Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 514.113.5

МНОЖЕСТВО ИЗГИБАЕМЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ МНОГОГРАННИКОВ ДАННОГО КОМБИНАТОРНОГО СТРОЕНИЯ НЕ ВСЕГДА ЯВЛЯЕТСЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ

В. А. Александров

Аннотация. Приведен пример замкнутого неизгибаемого невырожденного многогранника P в трехмерном евклидовом пространстве, который является пределом последовательности неизометричных ему изгибаемых невырожденных многогранников, имеющих одинаковое с P комбинаторное строение. Отсюда выводится, что множество всех изгибаемых невырожденных многогранников, имеющих одинаковое с P комбинаторное строение, не является алгебраическим.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.401

Ключевые слова: изгибаемый многогранник, двугранный угол, октаэдр Брикара, алгебраическое множество.

1. Формулировка основных результатов. *Многогранником* мы называем непрерывное в целом и аффинное на каждом симплексе отображение двумерного симплициального комплекса в трехмерное евклидово пространство, а также образ этого комплекса под действием такого отображения. Мы называем многогранник *вложенным*, если это отображение инъективно.

Вершиной, ребром или *гранью* многогранника мы называем образ k-мерной грани симплициального комплекса при k, равном 0, 1 или 2 соответственно. Многогранник будем называть *невырожденным*, если всякая его грань является невырожденным треугольником (т. е. если вершины одной грани не лежат на одной прямой).

Говорят, что два невырожденных многогранника имеют *одинаковое комбинаторное строение*, если они являются отображениями одного и того же симплициального комплекса или, что то же самое, если между их вершинами, ребрами и гранями можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее инцидентность.

Многогранник называется *изгибаемым*, если его пространственную форму можно изменить непрерывным образом только за счет изменения двугранных углов при ребрах (т. е. таким образом, что размеры всех его граней остаются неизменными в процессе деформации). В противном случае многогранник называется *неизгибаемым.*

Напомним, что в трехмерном евклидовом пространстве существуют вложенные изгибаемые многогранники, гомеоморфные сфере, и что в процессе изгибания любого ориентированного многогранника (не имеющего границы) сохраняются его ориентированный объем и интегральная средняя кривизна.

С этими и другими свойствами изгибаемых многогранников можно познакомиться, например, по обзорным статьям [1–3] и указанной там литературе. Из недавних работ по теории изгибаемых многогранников выделим [4].

Одним из основных результатов данной заметки является

Теорема 1. *В трехмерном евклидовом пространстве существует невырожденный многогранник P, обладающий следующими свойствами:*

(1) *P является образом симплициального комплекса, гомеоморфного двумерной сфере;*

(2) *P неизгибаем;*

(3) *существует последовательность невырожденных многогранников P_n, обладающих следующими свойствами:*

(3а) *для каждого n многогранник P_n имеет то же комбинаторное строение, что и многогранник P;*

(3б) *для каждого n многогранник P_n изгибаем;*

(3в) *при $n \to \infty$ многогранники P_n сходятся к многограннику P.*

Отметим, что вопрос о том, будет ли изгибаемым предел изгибаемых выпуклых многогранников, гомеоморфных диску, изучался, например, Л. А. Шором [5] и А. Д. Александровым [6]. Они доказали, что предельный многогранник может быть как изгибаемым, так и неизгибаемым. Для невыпуклых многогранников без края, насколько нам известно, вопрос о том, будет ли изгибаемым многогранник, являющийся пределом изгибаемых, ранее никем не исследовался.

Чтобы сформулировать еще один основной результат настоящей статьи, условимся об обозначениях.

Пусть Q — какой-нибудь невырожденный многогранник в $\mathbb{R}^3$. Совокупность всех невырожденных многогранников, имеющих одинаковое с Q комбинаторное строение, обозначим через $[\![Q]\!]$. Поскольку все многогранники из $[\![Q]\!]$ являются кусочно-аффинными отображениями одного и того же симплициального комплекса K, один раз фиксировав нумерацию вершин K, тем самым получим «каноническую» нумерацию всех вершин любого многогранника из $[\![Q]\!]$. Обозначим число вершин комплекса K через v. Взяв произвольный многогранник из $[\![Q]\!]$, запишем по порядку все координаты всех его вершин. Получим точку в пространстве $\mathbb{R}^{3v}$ и тем самым определим отображение $\varphi : [\![Q]\!] \to \mathbb{R}^{3v}$. Поскольку $[\![Q]\!]$ состоит из невырожденных многогранников, его образ $\varphi([\![Q]\!])$ является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^{3v}$. Символом $F_{[\![Q]\!]}$ обозначим совокупность всех изгибаемых многогранников из $[\![Q]\!]$.

Теорема 2. *Пусть P — многогранник, существование которого гарантирует теорема 1, и v — число вершин многогранника P. В $\mathbb{R}^{3v}$ не существует алгебраического множества A такого, что $\varphi(F_{[\![P]\!]}) = A \cap \varphi([\![P]\!])$.*

Несколько утрируя ситуацию, теорему 2 можно высказать так: совокупность $F_{[\![Q]\!]}$ всех изгибаемых невырожденных многогранников данного комбинаторного строения не всегда является алгебраическим множеством. Тем самым множество $F_{[\![Q]\!]}$ всех изгибаемых невырожденных многогранников кардинально отличается от множества $N_{[\![Q]\!]}$ всех нежестких (т. е. допускающих нетривиальные бесконечно малые изгибания) многогранников данного комбинаторного строения. Как показано в [7, 8], в $\mathbb{R}^{3v}$ существует алгебраическое множество A

такое, что для любого невырожденного многогранника Q имеет место равенство $\varphi(N_{[\![Q]\!]}) = A \cap \varphi([\![Q]\!])$.

План дальнейшей части данной статьи таков. В пп. 2–4 мы строим некоторые вспомогательные многогранники и изучаем их свойства, необходимые для доказательства теоремы 1. Доказательства теорем 1 и 2 приведены в пп. 5 и 6 соответственно.

2. Октаэдр Брикара $B(r)$. Начнем с построения некоторого вспомогательного изгибаемого октаэдра B. В литературе его называют *изгибаемым октаэдром Брикара типа* 2 (см., например, [9–12; 13, с. 239–240] или [14] и указанную там литературу).

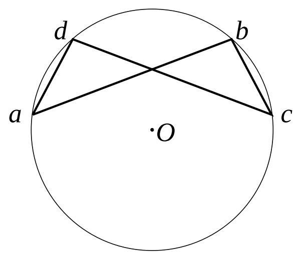

Рис. 1. Четырехугольный шарнирный механизм.

На плоскости рассмотрим два отрезка ab и bc, не лежащие на одной прямой (рис. 1). Пусть точка d симметрична точке b относительно прямой, перпендикулярной отрезку ac и проходящей через его середину. Будем считать, что четыре отрезка ab, bc, cd и da соединены между собой шарнирами в вершинах a, b, c и d, и будем непрерывным образом деформировать этот четырехугольный шарнирный механизм за счет изменения углов между образующими его четырьмя отрезками таким образом, чтобы длины этих отрезков оставались неизменными, а сами точки a, b, c и d всегда лежали в одной плоскости.

Сделанных выше предположений достаточно, чтобы провести построение октаэдра Брикара типа 2. Но для доказательства теоремы 1 нам будет удобнее иметь дело не с произвольным октаэдром Брикара типа 2, а с таким, который подчинен следующим двум дополнительным условиям: в процессе деформации шарнирного механизма ни в какой момент (а) точки a, b, c и d не лежат на одной прямой, (б) отрезки ad и bc не лежат на параллельных прямых. Всюду ниже будем считать условия (а) и (б) выполненными, хотя они не потребуются нам раньше п. 5.

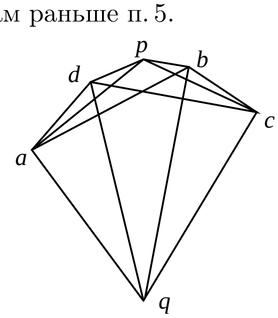

Рис. 2. Октаэдр Брикара $B(r)$.

Очевидно, что при любой описанной выше деформации точка d будет лежать на окружности, проходящей через точки a, b и c. Обозначим центр этой окружности через O, а ее радиус — через r. (При этом условие (б) эквивалентно тому, что ни один из отрезков ab, cd не проходит через точку O.) Фиксируем одно из допустимых значений $r = r_0$. Затем фиксируем параметры $t > s \geq r_0$. На протяжении всей данной статьи символы s и t всегда будут обозначать именно эти значения параметров. В дальнейших построениях будем считать, что переменная r обозначает радиус окружности, проходящей через точки a, b и c, и удовлетворяет неравенствам $s - \varepsilon < r \leq s$, где ε — достаточно малое положительное число. На прямой, перпендикулярной плоскости abc и проходящей через точку O, отложим две точки $p = p(r)$ и $q = q(r)$ так, чтобы они лежали по разные стороны от плоскости abc, расстояние от p до O равнялось $\sqrt{s^2 - r^2}$, а расстояние от q до O равнялось $\sqrt{t^2 - r^2}$.

Соединим каждую из точек a, b, c и d с каждой из точек p и q отрезком прямой, как показано на рис. 2. Получившиеся 6 точек и 12 отрезков вместе со следующими восемью невырожденными треугольниками abp, bcp, cdp, dap, abq, bcq, cdq и $daqz$ образуют многогранник $B = B(r)$, имеющий ту же комбинаторную структуру, что и правильный (выпуклый) октаэдр. При этом становится понятным геометрический смысл фиксированных ранее параметров t и s: они являются длинами «боковых ребер» ap, bp, cp, dp и соответственно aq, bq, cq, dq октаэдра $B(r)$.

Октаэдр $B(r)$ называют *октаэдром Брикара* типа 2. Об октаэдрах Брикара типа 1 и типа 3 заинтересованный читатель может прочитать, например, в [9–12; 13, с. 239, 240; 14], но нам они не понадобятся и на их описаниях мы не останавливаемся.

Для нас важно, что октаэдр $B(r)$ изгибаем. Это следует из того, что параметр r можно изменять произвольно в пределах некоторого отрезка $s-\varepsilon < r \leq s$ на вещественной прямой и при этом длины всех ребер октаэдра $B(r)$ будут оставаться неизменными. Более того, октаэдр Брикара $B(r)$ допускает только однопараметрическое семейство изгибаний. Это означает, что всякая непрерывная деформация октаэдра $B(r)$, сохраняющая длины всех его ребер и величину r, порождается некоторым семейством изометрических преобразований всего пространства.

Никаких глубоких свойств однопараметрических многогранников нам не понадобится. Но заинтересованный читатель может познакомиться с классом однопараметрических изгибаемых многогранников по статье [15] и указанной там литературе.

Чтобы сформулировать второе существенное для нас свойство октаэдра $B(r)$, обозначим через $\alpha(r)$ величину меньшего из двугранных углов между треугольниками abq и adq и через $\beta(r)$ — величину меньшего из двугранных углов между треугольниками adq и dcq. Из рис. 2 ясно, что при $r = s$ точка p лежит в плоскости, проходящей через точки a, b, c и d, и в то же время одна из величин $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ принимает свое минимальное значение, а другая — максимальное. Для определенности будем считать, что именно $\alpha(r)$ достигает минимума при $r = s$.

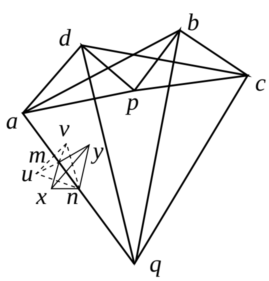

Рис. 3. Построение многогранника $C(s)$. Здесь точка p лежит в плоскости четырехугольника $abcd$.

3. Многогранник $C(r)$. С октаэдром $B(s)$ свяжем следующие шесть точек (рис. 3): m и n — внутренние точки ребра aq; y — внутренняя точка грани abq; v — внутренняя точка грани adq; x — точка, лежащая в плоскости треугольника adq, точнее, в той открытой полуплоскости этой плоскости, которая задается прямой aq и не содержит точки d; u — точка, лежащая в плоскости треугольника abq, точнее, в той открытой полуплоскости этой плоскости, которая задается прямой aq и не содержит точки b.

Удалим из грани abq октаэдра $B(s)$ треугольник mny и «заклеим» образовавшуюся треугольную дырку боковой поверхностью треугольной пирамиды $mnxy$. Треугольники mnx, mxy и nxy, образующие эту боковую поверхность, показаны на рис. 3 тонкими сплошными линиями. Шестиугольную грань $abqnym$ получившегося многогранника триангулируем отрезками ay, by и qy

(на рис. 3 они не показаны, чтобы не усложнять изображение).

Из грани adq только что построенного многогранника удалим треугольник mnv и «заклеим» образовавшуюся треугольную дырку боковой поверхностью треугольной пирамиды $mnuv$. Треугольники mnu, muv и nuv, образующие эту боковую поверхность, показаны на рис. 3 тонкими пунктирными линиями. Шестиугольную грань $adqnvm$ получившегося многогранника триангулируем отрезками av, dv и qv (на рис. 3 они не показаны, чтобы не усложнять изображение).

Построенный таким образом невырожденный многогранник обозначим через $C(s)$. Отметим следующие его свойства.

(а) Двугранный угол тетраэдра $mnux$ при ребре mn равен $\alpha(s)$ (во избежание недоразумений уточним, что хотя все вершины этого тетраэдра являются вершинами многогранника $C(s)$, но ребро ux тетраэдра $mnux$ не является ребром многогранника $C(s)$).

(б) Многогранник $C(s)$ изгибаем. В самом деле, его вершины a, b, c, d, p и q можно двигать в пространстве в соответствии с движениями тех же самых вершин многогранника $B(s)$ при непрерывных изометрических деформациях последнего. При этом тетраэдры $mnuv$ и $mnxy$ будут оставаться конгруэнтными сами себе и будут жестко следовать за движениями граней adq и abq многогранника $B(r)$, а параметр r будет изменяться в некотором интервале $I = (s-\varepsilon, s]$ на вещественной прямой ($\varepsilon > 0$). Многогранник из соответствующего непрерывного семейства многогранников, соответствующий параметру $r \in I$, обозначим через $C(r)$.

(в) Если $r \in I$, то двугранный угол $\gamma(r)$ тетраэдра $mnux$ при ребре mn строго больше, чем $\alpha(s)$: $\gamma(r) > \alpha(s)$. В самом деле, $\gamma(r) = \alpha(r) > \min\limits_{r\in I}\alpha(r) = \alpha(s)$.

4. Многогранник P. Продолжим построения п. 3. Обозначим через w середину отрезка mn. Подвергнем октаэдр $B(s)$ гомотетии h_k с центром w, причем коэффициент гомотетии $k > 0$ подберем настолько малым, чтобы образ $h_k(aq)$ отрезка aq целиком содержался в отрезке mn: $h_k(aq) \subset mn$. Далее, пусть T обозначает поворот всего пространства вокруг отрезка mn на угол π. Образ октаэдра $B(s)$ под действием отображения $T\circ h_k$ обозначим через $B'(s)$, а образ любой вершины z октаэдра $B(s)$ под действием этого отображения — через z'.

Уменьшая, если нужно, коэффициент гомотетии k, будем считать, что точка d' лежит внутри грани mnx, а точка b' — внутри грани mnu (см. рис. 3).

Наконец, удалим из объединения многогранников $C(s)$ и $B'(s)$ треугольники $a'b'q'$ и $a'd'q'$. (Напомним, что для нас «многогранник» означает «многогранная поверхность», а не «трехмерное тело».) Полученный многогранник обозначим через P.

В п. 5 докажем, что P можно взять в качестве того многогранника, существование которого утверждается в теореме 1.

Изучим возможные непрерывные изометрические деформации многогранника P. При этом нам придется следить за деформациями некоторых совокупностей вершин многогранника P (например, $\{a, b, c\}$), сравнивая их с деформациями совокупностей соответствующих вершин октаэдра $B(r)$ в том виде, как он был построен в п. 2 (т. е. когда он не имел ничего общего с многогранником P). Чтобы различать эти ситуации, будем писать, например, $\{a, b, c\}_P$ и

$\{a, b, c\}_{B(r)}$ соответственно.

Лемма. *Пусть многогранник P подвергается произвольной непрерывной изометрической деформации, при которой любая его вершина достаточно мало удаляется от своего исходного положения. Пусть Q является результатом такой деформации, причем его вершины обозначены теми же буквами, что и вершины исходного многогранника P, использованными выше в ходе построения P (см., например, рис. 3). Тогда найдется число $r \in I$ такое, что множество $\{a, b, c, d, p, q\}_Q$ вершин многогранника Q конгруэнтно множеству $\{a, b, c, d, p, q\}_{B(r)}$ тех же самых вершин октаэдра $B(r)$.*

Доказательство. Подберем $r \in I$ таким образом, чтобы евклидово расстояние между точками a и c многогранника Q (см. рис. 3) было равно евклидову расстоянию между точками a и c многогранника $B(r)$. Тогда тетраэдр $\{a, b, c, p\}_Q$ конгруэнтен тетраэдру $\{a, b, c, p\}_{B(r)}$, поскольку у этих тетраэдров соответствующие ребра равны. Аналогично тетраэдр $\{a, b, c, q\}_Q$ конгруэнтен тетраэдру $\{a, b, c, q\}_{B(r)}$.

Заметим, что тетраэдры $\{a, b, c, p\}_Q$ и $\{a, b, c, q\}_Q$ прилегают друг к другу по невырожденному (т. е. не лежащему на одной прямой) треугольнику abc (см. условие (а) из п. 2), причем лежат по разные стороны от плоскости треугольника abc. Последнее следует из того, что при построении точек p и q в п. 2 мы потребовали, чтобы они лежали по разные стороны от плоскости abc. Аналогично тетраэдры $\{a, b, c, p\}_{B(r)}$ и $\{a, b, c, q\}_{B(r)}$ прилегают к треугольнику abc, причем лежат по разные стороны от плоскости abc. Следовательно, множества $\{a, b, c, p, q\}_Q$ и $\{a, b, c, p, q\}_{B(r)}$ конгруэнтны:

$$\{a, b, c, p, q\}_Q \cong \{a, b, c, p, q\}_{B(r)}. \tag{1}$$

Очевидно, приведенное выше рассуждение останется в силе, если в нем заменить точки a, b, c точками a, b, d. Следовательно,

$$\{a, b, d, p, q\}_Q \cong \{a, b, d, p, q\}_{B(r)}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) немедленно следует

$$\{a, b, c, d, p, q\}_Q \cong \{a, b, c, d, p, q\}_{B(r)}, \tag{3}$$

если четыре точки a, b, p, q образуют невырожденный симплекс. Последнее условие заведомо выполнено, ведь отрезок ab не проходит через центр описанной окружности четырехугольника $abcd$ (см. условие (б) из п. 2).

Тем самым формула (3), а вместе с нею и лемма доказаны.

Неформально смысл леммы можно пояснить следующим образом с использованием рис. 3. При построении многогранника P мы удалили отрезок mn из ребра aq, так что в принципе в процессе деформации многогранника P отрезки am и nq не обязаны лежать на одной прямой. Кроме того, при построении многогранника P мы триангулировали грани $amynqb$ и $amvnqd$, так что в принципе в процессе деформации многогранника P треугольники, образующие триангуляцию грани $amynqb$ (равно как и грани $amvnqd$), не обязаны лежать в одной плоскости. Лемма как раз показывает, что этого не происходит, т. е. что при любой изометрической деформации многогранника P отрезки am и nq лежат на прямой aq, все треугольники, образующие триангуляцию грани $amynqb$, лежат в плоскости abq и все треугольники, образующие триангуляцию грани $amvnqd$, лежат в плоскости adq.

5. Доказательство теоремы 1. По построению P является образом симплициального комплекса, гомеоморфного двумерной сфере. Значит, свойство (1) выполнено.

Тот факт, что многогранник P не допускает нетривиальных изгибаний, почти очевиден. Ведь мы построили P, приклеив «снаружи» к двугранному углу изгибаемого многогранника $C(s)$ двугранный угол октаэдра $B'(s)$. Более того, известно, что каждый из этих двугранных углов может только увеличиться в процессе изометрической деформации. Но, с другой стороны, сумма этих двугранных углов равна 2π, а значит, каждый из них остается неизменным в процессе деформации. Отсюда следует, что любая изометрическая деформация многогранника P тривиальна.

Поясним сказанное более подробно.

Предположим, что многогранник P подвергается некоторой изометрической деформации, и убедимся, что она с необходимостью тривиальна.

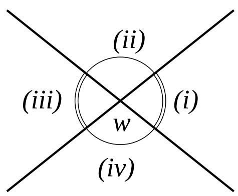

Рис. 4.

Рассмотрим все четыре двугранных угла, сходящихся в ребре $a'q'$ многогранника $B'(s)$ (здесь было бы правильнее говорить не о самом октаэдре $B'(s)$, а только о тех его вершинах, ребрах и гранях, которые стали элементами многогранника P в ходе описанного выше построения P). Для наглядности на рис. 4 изображено сечение малой окрестности точки w плоскостью, проходящей через w и перпендикулярной отрезку $a'q'$, где (i) — сечение двугранного угла тетраэдра $mnxy$ при ребре mn, (ii) — сечение двугранного угла октаэдра $B'(s) \subset P$ при ребре $a'q'$, (iii) — сечение двугранного угла тетраэдра $mnuv$ при ребре mn, (iv) — сечение двугранного угла многогранника $B(s) \subset P$ при ребре aq.

Два из этих двугранных углов, обозначенных на рис. 4 символами (i) и (iii), являются двугранными углами тетраэдров $mnxy$ и $mnuv$ при ребре mn. При любой изометрической деформации многогранника P величины этих двугранных углов остаются неизменными.

Еще один из рассматриваемых двугранных углов, обозначенный на рис. 4 символом (ii), является двугранным углом октаэдра $B'(s)$ при ребре $a'q'$ и равен $\alpha(s)$. В силу выбора значения s этот угол может только увеличиться при любой изометрической деформации октаэдра $B'(s)$ (а значит, и при любой изометрической деформации многогранника P).

Наконец, четвертый из рассматриваемых двугранных углов, обозначенный на рис. 4 символом (iv), является двугранным углом октаэдра $B(s)$ при ребре aq и тоже равен $\alpha(s)$. В силу леммы из п. 4 при любой изометрической деформации многогранника P этот двугранный угол будет равен двугранному углу $\alpha(r)$ октаэдра $B(r)$ при некотором специальном выборе параметра r. Значит, угол (iv) тоже может только увеличиться в процессе изометрической деформации многогранника P.

Но сумма всех четырех углов (i)–(iv) постоянна в процессе изометрической деформации многогранника P и равна 2π. Значит, каждый из этих углов постоянен, и деформация тривиальна. Следовательно, свойство (2) из формулировки теоремы 1 выполнено.

Теперь построим многогранник P_n, о котором идет речь в свойстве (3) теоремы 1. Построим его модификацией многогранника P. (На всякий случай напомним, что при построении многогранника P в п. 4 мы считали, что $r = s$.) Точнее говоря, оставим без изменения все вершины P, кроме одной вершины p, все ребра P, кроме четырех ребер ap, bp, cp и dp, и все грани P, кроме четырех граней abp, bcp, cdp и adp. Заменим вершину p многогранника P новой вершиной p_n так, чтобы длины каждого из четырех новых ребер ap_n, bp_n, cp_n и dp_n были равны $s + 1/n$. Получившийся многогранник обозначим через P_n.

Очевидно, P_n и P имеют одинаковое комбинаторное строение, причем $P_n \to P$ при $n \to \infty$. Более того, для каждого n многогранник P_n изгибаем, поскольку точки a, b, c, d, p_n не лежат в одной плоскости и угол (iv), изображенный на рис. 4, может быть уменьшен. Тем самым выполнено свойство (3) и теорема 1 доказана.

6. Доказательство теоремы 2. Будем рассуждать от противного. Допустим, что существует алгебраическое множество $A \subset \mathbb{R}^{3v}$ такое, что $\varphi(F_{[\![P]\!]}) = A \cap \varphi([\![P]\!])$.

Поскольку A замкнуто в $\mathbb{R}^{3v}$, множество $\varphi(F_{[\![P]\!]})$ относительно замкнуто в $\varphi([\![P]\!])$.

С другой стороны, если P_n — многогранники из формулировки теоремы 1, то $\varphi(P_n) \in \varphi(F_{[\![P]\!]})$ для любого n, $\varphi(P_n) \to \varphi(P)$ при $n \to \infty$ и $\varphi(P) \in \varphi([\![P]\!])$, но $\varphi(P) \notin \varphi(F_{[\![P]\!]})$. Значит, множество $\varphi(F_{[\![P]\!]})$ не является относительно замкнутым в $\varphi([\![P]\!])$.

Полученное противоречие доказывает теорему 2.

Автор благодарен рецензенту за замечания по улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Connelly R.* Conjectures and open questions in rigidity // Proc. Intern. congr. mathematicians (Helsinki, 1978). Helsinki: Acad. Sci. Fennica, 1980. P. 407–414.
2. *Schlenker J.-M.* La conjecture des soufflets (d'après I. Sabitov) // Astérisque. 2004. (Bourbaki seminar. Volume 2002/2003. Exposes 909–923. Paris: Société Math. de France). V. 294. P. 77–95.
3. *Сабитов И. Х.* Алгебраические методы решения многогранников // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 3. С. 3–66.
4. *Gaifullin A. A.* Sabitov polynomials for volumes of polyhedra in four dimensions // Adv. Math. 2014. V. 252. P. 586–611.
5. *Шор Л. А.* Об изгибании выпуклых многогранников с границей // Мат. сб. 1958. Т. 45, № 4. С. 471–488.
6. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. Новосибирск: Наука, 2007. (Избранные тр.; Т. 2).
7. *Позняк Э. Г.* Нежесткие замкнутые многогранники // Вестн. МГУ. Сер. математика и механика. 1960. № 3. С. 14–18.
8. *Глюк Г.* Почти все односвязные замкнутые поверхности неизгибаемы // Исследования по метрической теории поверхностей. Новое в зарубежной науке. / Ред. А. Н. Колмогоров и С. П. Новиков. М.: Мир, 1980. Т. 18. С. 148–163.
9. *Bricard R.* Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé // J. Math. 1897. T. 3. P. 113–148.
10. *Lebesgue H.* Octaèdres articulés de Bricard // Enseign. Math. 1967. V. 13. P. 175–185.
11. *Stachel H.* Zur Einzigkeit der Bricardschen Oktaeder // J. Geom. 1987. V. 28, N 1. P. 41–56.
12. *Сабитов И. Х.* Локальная теория изгибаний поверхностей // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 48. С. 196–207. (Итоги науки и техники).
13. *Cromwell P. R.* Polyhedra. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
14. *Alexandrov V.* The Dehn invariants of the Bricard octahedra // J. Geom. 2010. V. 99, N 1–2. P. 1–13.

15. *Максимов И. Г.* Описание комбинаторного строения алгоритмически 1-параметрических многогранников типа сферы // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 892–910.

Статья поступила 25 ноября 2013 г., окончательный вариант — 15 июня 2015 г.

Александров Виктор Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, физический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
alex@math.nsc.ru