трехмерном пространстве Лобачевского[3]. Недавно Ж.-М.Шленкер вновь

[2] Александров А.Д. Выпуклые многогранники. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950.

[3] Андреев Е.М. О выпуклых многогранниках в пространстве Лобачевского// Матем. сб. 1970. Т. 81. С. 445–478.

успешно применил этот метод для доказательства теоремы о существовании выпуклого многогранника с заданной разверткой в трехмерном пространстве Минковского[4].

Ядро диссертации составляют решения некоторых задач геометрии «в целом», и, прежде всего, — теории изгибаемых многогранников, в решении которых существенную роль играют теоремы о локальной или глобальной обратной или неявной функции. Впрочем, в диссертацию вошли как некоторые близкие по духу задачи геометрии «в целом», решаемые иными методами, так и некоторые специальные проблемы, связанные с инъективностью отображений, не нашедшие пока применения в геометрии.

Диссертация состоит из введения и девяти глав, в каждой из которых обсуждается более или менее замкнутый круг вопросов. Кратко опишем основные результаты, полученные в каждой главе.

В первой главе выводится новая формулировка дифференциального условия Н.В. Ефимова, гарантирующего гомеоморфность отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. На этой основе с помощью теоремы Адамара–Леви–Джона о глобальной обратной функции даются дифференциальные условия, при выполнении которых отображение f не только инъективно, но и сюръективно. Изложение следует работам соискателя[5] и [6].

Если говорить более точно, то Н.В. Ефимов доказал следующую замечательную теорему[7].

Теорема 1.1. *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ принадлежит классу C^1, причем якобиан отображения f всюду отрицателен., т.е. $\det f'(x) < 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Пусть, кроме того, существуют положительная функция $a = a(x) > 0$ и неотрицательные постоянные C_1, C_2 такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство*

$$|1/a(x) - 1/a(y)| \le C_1|x - y| + C_2.$$

[4]Schlenker J.-M. Convex polyhedra in Lorentzian space-forms// Asian J. Math. 2001. V. 5, no. 2, 327–364.

[5]Александров В.А. К теореме Ефимова о дифференциальных признаках гомеоморфизма// Матем. сб. 1990. Т. 181, N2. С. 183–188.

[6]Alexandrov V.A. Remarks on Efimov's theorem about differential tests of homeomorphism// Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 1991. V. 36, no.3–4. P. 101–105.

[7]Ефимов Н.В. Дифференциальные признаки гомеоморфности некоторых отображений с применением в теории поверхностей// Матем. сб. 1968. Т. 76. С. 499–512.

Тогда если для всех $x \in \mathbb{R}^2$ *выполнено неравенство*

$$|\det f'(x)| \geq a(x)|\mathrm{rot}\, f(x)| + a^2(x),$$

то $f(\mathbb{R}^2)$ *есть выпуклая область и* f *отображает* $\mathbb{R}^2$ *на* $f(\mathbb{R}^2)$ *гомеоморфно.* (Здесь $\mathrm{rot}\, f(x)$ означает, как обычно, ротор функции f в точке $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, т. е. $\mathrm{rot}\, f(x) = \partial f_2/\partial x_1(x) - \partial f_1/\partial x_2(x)$.)

В первой главе доказано несколько теорем, аналогичных теореме 1.1, среди которых мы выделим следующую.

Теорема 1.4[8]. *Пусть* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *принадлежит классу* C^1, *причем* $\det f'(x) < 0$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^2$. *Пусть, кроме того, существуют положительная функция* $b(x) > 0$ *и неотрицательные постоянные* C_1, C_2 *такие, что для всех* $x, y \in \mathbb{R}^2$ *справедливо неравенство*

$$|1/b(x) - 1/b(y)| \leq C_1|x - y| + C_2.$$

Тогда если для всех $x \in \mathbb{R}^2$ *выполнено неравенство*

$$|\mu_2(x)| \geq |\mu_1(x)| \geq b(x),$$

где $\mu_1(x)$ *и* $\mu_2(x)$ *— собственные числа линейного отображения* $f'(x)$, *то* $f(\mathbb{R}^2)$ *есть выпуклая область и* f *отображает* $\mathbb{R}^2$ *на* $f(\mathbb{R}^2)$ *гомеоморфно.*

Предложенное соискателем доказательство теоремы 1.4 состоит в том, чтобы убедиться, что из условий теоремы 1.4 вытекают условия теоремы 1.1. Н.С. Даирбековым было замечено что и наоборот, из условий теоремы 1.1 вытекают условия теоремы 1.4. В этом смысле обсуждаемые теоремы эквивалентны. Однако теорема 1.4, по нашему мнению, указывает направление, в котором следует искать многомерные аналоги теоремы Ефимова, что и было сформулировано в качестве гипотезы в работах соискателя 1990 и 1991 годов[8]: ограничения на рост спектрального радиуса обратного отображения от производной влечет инъективность многомерного отображения.

[8] См. сноски [5] и [6] на стр. 6.

Любопытно отметить, что в 1998 году к этой же самой гипотезе (остающейся открытой до сих пор) независимо пришли некоторые зарубежные ученые, специализирующиеся в так называемой вещественной гипотезе якобиана[9], а в 2002 году другой группе зарубежных исследователей, занимающихся преимущественно динамическими системами, удалось обобщить теорему 1.4, показав[10], что отображение f остается инъективным даже если запретить собственным числам его производной приближаться к нулю лишь по вещественной оси (не препятствуя их приближению к нулю по другим направлениям).

Во второй главе вопрос о вложимости локально-евклидовой метрики исследуется с помощью теоремы о глобальной обратной функции[11], [12], [13], [14]. Такой подход позволяет единообразно исследовать вложимость многомерных метрик. Кроме того мы показываем, что если погружение метрики уже построено, то задача о ее вложении может быть решена нашим методом при весьма слабых предположениях о гладкости погружения.

Отправной точкой наших исследований послужила статья И.Х. Сабитова[15] (см. также более позднюю статью[16] того же автора), в которой прослежено, в какой мере гладкость коэффициентов плоской локально-евклидовой метрики определяет гладкость изометрического погружения этой метрики в $\mathbb{R}^2$, изучены вопросы о нахождении изометрического погружения в квадратурах и о том, когда такое погружение является вложением.

---

[9]Chamberland M., Meisters G. A mountain pass to the Jacobian conjecture// Can. Math. Bull. 1998. V. 41, no.4. P. 442–451.

[10]Cobo M., Gutierrez C., Llibre J. On the injectivity of C^1 maps of the real plane// Can. J. Math. 2002. V. 54, No.6. P. 1187–1201.

[11]Browder F.E. Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces// Proceedings of symposia in pure math. 1976. V. 18, part 2. Amer. Math. Soc.: Providence.

[12]Hadamard J. Sur les transformations ponctuelles// Bull. Soc. Math. France. 1906. T. 34. P. 71–84.

[13]John F. On quasi-isometric mappings. I// Comm. pure appl. math. 1968. V. 21, no.1. P. 77–110.

[14]Plastock R. Homeomorphisms between Banach spaces// Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 200. P. 169–183.

[15]Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения локально-евклидовых метрик в $\mathbb{R}^2$ // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу МГУ. 1988. Вып. 23. С. 147–156.

[16]Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения локально-евклидовых метрик в $\mathbb{R}^2$// Изв. Росс. Акад. Наук, Сер. Матем. 1999. Т. 63, N6. С. 147–166.

Допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что во второй главе мы переносим указанные результаты И.Х. Сабитова на многомерные метрики. В качестве типичного результата, полученного в этом направлении соискателем, укажем следующую теорему, дающую ограничения на коэффициенты локально-евклидовой метрики, при выполнении которых шар фиксированного радиуса заведомо допускает изометрическое вложение в евклидово пространство той же размерности.

Теорема 2.11[17]. *Пусть в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, задана локально-евклидова метрика $ds^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(u)du^i du^j$ класса C^m, $m \geq 1$. Для произвольной точки $w \in \mathbb{R}^n$ построим функции*

$$N(t) = \sup_{|v-w| \leq t} V(v) \qquad \text{и} \qquad M(t) = \inf_{|v-w| \leq t} W(v),$$

где

$$V(v) = \sqrt{\prod_{i=1}^{n} g_{ii}(v)}, \qquad W(v) = \frac{1}{V(v)} \sqrt{\frac{\det(g_{kl}(v))}{n \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{g_{ii}(v)}}}.$$

Тогда для всякого положительного R, удовлетворяющего неравенству

$$RN(R) < \int\limits_{0}^{+\infty} M(t)\, dt,$$

евклидов шар радиуса R с центром w, снабженный метрикой ds^2, допускает изометрическое вложение в $\mathbb{R}^n$ класса C^m.

Приводятся примеры, показывающие, что в утверждениях, приводимых в главе 2 и аналогичных цитированной выше теореме 2.11, интегральные ограничения на коэффициенты метрики, вообще говоря, не могут быть ослаблены.

[17] Александров В.А. Вложение локально-евклидовых и конформно-евклидовых метрик// Матем. сб. 1991. Т. 182, N8. С. 1105–1117.

В конце главы 2 мы применяем теоремы В.А. Зорича[18], [19] об устранимости изолированной особой точки локально-квазиконформного отображения к вопросу о вложении n-мерной конформно-евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Результаты главы 2 опубликованы в работе соискателя[20].

Третья глава диссертации посвящена решению интересного вопроса, аналогичного традиционным проблемам геометрии «в целом», при решении которого ключевую роль сыграли теоремы о строении «в целом» 1-квазиизометрических или 1-квазиконформных отображений. Вопрос был инициирован польскими математиками К. Борсуком и М. Мощинской[21] и может быть сформулирован так.

Пусть M — множество в $\mathbb{R}^n$, любые две точки которого могут быть соединены спрямляемой кривой, целиком лежащей в M. Точную нижнюю границу длин всех таких кривых называют внутренним расстоянием ρ_M между данными точками. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$, допускающее введение внутреннего расстояния, называется жестким, если для любого множества $N \subset \mathbb{R}^n$, допускающего введение внутреннего расстояния, любая изометрия $f : (M, \rho_M) \to (N, \rho_N)$ может быть продолжена до изометрии пространства $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой на себя.

Вопрос состоит в том, может ли быть жестким множество $M \subset \mathbb{R}^n$, если его размерность меньше n? Отметим, что дополнительную красоту этому вопросу придает отсутствие каких-либо априорных требований о наличии гладких структур у рассматриваемых множеств и отображений.

В третьей главе строится одномерное жесткое множество в $\mathbb{R}^2$. Построение базируется на оригинальном методе, предложенном соискателем[22], в котором ключевую роль играет теорема устойчивости квазиконформных отображений. Появление этой статьи

---

[18] Зорич В.А. О допустимом порядке роста характеристики квазиконформности в теореме М.А.Лаврентьева// ДАН СССР. 1968. Т. 181. С. 530–533.

[19] Agard S., Marden A. A removable singularity theorem for local homeomorphisms// Indiana univ. math. J. 1970. V. 20. P. 455–461.

[20] См. сноску [17] на стр. 9.

[21] Moszyńska M. On rigid subsets of some manifolds// Colloq. Math. 1989. V. 57, no.2. P. 247–254.

[22] Александров В.А. Пример одномерного жесткого множества на плоскости// Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, N6. С. 3–9.

соскателя стимулировало И. Хербурт и С. Унгара к более детальному изучению жестких множеств, см.[23] и[24]. Уже после того, как диссертация была рассказана в ряде научных центров, в[22] был обнаружен прокол, для устранения которого в тексте диссертации сделаны необходимые исправления в формулировках и рассуждениях сравнительно с[22]. Основной результат остался прежним: одномерное жесткое множество на плоскости существует и может быть построено методом, предложенным в[22] (см. Теорему 3.1 диссертации, которая впервые доказана в[23] совсем другими средствами, а в текст диссертации включена для демонстрации работоспособности метода, предложенного соискателем).

В связи с исследованиями по теории игр нобелевский лауреат по экономике Д. Гейл совместно с Х. Никайдо доказал следующую теорему об инъективности некоторых отображений.

Теорема 4.1[25]. *Пусть* Ω *— прямоугольная область в* $\mathbb{R}^n$*, т. е.* $\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \le x_i \le b_i\}$*, где* a_i*,* b_i *— вещественные числа или* $-\infty$*,* $+\infty$*, и пусть отображение* $F = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *дифференцируемо и, кроме того, каждый главный минор матрицы Якоби*

$$F'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

положителен. Тогда отображение F *инъективно.*

Некоторые вопросы, связанные с этой теоремой, долго оставались или все еще остаются открытыми[26]. Один из них таков: верна ли эта теорема для произвольной выпуклой области Ω? В четвертой главе мы даем отрицательный ответ на этот вопрос. А именно, мы даем геометрическое доказательство следующего утверждения.

---

[23] Herburt I. Some $(n-1)$-dimensional rigid sets in $\mathbb{R}^n$// Geom. Dedicata. 1994. V. 49, no.2. P. 221-230.

[24] Herburt I., Ungar Š. Rigid sets of dimension $n-1$ in $\mathbb{R}^n$// Geom. Dedicata. 1999. V. 76. P. 331–339.

[25] Gale D., Nikaidô H. The Jacobian matrix and global univalence of mappings// Math. Ann. 1965. V. 159. P. 81–93.

[26] Parthasarathy Th. On global univalence theorems. Berlin: Springer, 1983. (Lecture Notes in Math. V. 977).

Теорема 4.2[27]. *Для любого целого $n \geq 2$ существуют эллипсоид $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ и C^∞-отображение $F = (f_1, \ldots, f_n) : \Delta \to \mathbb{R}^n$ такие, что каждый главный минор его матрицы Якоби $F'(x)$ положителен, но F не инъективно.*

Более двадцати лет оставалась открытой так называемая гипотеза кузнечных мехов, согласно которой всякий изгибаемый многогранник сохраняет свой объем в процессе изгибания[28]. Ее положительное решение было дано И.Х. Сабитовым в 1996 году[29]. Один из возможных подходов к гипотезе кузнечных мехов состоял в том, чтобы исследовать ее инфинитезимальный аналог, предложенный И.Х. Сабитовым в одном из комментариев редактора русского перевода работы Р. Коннелли[30], а именно — доказать, что объем нежесткого многогранника стационарен при его бесконечно малых изгибаниях.

В пятой главе мы показываем, что такой инфинитезимальный аналог неверен. Точнее, мы показываем, что у нежесткого многогранника, построенного А.Д. Александровым и С.М. Владимировой[31], объем не стационарен при бесконечно малом изгибании.

Вместе с тем в этой же главе мы показываем, что объем всякой поверхности вращения стационарен при ее бесконечно малых изгибаниях.

Результаты главы 5 опубликованы в работе соискателя[32].

---

[27]Александров В.А. О фундаментальной теореме Гейла — Никайдо — Инада об инъективности отображений// Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, N4. С. 715–718.

[28]Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И.Х. Изгибание поверхностей. I// Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. ВИНИТИ. 1991. Т. 23. С. 131–184.

[29]Сабитов И.Х. Объем многогранника как функция его метрики// Фундам. прикл. матем. 1996. Т. 2, N4. С. 1235–1246.

[30]Коннелли Р. Некоторые предположения и нерешенные вопросы в теории изгибаний// Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980.— С. 228–238.

[31]Александров А.Д., Владимирова С.М. Об изгибании многогранника с твердыми гранями// Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия. 1962. Вып. 3, N13. С. 138–141.

[32]Александров В.А. Замечания к гипотезе Сабитова о стационарности объема при бесконечно малом изгибании// Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, N5. С. 16–24.

Они тесно связаны с целым рядом более поздних работ других авторов, среди которых укажем статьи А.Д. Милки[33], [34], [35], где вводится новый тип непрерывных изгибаний многогранников, названных им линейными изгибаниями, и более детально изучаются бесконечно малые изгибания нежесткого многогранника А.Д. Александрова и С.М. Владимировой; статьи Л.С. Велимирович[36], [37], [38], где более детально изучен вопрос о стационарности объема и других подобных характеристик для некоторых поверхностей вращения; и статьи Ю.Д. Бураго и В.А. Залгаллера[39], [40], в которых изучаются вопросы кусочно-линейного изометрического вложения в $\mathbb{R}^3$ компактных двумерных многообразий с полиэдральной метрикой (но не требуется наличия непрерывного семейства таких вложений). Упомянем также следующую родственную теорему, полученную Н.П. Долбилиным, М.А. Штанько и М.И. Штогриным[41], [42]: погруженный многогранник, гомеоморфный сфере или тору, каждая грань которого является параллелограммом, заведомо не является изгибаемым.

В шестой главе диссертации строятся примеры изгибаемых многогранников, в конструкции которых не используются октаэдры Брикара. Точнее, у каждого октаэдра Брикара и всех примеров

---

[33]Милка А.Д. Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников// Мат. физика, анализ, геометрия. 1994. Т. 1, N1. С. 116–130.

[34]Милка А.Д. Нежесткие звездчатые бипирамиды А.Д.Александрова и С.М.Владимировой// Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Институт математики им. С.Л.Соболева. 2000. С. 414–430.

[35]Milka A.D. Linear bending of star-like pyramids// C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. II, Fasc. B Mec. 2003. T. 331, no.12. P. 805–810.

[36]Velimirovic L.S. On the second order infinitesimal bendings of a class of toroids// Mat. Vesn. 1997. V. 49, no.1. P. 51–58.

[37]Velimirovic L.S. On variation of the volume under infinitesimal bending of a closed rotational surface// Novi Sad J. Math. 1999. V. 29, no.3. P. 377–386.

[38]Velimirovic L.S. Change of geometric magnitudes under infinitesimal bending// Facta Univ., Ser. Mech. Autom. Control Robot. 2001. V. 3, no.11. P. 135–148.

[39]Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Изометрические кусочно-линейные погружения двумерных многообразий// Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, N3. С. 76–95.

[40]Залгаллер В.А. Некоторые изгибания длинного цилиндра// Зап. науч. семин. ПОМИ. 1997. Т. 246. С. 66–83.

[41]Долбилин Н.П.; Штанько М.А.; Штогрин М.И. Неизгибаемость квадрильяжа сферы// Докл. Акад. наук. 1997. Т. 354, N4. С. 443–445.

[42]Долбилин Н.П.; Штанько М.А.; Штогрин М.И. Неизгибаемость квадрильяжа тора// Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, N4. С. 167–168.

изгибаемых многогранников, построенных с помощью октаэдров Брикара, имеется диагональ, длина которой постоянна в процессе изгибания. У многогранников, построенных в главе 6, все диагонали имеют переменную длину. Именно в этом смысле построенные соискателем многогранники не используют октаэдры Брикара. Эти примеры были построены еще до получения И.Х. Сабитовым в 1996 году его знаменитого положительного решения гипотезы кузнечных мехов[43]. Все известные на тот момент изгибаемые многогранники содержали в качестве составной части какой-нибудь из октаэдров Брикара и, казалось, сохраняют свой объем именно благодаря этому обстоятельству. Сейчас ясно, что строить контрпример к гипотезе кузнечных мехов было бессмысленно, но иметь новые примеры изгибаемых многогранников оказалось полезным, по крайней мере, для постановки новых задач.

Результаты главы 6 опубликованы в работе соискателя[44].

До сих пор остается довольно много интересных открытых вопросов, так или иначе связанных с гипотезой кузнечных мехов. Один из них состоит в том, сохраняется ли объем изгибаемого многогранника в трехмерном пространстве Лобачевского. Легко понять, что в трехмерном пространстве Лобачевского всякий идеальный симплекс (т.е. симплекс в вершинами на абсолюте) является изгибаемым и не сохраняет в процессе изгибания ни объем, ни среднюю кривизну. Так что в пространстве Лобачевского интерес представляют компактные изгибаемые многогранники и вопрос о постоянстве объема таких многогранников остается открытым (ясно только что, в соответствии с формулой Шлефли, сохраняется некоторая линейная комбинация объема и средней кривизны).

Оказывается, в трехмерном сферическом пространстве ситуация иная. В седьмой главе построен изгибаемый многогранник, лежащий в открытой полусфере $\mathbb{S}^3_+ \subset \mathbb{R}^4$, и не сохраняющий в процессе изгибания ни объем, ни среднюю кривизну. (Тот факт,

[43]См. сноску [29] на стр. 12.

[44]Александров В.А. Новый пример изгибаемого многогранника// Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, N6. С. 1215–1224.

что в евклидовом пространстве любой размерности $n \geq 3$ замкнутый изгибаемый многогранник сохраняет свою интегральную среднюю кривизну, был впервые установлен Р. Александером[45].) Приклеивая маленькую копию построенного многогранника к произвольному изгибаемому многограннику, можно «слегка подпортить» последний так, что он перестанет сохранять объем и среднюю кривизну в процессе изгибания. Другими словами, построенный частный пример показывает, что сколь угодно близко (в метрике Хаусдорфа) к любому изгибаемому многограннику в трехмерном сферическом пространстве существует изгибаемый многогранник, не сохраняющий в процессе изгибания ни объем, ни среднюю кривизну.

Результаты главы 7 опубликованы в работе соискателя[46].

В восьмой главе изучается вопрос о существовании локальной неявной функции для систем нелинейных алгебраических уравнений в случае, когда определитель матрицы Якоби зануляется в рассматриваемой точке. Найдены как некоторые достаточные условия, гарантирующие существование локальной неявной функции, так и некоторые достаточные условия, гарантирующие ее отсутствие. Развитая при этом техника применяется для доказательства новых и классических теорем об изгибаемости или жесткости многогранников и каркасов (то есть конечных наборов жестких стержней, некоторые из которых соединены в концевых точках с помощью сферических шарниров; одномерный остов многогранника можно интерпретировать как характерный пример каркаса). Опишем результаты главы 8 более подробно.

Пусть $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемое отображение; $t, t_0 \in \mathbb{R}^l$; $X, X_0 \in \mathbb{R}^m$ и пусть $F(t_0, X_0) = 0$. Классическая теорема о неявной функции дает условия, при которых уравнение $F(t, X) = 0$ определяет неявную функцию $X = X(t)$ в некоторой окрестности точки (t_0, X_0). Главное из этих условий состоит в том, чтобы оператор $F'_X(t_0, X_0)$ был обратим.

---

[45] Alexander R. Lipschitzian mappings and total mean curvature of polyhedral surfaces. I// Trans. Am. Math. Soc. 1985. V. 288. P. 661–678.

[46] Alexandrov V. An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space// Beitr. Algebra Geom. 1997. V. 38, no.1. P. 11–18.

Теорема о неявной функции имеет многочисленные приложения и обобщена в самых разных направлениях. В частности, известны варианты этой теоремы, в которых существование неявной функции гарантируется в случае, когда оператор $F'_X(t_0, X_0)$ не обратим, см., например, [47], [48], [49]. В главе 8 мы приводим свой вариант теоремы о неявной функции при вырождении производной и даем примеры ее использования в геометрических задачах.

Наши исследования мотивированы изучением изгибаемых многогранников и каркасов. Возникающие при этом отображения F вообще не зависят от параметра t. Именно на этом частном случае мы и сосредотачиваем свое внимание. Типичным примером системы нелинейных алгебраических уравнений, к которой применимы наши рассуждения, может служить следующая:

$$\begin{aligned} F_1(t, x_1, x_2, x_3) &\equiv x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0, \\ F_2(t, x_1, x_2, x_3) &\equiv 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 = 0, \\ F_3(t, x_1, x_2, x_3) &\equiv x_1 - 3x_2 + x_3 + 3 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Параметр t в эту систему явным образом не входит. Точка $X_0 = (5, 5, 7)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяет системе (1). Определитель матрицы Якоби системы (1) зануляется в точке $X_0 = (x_1, x_{,2}, x_3)$:

$$\det F'_X(t, X_0) = \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 & -2x_3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & -14 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому классическая теорема о неявной функции не применима. Тем не менее, из излагаемых ниже результатов будет следовать, что решение X_0 системы (1) не является изолированным, а принадлежит непрерывному семейству решений $X = X(t)$, которое и является неявной функцией, определяемой системой (1) в окрестности точки X_0.

Пусть $X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и пусть $F(X) = (F_1(X), \dots, F_n(X))$, причем каждая из функций F_k $(k = 1, \dots, n)$ является

---

[47] Artin M. On the solutions of analytic equations// Invent. Math. Vol. 5. P. 277–291.

[48] Nashed M.Z. Generalized inverse mapping theorems and related applications of generalized inverses in nonlinear analysis// Nonlinear equations in abstract spaces, Proc. int. Symp., Arlington 1977. 1978. P. 217–252.

[49] Craven B.D., Nashed, M.Z. Generalized implicit function theorems when the derivative has no bounded inverse// Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 1982. V. 6, no.4. P. 375–387.

многочленом. Не умаляя общности можем считать, что степень каждого многочлена F_k не превосходит 2. В таком случае F_k можно записать в виде

$$F_k(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^k x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i^k x_i + \gamma^k,$$

где $\alpha_{ij}^k = \alpha_{ji}^k$, β_i^k и γ^k — некоторые вещественные числа.

Определим билинейное отображение $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ по правилу: если $X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $Y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, то k-я компонента вектора $B(X, Y)$ равна

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^k x_i y_j, \qquad 1 \le k \le n.$$

Определим также линейное отображение $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ по правилу: если $X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, то k-я компонента вектора $A(X)$ равна

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i^k x_i, \qquad 1 \le k \le n.$$

Определим, наконец, линейное отображение $C : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ формулой $CX = B(X_0, X) + B(X, X_0) + AX$.

Допустим, что в $\mathbb{R}^m$ нам дан конечный набор векторов Y_0, Y_1, $\dots$, Y_q. Выражение

$$Y(t) = \sum_{p=0}^{q} Y_p t^p$$

будем называть приближенным порядка q решением алгебраической системы уравнений $F(X) = 0$, если для каждого $p = 1, 2, \dots, q$ коэффициент при t^p в разложении функции $F(Y(t))$ в ряд Мак-Лорена равен нулю.

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие существования неявной функции, определяемой системой алгебраических уравнений.

Теорема 8.1[50]. *Пусть*

$$Y(t)=\sum_{p=0}^{q} Y_p t^p \tag{2}$$

является приближенным порядка q решением алгебраической системы уравнений $F(X)=0$. Пусть существует число k $(0\leq k< q)$ такое, что для всех $i=1,2,\ldots,q$ и всех $j=k,k+1,\ldots,q$ уравнение

$$CY=-B(Y_i,Y_j)-B(Y_j,Y_i)$$

имеет решение, лежащее в линейной оболочке векторов Y_k, Y_{k+1}, $\ldots$, Y_q. Тогда система уравнений $F(X)=0$ имеет аналитическое семейство решений $X(t)=\sum\limits_{p=0}^{\infty} X_p t^p$, начальный отрезок которого совпадает с приближенным решением (2), т. е. такое семейство, что для всех $p=0,1,\ldots,q$ справедливо равенство $X_p=Y_p$.

Поясним смысл теоремы 8.1 «на пальцах». Если известно приближенное решение $\sum_{p=0}^{q-1} X_p t^p$ порядка $q-1$ алгебраической системы уравнений $F(X)=0$, то для того, чтобы продолжить его в приближенное решение порядка q, мы должны решить (относительно X_q) следующую линейную алгебраическую систему уравнений:

$$CX_q=-\sum_{p=1}^{q-1} B(X_p,X_{q-p}).$$

Теорема 8.1 дает условия, при которых, решив конечное число таких линейных алгебраических систем уравнений, мы можем быть уверены в существовании интересующего нас точного решения, представляющего из себя сумму сходящегося степенного ряда.

В главе 8 приведены примеры, показывающие, что, с одной стороны, условия теоремы 8.1 заведомо являются избыточными, а с другой стороны — их нельзя просто отбросить. Эти примеры показывают, насколько существенны условия теоремы 8.1.

В терминах введенных выше операторов B и C мы указываем также некоторые необходимые условия существования неявной функции, определяемой системой алгебраических уравнений

[50] Alexandrov V. Sufficient conditions for the extendibility of an n-th order flex of polyhedra// Beitr. Algebra Geom. 1998. V. 39, no.2. P. 367–378.

$F(X) = 0$ (см. теорему 8.9 в диссертации). Пример 8.10 показывает, как можно эффективно примененять эти условия.

Развитая в восьмой главе аналитическая техника позволяет доказать ряд классических результатов о бесконечно малых изгибаниях многогранников и их обобщений, называемых каркасами. Например, мы единообразно доказываем, что многогранник, обладающий жесткостью второго порядка, неизгибаем (см. теорему 8.13) и что проективный образ нежесткого многогранника опять является нежестким многогранником (см. теорему 8.15). Из новых результатов, относящихся к бесконечно малым изгибаниям многогранников, упомянем, например, следующий:

Теорема 8.14. *Пусть каркас K в $\mathbb{R}^n$ имеет одно нетривиальное линейно независимое бесконечно малое изгибание первого порядка и пусть существует число $q \geq 2$, для которого K является жестким порядка q. Тогда K является неизгибаемым.*

Отметим, что для гладких поверхностей результаты, аналогичные теореме 8.14, были получены Н.Г. Перловой[51], [52] и И.Х. Сабитовым[53].

Результаты главы 8 опубликованы в работах соискателя [54] и[55].

В девятой, последней, главе доказано, что в трехмерном пространстве Минковского существуют изгибаемые многогранники (не являющиеся, однако, вложенными или погруженными) и что каждый такой многогранник сохраняет в процессе изгибания свой обобщенный объем и интегральную среднюю кривизну. Для доказательства последнего результата детально разработано понятие угла между произвольными двумя ненулевыми неизотропными векторами на плоскости Минковского, которое может представлять независимый интерес. Насколько известно соискателю, ранее такое же понятие угла было предложено Г.С. Гайдаловичем и

[51]Перлова Н.Г. О соотношении между жесткостью n-го порядка и аналитической неизгибаемостью// Укр. геом. сб. 1991. Т. 34. С. 98–104.

[52]Перлова Н.Г. О связи между жесткостью порядка $k > 3$ и аналитической неизгибаемостью поверхностей класса C^1// Мат. физика, анализ и геом. 1995. Т. 2, N3/4. С. 456–461.

[53]Сабитов И.Х. О связях между бесконечно малыми изгибаниями разных порядков// Укр. геометр. сб. 1992. Т. 35. С. 118–124.

[54]См. сноску [50] на стр. 18.

[55]Alexandrov V. Implicit function theorem for systems of polynomial equations with vanishing Jacobian and its application to flexible polyhedra and frameworks// Monatsh. Math. 2001. V. 132, no.4. P. 269–288.

Д.Д. Соколовым[56], но у них многие свойства угла остались невыясненными или недоказанными.

Результаты девятой главы опубликованы в работе[57] соискателя, после написания которой ему стало известно, что в статьях[58] и [59] было введено отличное от использованного им понятие неориентированного угла между двумя произвольными неизотропными ненулевыми векторами пространства Минковского. Однако оказалось, что интегральная средняя кривизна многогранника по сути не зависит от того, какое именно определение угла между векторами используется.

В конце каждой главы приведены нерешенные задачи, цель которых — помочь новым исследователям войти в обсуждаемую проблематику.

ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

1. Александров В.А. Замечания к гипотезе Сабитова о стационарности объема при бесконечно малом изгибании// Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, N5. С. 16–24.
2. Александров В.А. К теореме Ефимова о дифференциальных признаках гомеоморфизма// Матем. сб. 1990. Т. 181, N2. С. 183–188.
3. Александров В.А. Вложение локально-евклидовых и конформно-евклидовых метрик// Матем. сб. 1991. Т. 182, N8. С. 1105–1117.
4. Александров В.А. Пример одномерного жесткого множества на плоскости// Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, N6. С. 3–9.
5. Александров В.А. О фундаментальной теореме Гейла — Никайдо — Инада об инъективности отображений// Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, N4. С. 715–718.
6. Александров В.А. Новый пример изгибаемого многогранника// Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, N6. С. 1215–1224.

[56]Гайдалович Г.С., Соколов Д.Д. Выпуклые многогранники с индефинитной метрикой// Бюлл. Моск. гос. ун-та. 1986. Т. 41, N5. С. 1–9.

[57]Alexandrov V. Flexible polyhedra in Minkowski 3-space// Manuscripta Math. 2003. V. 111, no.3. P. 341–356.

[58]См. сноску [4] на стр. 6.

[59]Suárez-Peiró E. A Schläfli differential formula for simplices in semi-riemannian hyperquadrics, Gauss–Bonnet formulas for simplices in the de Sitter sphere and the dual volume of a hyperbolic simplex// Pac. J. Math. 2000. V. 194, no. 1, 229–255.

7. Александров В.А. Изгибаемые многогранные поверхности// В кн.: Современное естествознание: Энциклопедия. В 10 т. — Т. 3. Математика. Механика. — М.: Флинта; Наука, 1999. — С. 66–69.
8. Alexandrov V.A. Remarks on Efimov's theorem about differential tests of homeomorphism// Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 1991. V. 36, no.3–4. P. 101–105.
9. Alexandrov V. An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space// Beitr. Algebra Geom. 1997. V. 38, no.1. P. 11–18.
10. Alexandrov V. Sufficient conditions for the extendibility of an n-th order flex of polyhedra// Beitr. Algebra Geom. 1998. V. 39, no.2. P. 367–378.
11. Alexandrov V. Implicit function theorem for systems of polynomial equations with vanishing Jacobian and its application to flexible polyhedra and frameworks// Monatsh. Math. 2001. V. 132, no.4. P. 269–288.
12. Alexandrov V. Flexible polyhedra in Minkowski 3-space// Manuscripta Math. 2003. V. 111, no.3. P. 341–356.

Александров Виктор Алексеевич

Инъективные отображения и метрические свойства изгибаемых многогранников

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Подписано в печать 17.06.2004
Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,375
Тираж 100 экз. Заказ №118

Отпечатано ЗАО ИПП «ОФСЕТ»
630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 1.