

КОМИТЕТ ПО ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ
МИНИСТЕРСТВА НАУКИ, ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ И
ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет

В. А. Александров

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Методические указания

Новосибирск
2003

В методических указаниях изложены сведения о свойствах ортогональных многочленов и их приложениях, а также приведены задачи, рекомендуемые для решения на практических занятиях по основам функционального анализа на физическом факультете Новосибирского государственного университета.

Методические указания предназначены для студентов и преподавателей физического факультета.

Второе издание осуществлено в электронном виде в 2003 году. В нём лишь исправлены опечатки, вкравшиеся в первое издание 1993 года.

© Новосибирский государственный университет, 1993.

© В. А. Александров, 1993, 2003.

Предисловие

В курсе “Основы функционального анализа”, читаемом для студентов второго года обучения на физическом факультете Новосибирского государственного университета, теме “Ортогональные многочлены” отведено приблизительно 4 лекции и 4 практических занятия в феврале — начале марта. Появление данного пособия вызвано отсутствием удобного в работе учебника и задачника: как правило в книгах по ортогональным многочленам излагается гораздо больше материала, чем может освоить студент за отведённое ему программой время, а в задачах, разбросанных по многочисленным монографиям, довольно трудно ориентироваться.

Обсудим основные особенности предлагаемых вам методических указаний.

Прежде всего, мы по традиции избегаем применения контурных интегралов от функций комплексного переменного и теории вычетов, поскольку на физическом факультете курс теории функций комплексного переменного в разные годы читается в разных семестрах, в частности бывало и так, что первые лекции по этому предмету совпадали по времени с изучением ортогональных многочленов. Этим, в частности, объясняется отсутствие в нашем пособии таких важных тем, как интегральные представления и асимптотические разложения ортогональных многочленов.

Другая особенность нашего подхода состоит в том, что на лекциях излагается только материал параграфов 1–11, т. е. общие свойства ортогональных многочленов и теория многочленов Лежандра. Этот материал входит в экзаменационные билеты, а соответствующие задачи решаются на практических занятиях и выносятся на зачёт, в силу бюрократических причин именуемый допуском. Содержащаяся в параграфах 12–21 теория многочленов Эрмита и Лагерра строится по аналогии с теорией многочленов Лежандра. Пользуясь этим обстоятельством, мы не рассказываем материал указанных параграфов на лекциях. Он сообщается без доказательств преподавателями на практических занятиях. Соответственно, вопросы, относящиеся к многочленам Эрмита и Лагерра, не входят в экзаменационные билеты, а от студентов требуется только знание формулировок соответствующих теорем и умение решать задачи, что они и должны продемонстрировать на зачёте.

Содержащееся в параграфе 16 решение задачи квантования гар-

монического осциллятора выходит за рамки курса математического анализа и представляет собой факультативный материал, иллюстрирующий типичное применение ортогональных многочленов в физике.

Коротко прокомментируем книги, использованные при написании данного пособия и рекомендуемые для более глубокого ознакомления с предметом.

Наше изложение наиболее близко к принятому в книгах

1. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. — М. — Л.: Физматгиз, 1963.

2. П. К. Суетин. Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1976.

Изложение, ориентированное на физиков, и снабжённое физическими примерами, читатель найдёт в книге:

3. Г. Арфкен. Математические методы в физике. — М.: Атомиздат, 1970.

Очень сжатое введение в теорию ортогональных многочленов, осуществлённое с точки зрения задачи Штурма-Лиувилля, содержится в книге

4. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.

Максимальное использование теории функций комплексного переменного при построении теории ортогональных многочленов осуществлено в книге:

5. А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. Основы теории специальных функций. — М.: Наука, 1974.

В следующей классической и наиболее полной монографии об ортогональных многочленах изложение ведётся с гораздо более общих чем у нас позиций

6. Г. Сегё. Ортогональные многочлены. — М.: Физматгиз, 1962.

Я глубоко благодарен А. А. Егорову за компьютерный набор данного пособия.

§ 1. Ортогональные многочлены как результат ортогонализации системы мономов

Напомним, что процесс ортогонализации Грама-Шмидта состоит в том, что счетной последовательности x_1, \dots, x_n, \dots линейно независимых векторов вещественного гильбертова пространства H сопоставляются новые последовательности y_1, \dots, y_n, \dots и z_1, \dots, z_n, \dots векторов из H следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, & z_1 &= y_1/\|y_1\|, \\ y_2 &= x_2 - (x_2, z_1)z_1, & z_2 &= y_2/\|y_2\|, \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ y_n &= x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, z_k)z_k, & z_n &= y_n/\|y_n\|, \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

При этом говорят, что последовательность z_1, \dots, z_n, \dots получена из x_1, \dots, x_n, \dots с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта. Как известно, она обладает следующими свойствами:

- 1) последовательность z_1, \dots, z_n, \dots ортонормирована;
- 2) для каждого n линейная оболочка векторов z_1, \dots, z_n совпадает с линейной оболочкой векторов x_1, \dots, x_n ;
- 3) если одна из последовательностей x_1, \dots, x_n, \dots или z_1, \dots, z_n, \dots полна, то и другая является полной;
- 4) последовательность векторов w_1, \dots, w_n, \dots обладает свойствами 1) – 2) тогда и только тогда, когда $w_n = \pm z_n$ для всех n .

Переходя к построению ортогональных многочленов, договоримся функцию $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ называть *весовой функцией* или *весом* в интервале (a, b) , если на этом интервале она неотрицательна, интегрируема и её интеграл положителен, т. е. если $h(x) \geq 0$ и выполняются условия

$$0 < \int_a^b h(x) dx < +\infty.$$

Введём в рассмотрение множество $L_2^h(a, b)$ тех функций $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$,

для которых интеграл

$$\int_a^b f^2(x)h(x) dx$$

сходится. Очевидно, это множество образует линейное пространство.

Поскольку для любого $x \in (a, b)$, очевидно, выполняется неравенство

$$|f(x)g(x)h(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x)h(x) + g^2(x)h(x)],$$

то, проинтегрировав его почленно, заключаем, что для любых функций $f, g \in L_2^h(a, b)$ интеграл

$$\int_a^b f(x)g(x)h(x) dx$$

сходится:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)g(x)h(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)g(x)h(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\int_a^b f^2(x)h(x) dx + \int_a^b g^2(x)h(x) dx \right] < +\infty. \end{aligned}$$

следовательно, любым функциям $f, g \in L_2^h(a, b)$ мы можем поставить в соответствие число

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)h(x) dx,$$

которое, как легко проверить, удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения, (правда при этом нам придётся принять обычное соглашение о том, что функция $f \in L_2^h(a, b)$ считается нулём пространства $L_2^h(a, b)$, если $(f, f) = \int_a^b f^2(x)h(x) dx = 0$).

Одним из важнейших достоинств конструкции интеграла Лебёга является то, что пространство $L_2^h(a, b)$, с введённым скалярным произведением, полно.

Подводя итог предыдущим рассуждениям, можно сказать, что с каждым интервалом (a, b) и каждой весовой функцией $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ мы связали некоторое специальное гильбертово пространство $L_2^h(a, b)$.

Если интервал (a, b) конечен, то, очевидно, каждый моном x^n принадлежит $L_2^h(a, b)$. Если же (a, b) бесконечен, то будем дополнительно считать, что весовая функция убывает на бесконечности настолько быстро, что все мономы x^n лежат в $L_2^h(a, b)$.

Ясно, что на любом интервале (a, b) последовательность мономов $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ образует линейно независимую систему. Применим к ней процесс ортогонализации Грама — Шмидта относительно скалярного произведения, введённого в $L_2^h(a, b)$. В результате получим последовательность многочленов $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$, в которой при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ многочлен q_k имеет степень k и

$$\int_a^b q_n(x)q_m(x)h(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = n; \\ 0, & \text{если } m \neq n. \end{cases}$$

Для того, чтобы в последующем нам было удобнее формулировать свойства ортогональных многочленов, давайте воспользуемся указанным выше свойством 4) и домножим, если это необходимо, многочлен q_n на минус единицу так, чтобы у каждого из q_n старший коэффициент стал положительным. Полученные в результате многочлены будем по-прежнему обозначать q_n и будем называть *многочленами, ортогональными с весом h на интервале (a, b)* . При этом интервал (a, b) будем называть *интервалом ортогональности*.

Для конечного интервала (a, b) последовательность мономов полна в $L_2^h(a, b)$. В самом деле, из теории интеграла Лебега известно, что множество непрерывных функций, определённых в замкнутом интервале $[a, b]$, плотно в $L_2^h(a, b)$. Следовательно, для любой $f \in L_2^h(a, b)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся непрерывная функция $f_\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, лежащая в $L_2^h(a, b)$ такая, что норма $\|f - f_\varepsilon\|$ разности функций f и f_ε , равная по определению

$$\left\{ \int_a^b [f(x) - f_\varepsilon(x)]^2 h(x) dx \right\}^{1/2},$$

не превосходит ε :

$$\|f - f_\varepsilon\| = \left\{ \int_a^b [f(x) - f_\varepsilon(x)]^2 h(x) dx \right\}^{1/2} < \varepsilon.$$

С другой стороны, в силу теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами, для непрерывной функции f_ε найдется многочлен P такой, что

$$|f_\varepsilon(x) - P(x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in [a, b]$. Следовательно,

$$\|f_\varepsilon - P\| = \left\{ \int_a^b [f_\varepsilon(x) - P(x)]^2 h(x) dx \right\}^{1/2} \leq \varepsilon \cdot \left\{ \int_a^b h(x) dx \right\}^{1/2}.$$

Окончательно получаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен P , для которого

$$\|f - P\| \leq \|f - f_\varepsilon\| + \|f_\varepsilon - P\| \leq \varepsilon \left[1 + \left\{ \int_a^b h(x) dx \right\}^{1/2} \right].$$

Поскольку здесь в квадратных скобках стоит постоянная, не зависящая от ε , а само ε произвольно, то последнее соотношение и показывает, что с помощью конечных линейных комбинаций мономов $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ (каковой является многочлен P) можно сколь угодно близко (по норме пространства $L_2^h(a, b)$) приблизиться к произвольной функции $f \in L_2^h(a, b)$. Но именно это и означает, что последовательность мономов полна в $L_2^h(a, b)$.

Используя свойство 3), заключаем, что последовательность ортогональных многочленов полна на любом конечном промежутке (a, b) при любой весовой функции h . Значит, следуя общей схеме, изложенной в разделе “Геометрия пространств со скалярным произведением,” мы можем рассматривать последовательность ортогональных многочленов как ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2^h(a, b)$, а значит можем ввести коэффициенты Фурье относительно этого базиса и можем разлагать функции в ряд по ортогональным многочленам.

Но вначале мы сосредоточим своё внимание на поточечных свойствах ортогональных многочленов, которое никак не следует из общих рассуждений в духе гильбертовых пространств.

Задача

1. Применяя процесс ортогонализации Грама — Шмидта, ортогонализировать мономы $1, x, x^2, x^3$ в пространстве $L_2^h(a, b)$, если

- а) $a = -1, b = 1, h(x) = 1$ для всех x ;
- б) $a = -1, b = 1, h(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

§ 2. Общие свойства ортогональных многочленов

В предыдущем параграфе, используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, мы получили последовательность многочленов q_0, \dots, q_n, \dots , ортогональных на интервале (a, b) с весом h . Непосредственно из метода Грама — Шмидта следуют такие свойства ортогональных многочленов:

1) Произвольный многочлен степени n можно представить в виде линейной комбинации первых $n+1$ ортогональных многочленов q_0, q_1, \dots, q_n .

2) Последовательность ортогональных многочленов $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ определяется весом h однозначно.

Используя эти свойства, мы можем вывести следующие

3) Если Q_m — произвольный многочлен степени m и $n > m$, то

$$\int_a^b Q_m(x)q_n(x)h(x) dx = 0.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться свойством 1) и разложить Q_m в линейную комбинацию многочленов q_0, q_1, \dots, q_m и использовать ортогональность последних.

4) Если промежуток ортогональности симметричен относительно начала координат (т. е. имеет вид $(-a, a)$), а весовая функция h чётна, то многочлен q_n содержит только те степени независимой переменной, которые имеют одинаковую чётность с номером n . Другими словами, при сделанных предположениях имеет место тождество

$$q_n(-x) = (-1)^n q_n(x),$$

справедливое для всех n и для всех $x \in (-a, a)$.

Для доказательства сделаем в равенстве

$$\int_{-a}^a q_n(x)q_m(x)h(x) dx = \delta_{nm}$$

замену x на $-x$ и используем чётность h . Тогда

$$\int_{-a}^a q_n(-x)q_m(-x)h(x) dx = \delta_{nm}$$

или

$$\int_{-a}^a \tilde{q}_n(x)\tilde{q}_m(x)h(x) dx = \delta_{nm}$$

где введено обозначение $\tilde{q}_n(x) = (-1)^n q_n(-x)$. Ясно, что \tilde{q}_n является многочленом степени n с положительным старшим коэффициентом. Учитывая последнее из выписанных интегральных равенств, заключаем, что многочлены $\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, \dots$ ортогональны в промежутке $(-a, a)$ с весом h . Но в силу свойства 2), вес определяет ортогональные многочлены однозначно. Поэтому для каждого n имеем: $q_n = \tilde{q}_n$ или $q_n(x) = \tilde{q}_n(x) = (-1)^n q_n(-x)$ для всех $x \in (-a, a)$, что и требовалось доказать.

Закончим этот параграф более серьёзным свойством, утверждающим, что для произвольной последовательности ортогональных многочленов имеется рекуррентная формула, связывающая три последовательных многочлена q_{n-1}, q_n и q_{n+1} :

5) Пусть $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ — последовательность ортогональных многочленов, причём a_n и b_n — коэффициенты при старших степенях многочлена q_n :

$$q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$$

Тогда

$$xq_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}}q_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \right) q_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n}q_{n-1}(x).$$

Для доказательства разложим многочлен $(n+1)$ -й степени $xq_n(x)$

в линейную комбинацию многочленов q_0, q_1, \dots, q_{n+1} :

$$xq_n(x) = \sum_{m=0}^{n+1} c_{nm}q_m(x).$$

Используя ортогональность многочленов q_0, \dots, q_n, \dots , находим

$$c_{nm} = \int_a^b xq_n(x)q_m(x)h(x) dx.$$

Из последнего равенства вытекает, что $c_{nm} = c_{mn}$, а из предыдущего — что $c_{nm} = 0$ при $m > n + 1$. Следовательно, $c_{nm} = 0$ при $m < n - 1$. Поэтому

$$xq_n(x) = c_{n,n+1}q_{n+1}(x) + c_{n,n}q_n(x) + c_{n,n-1}q_{n-1}(x) \quad (1)$$

Сравнивая коэффициенты при x^{n+1} и x^n в левой и правой частях тождества (1), получим

$$\begin{aligned} x(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots) &= c_{n,n+1}(a_{n+1} x^{n+1} + b_{n+1} x^n + \dots) \\ &+ c_{n,n}(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots) + c_{n,n-1}(a_{n-1} x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots), \end{aligned}$$

т. е. $a_n = c_{n,n+1}a_{n+1}$ и $b_n = c_{n,n+1}b_{n+1} + c_{n,n}a_n$, или $c_{n,n+1} = a_n/a_{n+1}$ и $c_{n,n} = b_n/a_n - b_{n+1}/a_{n+1}$. Для получения коэффициента $c_{n,n-1}$ достаточно воспользоваться соотношением $c_{nm} = c_{mn}$:

$$c_{n,n-1} = c_{n-1,n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Подставив найденные значения коэффициентов $c_{n,n+1}$, $c_{n,n}$ и $c_{n,n-1}$ в тождество (1), мы завершим доказательство свойства 5).

В заключение отметим, что, несколько огрубляя ситуацию, мы можем дать другую формулировку свойства 5): для любой последовательности ортогональных многочленов $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ существуют постоянные A_n, B_n и C_n такие, что для любого n и всех $x \in (a, b)$ справедливо равенство

$$q_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)q_n(x) + C_n q_{n-1}(x).$$

Задачи

2. Доказать, что минимум интеграла

$$I(Q) = \int_a^b Q^2(x)h(x) dx$$

на множестве всех многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом достигается тогда и только тогда, когда

$$Q(x) = \frac{1}{a_n}q_n(x),$$

причём этот минимум равен $1/a_n^2$. Здесь $q_n(x) = a_nx^n + \dots$ — многочлены, ортогональные на интервале (a, b) с весом h .

3. Как известно, если многочлены $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ ортогональны в интервале $(-a, a)$ с весом h , являющимся чётной функцией, то при нечётном n многочлен q_n содержит только нечётные степени независимой переменной, а при чётном n — только чётные, т. е.

$$q_{2n}(x) = s_n(x^2) \quad \text{и} \quad q_{2n+1}(x) = xt_n(x^2),$$

где s_n и t_n — некоторые многочлены степени n . Доказать, что

а) многочлены $s_n(x) = q_{2n}(\sqrt{x})$ ортогональны на интервале $(0, a^2)$ с весом $h_1(x) = h(\sqrt{x})/\sqrt{x}$.

б) многочлены $t_n(x) = q_{2n+1}(\sqrt{x})/\sqrt{x}$ ортогональны на интервале $(0, a^2)$ с весом $h_2(x) = \sqrt{x}h(\sqrt{x})$.

§ 3. Свойства нулей ортогональных многочленов

Пусть $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ — последовательность многочленов, ортогональных на интервале (a, b) с весом h . Приведём наиболее важные свойства нулей ортогональных многочленов.

1) Все нули многочлена q_n действительны, просты и расположены на интервале (a, b) .

Поскольку мы имеем дело с ортогональными многочленами, то при $n \geq 1$

$$\int_a^b q_0(x)q_n(x)h(x) dx = 0.$$

Но весовая функция h неотрицательна на (a, b) , а q_0 — многочлен нулевой степени, т. е. некоторая постоянная. Следовательно, многочлен q_n принимает на (a, b) значения разных знаков.

Допустим теперь, что x_1, \dots, x_m ($m \leq n$) — все точки интервала (a, b) в которых многочлен q_n меняет знак (т. е. в правой полуокрестности каждой из них он положителен, а в левой — отрицателен, или наоборот).

Предположим, что $m < n$ и рассмотрим вспомогательный многочлен

$$Q_m(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m).$$

Тогда многочлен $Q_m(x)q_n(x)$ сохраняет знак на (a, b) , а значит

$$\int_a^b Q_m(x)q_n(x)h(x) dx \neq 0$$

что при нашем предположении $m < n$ противоречит свойству 3) из § 2.

Следовательно, $m = n$, а это и означает, что все корни многочлена q_n расположены на интервале (a, b) и различны.

2) Для любого n справедливы неравенства $q_n(b) > 0$ и $(-1)^n q_n(a) > 0$.

Это очевидно, поскольку все корни q_n лежат на (a, b) , а старший коэффициент многочлена q_n положителен.

3) При любом n два соседних многочлена q_{n-1} и q_n не могут иметь общих корней.

Допустим, от противного, что эти многочлены имеют общий корень x_0 . Тогда в силу рекуррентной формулы (см. свойство 5) из § 2), x_0 является также корнем многочлена q_{n-2} .

Рассуждая аналогично, придём к равенствам $q_{n-2}(x_0) = 0, \dots, q_1(x_0) = 0, q_0(x_0) = 0$, последнее из которых ведёт нас к противоречию: с одной стороны, будучи многочленом нулевой степени, q_0 является постоянной, а значит равняется нулю тождественно и

$$\int_a^b q_0^2(x)h(x) dx = 0;$$

с другой стороны, согласно процессу ортогонализации Грама — Шмидта,

$$\int_a^b q_0^2(x)h(x) dx = 1.$$

4) Если x_0 есть корень многочлена q_n , то многочлены q_{n-1} и q_{n+1} принимают в точке x_0 значения разных знаков.

В самом деле, в силу рекуррентной формулы (см. свойство 5) из § 2), имеем

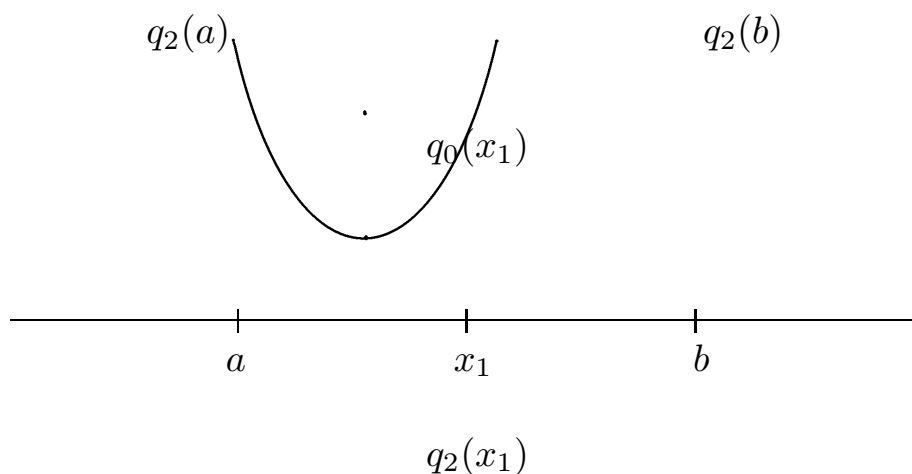
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}q_{n+1}(x_0) = -\frac{a_{n-1}}{a_n}q_{n-1}(x_0),$$

где a_m — старший коэффициент многочлена q_m , который положителен по построению ортогональных многочленов.

5) Нули соседних ортогональных многочленов q_n и q_{n+1} перемежаются. Под этим подразумевается, что если $x_{\text{лев}}$ и $x_{\text{пр}}$ — самый левый и самый правый корни многочлена q_n , а x_1 и x_2 — любые два его последовательных корня, то в каждом из интервалов $(a, x_{\text{лев}})$, (x_1, x_2) и $(x_{\text{пр}}, b)$ многочлен q_{n+1} имеет ровно один корень.

Доказательство будем вести индукцией по степени многочлена.

Наше утверждение становится осмысленным начиная с $n = 1$. Пусть x_1 — это единственный корень многочлена первой степени q_1 , лежащий в (a, b) в силу свойства 1). Поскольку $q_0(x_1) > 0$, то, в силу свойства 4), $q_2(x_1) < 0$. Но, согласно свойству 2), $q_2(a) > 0$ и $q_2(b) > 0$. Значит на каждом из интервалов (a, x_1) и (x_1, b) многочлен q_2



имеет хотя бы один корень (см. рис.). Но многочлен второй степени q_2 не может иметь более двух нулей. Следовательно, на каждом из

интервалов (a, x_1) и (x_1, b) корень ровно один. Тем самым свойство 5) доказано при $n = 1$.

Предположим теперь, что свойство 5) доказано для некоторого n и докажем его для $n + 1$.

Пусть x_1, x_2 — последовательные корни многочлена q_{n+1} . Тогда из предположения индукции следует, что многочлен q_n принимает в x_1 и x_2 значения разных знаков: иначе мы бы получили, что либо q_n вообще не имеет корней между x_1 и x_2 , т. е. между какими-то последовательными корнями q_n лежат сразу 2 корня x_1 и x_2 многочлена q_{n+1} , что невозможно; либо q_n имеет больше одного корня между x_1 и x_2 , т. е. между какими-то последовательными корнями q_n вообще нет нулей многочлена q_{n+1} , что опять-таки противоречит предположению индукции. Итак, q_n принимает в x_1 и x_2 значения разных знаков. Тогда, согласно свойству 4), заключаем, что q_{n+2} также принимает в x_1 и x_2 значения разных знаков и, следовательно, имеет хоть один корень в интервале (x_1, x_2) .

Пусть теперь $x_{\text{лев}}$ и $x_{\text{пр}}$ — самый левый и самый правый корни многочлена q_{n+1} . Согласно свойству 2), многочлены q_n и q_{n+2} принимают значения одинакового знака в точке a . А в силу свойства 4) они принимают значения разных знаков в точке $x_{\text{лев}}$. Но в силу предположения индукции многочлен q_n не имеет корней на интервале $(a, x_{\text{лев}})$ и, значит, сохраняет знак. Таким образом, многочлен q_{n+2} принимает значения разных знаков в точках a и $x_{\text{лев}}$ и поэтому имеет хотя бы один корень на интервале $(a, x_{\text{лев}})$.

Существование хотя бы одного корня многочлена q_{n+2} на интервале $(x_{\text{пр}}, b)$ доказывается аналогично.

В заключение осталось заметить, что про $n + 2$ интервала вида $(a, x_{\text{лев}})$, (x_1, x_2) , $(x_{\text{пр}}, b)$ мы знаем, что на каждом из них многочлен степени $n + 2$ q_{n+2} имеет по крайней мере один корень. А поскольку он не может иметь больше чем $n + 2$ корня, то на каждом из интервалов он имеет ровно по одному корню.

§ 4. Классические ортогональные многочлены

Наиболее важный класс ортогональных многочленов образуют так называемые *классические ортогональные многочлены*, которые приведены в следующей таблице:

№	Название	Обозначение	Интервал ортогональности, (a,b)	Весовая функция, h
1.	Многочлены Якоби	$P_n(x; \alpha, \beta)$	$(-1, 1)$	$(1-x)^\alpha \times (1+x)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$
2.	Многочлены Эрмита	$H_n(x)$	$(-\infty, +\infty)$	e^{-x^2}
3.	Многочлены Лагерра	$L_n^\alpha(x)$	$(0, +\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$
4.	Ультрасферические многочлены или многочлены Гегенбауэра	$C_n(x; \lambda)$	$(-1, 1)$	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, $\lambda > -1/2$
5.	Многочлены Чебышёва первого рода	$T_n(x)$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6.	Многочлены Чебышёва второго рода	$U_n(x)$	$(-1, 1)$	$\sqrt{1-x^2}$
7.	Многочлены Лежандра	$P_n(x)$	$(-1, 1)$	1

Как легко видеть, многочлены Гегенбауэра являются частным случаем многочленов Якоби: $C_n(x; \lambda) = P_n(x; \lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2})$, а многочлены Чебышёва и Лежандра являются частными случаями как многочленов Якоби, так и многочленов Гегенбауэра, например $P_n(x) = P_n(x; 0, 0) = C_n(x; \frac{1}{2})$.

Ясно, что если каждый из ортогональных многочленов $q_0, q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots$ мы умножим на некоторую постоянную, то большинство свойств, изложенных в § 2 и § 3 останется в силе. Однако ниже мы увидим, что если мы домножаем на специальным образом подобранные постоянные, то формулы принимают наиболее простой вид (например, уже известная нам рекуррентная формула из § 2). Вы-

бор этих постоянных множителей называется *стандартизацией ортогональных многочленов*. Таким образом, наше соглашение о том, что каждый из многочленов q_n имеет единичную длину в $L_2^h(a, b)$ и положительный старший коэффициент, является хотя и очень естественным, но лишь одним из возможных способов стандартизации. Легко указать другие естественные, правда очень редко используемые, способы стандартизации: у каждого q_n старший коэффициент равен единице или для каждого n $q_n(1) = 1$. Как ни странно, наиболее удобные формулы получаются, если многочлены $q_0, q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots$ — стандартизированы с помощью производящей функции в соответствии со следующим определением:

Функцию $w(x, t)$ двух переменных называют *производящей функцией* для последовательности многочленов $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$, если её разложение в ряд по степеням t при достаточно малых t имеет вид

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n(x)}{\alpha_n} t^n,$$

где α_n — некоторые постоянные.

Условимся применять названия и обозначения для многочленов из приведённой выше таблицы не зависимо от способа стандартизации, который будет ясен из контекста.

В математике какое-либо перечисление оправдано в том случае, если оно заканчивается словами “и других объектов такого типа нет.”

Легко проверить, что классические ортогональные многочлены, приведённые в таблице, задаются с помощью весовых функций h , удовлетворяющих так называемому *уравнению Пирсона*

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2}$$

и предельным условиям

$$\lim_{x \rightarrow a+0} h(x)B(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} h(x)B(x) = 0,$$

где $B(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, $A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$.

С помощью несложных, но довольно громоздких и по этой причине опускаемых нами рассуждений, можно показать, что и наоборот, если весовая функция h удовлетворяет уравнению Пирсона (хоть с какими-нибудь постоянными $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2$) и указанным выше

предельным условиям, то она с точностью до линейной замены переменной совпадает с одной из весовых функций приведённых в таблице классических ортогональных многочленов. Именно в этом смысле в таблице перечислены все классические ортогональные многочлены.

Если мы будем эксплуатировать тот факт, что весовая функция классических ортогональных многочленов не произвольна, а удовлетворяет уравнению Пирсона, то мы сможем получить дополнительные свойства таких многочленов, которые и приведём ниже без доказательства.

Если весовая функция h удовлетворяет уравнению Пирсона и граничным условиям, то

1) ортогональный многочлен q_n является решением дифференциального уравнения

$$B(x)y''(x) + [A(x) + B'(x)]y'(x) - \gamma_n y(x) = 0,$$

где $\gamma_n = n[\alpha_1 + (n + 1)\beta_2]$;

2) имеет место формула Родри́га

$$q_n(x) = c_n \frac{1}{h(x)} \frac{d^n}{dx^n} [h(x)B^n(x)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где c_n — некоторые постоянные;

3) производные $\frac{d^m}{dx^m} q_n(x)$ являются классическими ортогональными многочленами с тем же промежутком ортогональности;

4) у многочленов $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ имеется производящая функция, выражающаяся через элементарные функции.

Мы докажем эти свойства не для всех классических ортогональных многочленов сразу, а лишь в частном случае многочленов Лежандра. Этому посвящены ближайшие несколько параграфов.

Задачи

4. Используя задачу 3, доказать, что многочлен $H_{2n}(x)$ пропорционален многочлену $L_n^{-1/2}(x^2)$, а многочлен $H_{2n+1}(x)$ — многочлену $xL_n^{1/2}(x^2)$.

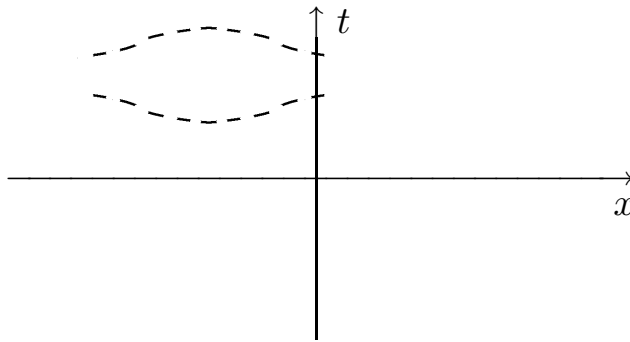
5. Доказать, что многочлены Чебышёва первого рода $T_n(x)$ пропорциональны многочленам $\cos(n \arccos x)$.

§ 5. Многочлены Лежандра: производящая функция и рекуррентные соотношения

Рассмотрим функцию

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}},$$

определённую и бесконечно дифференцируемую в некоторой окрестности оси x плоскости (x, t) .



При каждом фиксированном x разложим её в ряд Тейлора по степеням t :

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n,$$

где $P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} w(x, t) \Big|_{t=0}$.

Ниже мы займёмся изучением свойств возникающих функций P_n с тем, чтобы по мере их накопления доказать, что при каждом n функция P_n является многочленом степени n , причём эти многочлены ортогональны на интервале $(-1, 1)$ с весовой функцией h , тождественно равной единице. В соответствии с определениями, принятыми в предыдущем параграфе, именно многочлены P_n мы будем называть *многочленами Лежандра*. При этом из самого их определения следует, что w является для них производящей функцией, а стандартизованы многочлены Лежандра “с помощью производящей функции.”

Прежде всего непосредственно найдём P_0 и P_1 :

$$P_0(x) = 1;$$

$$P_1(x) = \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{1!} \left(-\frac{1}{2} \right) (1 - 2tx + t^2)^{-3/2} (-2x + 2t) \Big|_{t=0} = x.$$

Теперь займёмся выводом *рекуррентных соотношений*. Чтобы получить первое из них, воспользуемся тождеством

$$(1 - 2tx + t^2) \frac{\partial w}{\partial t} + (t - x)w = 0$$

и подставим в него вместо функции w её разложение в ряд

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

Принимая во внимание, что степенной ряд можно дифференцировать почленно, имеем

$$(1 - 2tx + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) n t^{n-1} + (t - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = 0,$$

откуда, приравнявая к нулю коэффициент при t^k , находим

$$(k + 1)P_{k+1}(x) - 2xkP_k(x) + (k - 1)P_{k-1}(x) + P_{k-1}(x) - xP_k(x) = 0$$

или

$$(n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Как следствие мы выведем из этой формулы упомянутое выше утверждение о том, что *при каждом n функция P_n является многочленом степени n* . Поскольку мы знаем, что $P_0(x) \equiv 1$, $P_1(x) \equiv x$, то наше утверждение, очевидно, истинно при $n = 0$ и $n = 1$. Допустив, что оно истинно при всех значениях индексов от 0 до n , из формулы (2) получим, что P_{n+1} является многочленом степени $n+1$. В силу принципа математической индукции наше утверждение доказано.

Аналогично из тождества

$$(1 - 2tx + t^2) \frac{\partial w}{\partial x} - tw = 0$$

получаем

$$(1 - 2tx + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{n+1} = 0,$$

откуда следует

$$P'_k(x) - 2xP'_{k-1}(x) + P'_{k-2}(x) - P_{k-1}(x) = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

или

$$P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) - P_n(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где штрих означает, как обычно, производную по переменной x .

Продифференцируем соотношение (2) по x :

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)xP'_n(x) + nP'_{n-1}(x) = 0$$

и исключим из полученного равенства и (3) один раз $P'_{n-1}(x)$, другой — $P'_{n+1}(x)$:

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) - (n+1)P_n(x) = 0, \quad (4)$$

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) - nP_n(x) = 0, \quad (5)$$

$n = 1, 2, \dots$. Складывая (4) и (5), приходим к более симметричной формуле

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Задачи

6. Предыдущие рассуждения показывают, что формулы (4), (5) справедливы при $n = 1, 2, \dots$. Прямой подстановкой $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ убедиться, что (4) справедлива и при $n = 0$.

7. Показать, что

$$P_n(1) = 1,$$

$$P_n(-1) = (-1)^n,$$

$$P_{2n+1}(0) = 0,$$

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2},$$

$$P'_n(1) = n(n+1)/2.$$

8. Доказать, что для каждого x и всех достаточно малых t справедливо соотношение

$$\frac{1-t^2}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(x)t^n.$$

9. Показать, что если некоторая функция f может быть разложена в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

сходящийся равномерно в интервале, содержащем точку $x = 1$, то разложение интеграла от этой функции будет

$$\int_1^x f(y) dy = -a_0 - \frac{1}{3}a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{2n-1} - \frac{a_{n+1}}{2n+3} \right) P_n(x).$$

10. Доказать тождество

$$(1-x)[P'_n(x) + P'_{n+1}(x)] = (n+1)[P_n(x) - P_{n+1}(x)].$$

§ 6. Многочлены Лежандра: дифференциальное уравнение и соотношения ортогональности

Продолжая рассуждения предыдущего параграфа, заменим в формуле (4) n на $n-1$:

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) - nP_{n-1}(x) = 0$$

и исключим $P'_{n-1}(x)$ из полученного уравнения и (5):

$$(1-x^2)P'_n(x) + nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) = 0.$$

Смысл последней формулы в том, что она позволяет выразить производную от многочленов Лежандра через сами многочлены. Продифференцируем её по x и снова исключим $P'_{n-1}(x)$ с помощью (5):

$$[(1-x^2)P'_n(x)]' + nP_n(x) + nxP'_n(x) - nP'_{n-1}(x) = 0,$$

$$[(1-x^2)P'_n(x)]' + nP_n(x) + n^2P_n(x) = 0,$$

$$[(1-x^2)P'_n(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Полученное соотношение показывает, что многочлен Лежандра $y = P_n(x)$ является частным решением линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0,$$

называемого *дифференциальным уравнением Лежандра*.

Используем это уравнение для доказательства ортогональности многочленов Лежандра на интервале $(-1, 1)$ с весом $h(x) \equiv 1$. Для этого умножим дифференциальное уравнение для $P_m(x)$ на $P_n(x)$, дифференциальное уравнение для $P_n(x)$ — на $P_m(x)$ и вычтем одно из другого:

$$[(1-x^2)P'_m(x)]'P_n(x) - [(1-x^2)P'_n(x)]'P_m(x) + [m(m+1) - n(n+1)]P_m(x)P_n(x) = 0$$

или

$$\{(1-x^2)[P'_m(x)P_n(x) - P_m(x)P'_n(x)]\}' + (m-n)(m+n+1)P_m(x)P_n(x) = 0.$$

Интегрируя последнее равенство в интервале $(-1, 1)$ и замечая, что интеграл от первого слагаемого равен нулю, находим

$$(m-n)(m+n+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0,$$

откуда следует, что при $m \neq n$

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0.$$

Ортогональность доказана. Найдём норму P_n . Для этого заменим в рекуррентном соотношении (2) n на $n-1$:

$$nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0,$$

умножим полученное уравнение на $(2n+1)P_n(x)$, а само уравнение (2)

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

умножим на $(2n-1)P_{n-1}(x)$ и вычтем из первого второе. Получим

$$n(2n+1)P_n^2(x) + (n-1)(2n+1)P_n(x)P_{n-2}(x) - (n+1)(2n-1)P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - n(2n-1)P_{n-1}^2(x) = 0,$$

$n=2, 3, \dots$, откуда, интегрируя по промежутку $(-1, 1)$ и учитывая уже доказанную выше ортогональность, находим

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx, \quad n = 2, 3, \dots$$

Последовательное применение этой формулы даёт следующие выражение для квадрата нормы многочленов Лежандра

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{3}{5} \int_{-1}^1 P_1^2(x) dx \\ &= \frac{3}{2n+1} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{2n+1}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Непосредственное вычисление показывает, что полученный результат справедлив также при $n = 0$ и $n = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_0^2(x) dx &= \int_{-1}^1 dx = 2 = \frac{2}{2 \cdot 0 + 1}; \\ \int_{-1}^1 P_1^2(x) dx &= \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = \frac{2}{2 \cdot 1 + 1}. \end{aligned}$$

Из доказанного следует, что *многочлены* $(n + 1/2)^{1/2} P_n$ *ортонормированы на интервале* $(-1, 1)$ *с весом* $h(x) \equiv 1$. Кроме того, из формулы (2) с очевидностью следует, что старший коэффициент каждого из них положителен. Но мы знаем, что при заданном весе h этими условиями ортогональные многочлены определяются однозначно. Тем самым мы убедились в эквивалентности двух данных выше определений многочленов Лежандра: одно из них приведено в таблице § 4 и определяет многочлены Лежандра как ортогональные многочлены с весом 1 на интервале $(-1, 1)$, а другое (являющееся для нас основным рабочим инструментом) приведено в § 5 и определяет многочлены Лежандра через производящую функцию.

Теперь мы в состоянии более детально объяснить наш выбор несколько загадочного на первый взгляд способа стандартизации многочленов Лежандра — “с помощью производящей функции.” В соответствии со свойством 5) из § 2 для ортогональных многочленов $(n + 1/2)^{1/2}P_n$ справедлива трёхчленная рекуррентная формула, которая, конечно, совпадает с формулой (2) из § 5. Но если мы перепишем последнюю в терминах многочленов $(n + 1/2)^{1/2}P_n$, то в ней появится три дополнительных множителя вида $(n + 1/2)^{1/2}$ и формула станет более громоздкой. Именно в этом смысле стремление к простоте формул определяет традиционный для многочленов Лежандра способ стандартизации “с помощью производящей функции,” которого мы здесь и придерживаемся.

Задачи

11. Показать, что общее решение дифференциального уравнения Лежандра есть

$$y(x) = aP_n(x) + bP_n(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 - 1)P_n^2(t)}.$$

12. Показать, что уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) + n(n + 1)u = 0$$

удовлетворяет функция $u = P_n(\cos \theta)$.

13. Показать, что уравнению

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left[\left(n + 1/2 \right)^2 + \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \right] u = 0$$

удовлетворяет функция $u = (\sin \theta)^{1/2} P_n(\cos \theta)$.

14. Показать, что если в дифференциальном уравнении Лежандра сделать замену $x^2 = t$, то оно примет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left[\frac{1}{2t} - \frac{1}{1-t} \right] \frac{dy}{dt} + \frac{(n+1)ny}{4t(1-t)} = 0.$$

15. Вычислить интегралы

$$\int_{-1}^1 x P_n(x) P_{n+1}(x) dx \quad \text{и} \quad \int_{-1}^1 x^2 P_n(x) P_{n+1}(x) dx$$

16. Показать, что

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)(P'_n(x))^2 dx = \frac{2n(n+1)}{2n+1}.$$

17. Доказать, что

$$\int_{-1}^1 x(1-x^2)P'_n(x)P'_m(x) dx$$

равняется нулю, кроме случаев, когда $m - n = \pm 1$, и определить его значение в этих случаях.

18. Доказать, что последовательность многочленов P'_n ортогональна на интервале $(-1, 1)$ с некоторым весом и найти его. (Напомним, что в соответствии со свойством 3) § 4 ортогональность производных является общим свойством всех классических ортогональных многочленов).

§ 7. Формула Родрига для многочленов Лежандра

Как было упомянуто в § 4, формула Родрига имеется для каждой последовательности классических ортогональных многочленов. В данном параграфе мы докажем *формулу Родрига*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

для многочленов Лежандра. Здесь под нулевой производной подразумевается сама функция.

Для доказательства мы проверим, что выражение, стоящее в правой части формулы Родрига для многочленов Лежандра, является многочленом степени n , имеющим положительный старший коэффициент и ту же норму в пространстве $L_2^h(-1, 1)$ ($h(x) \equiv 1$), что и P_n , причём многочлены с разными номерами ортогональны. После

чего формула Родрига, очевидно, следует из того, что ортогональные многочлены определяются весовой функцией однозначно.

Используя n раз то обстоятельство, что производная от многочлена степени k есть многочлен степени $k - 1$, видим, что выражение, стоящее в правой части формулы Родрига, является многочленом степени именно n . Столь же просто понять, что этот многочлен имеет положительный старший коэффициент. Следовательно, для реализации нашего плана нужно убедиться только в том, что интеграл

$$I_{mn} = \frac{1}{2^{m+n} n! m!} \int_{-1}^1 \left[\frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m \right] \left[\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right] dx$$

равен $2\delta_{mn}/(2n + 1)$, где δ_{mn} — символ Кронеккера.

Если $m \neq n$, то можно без ограничения общности считать, что $m > n$. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2 - 1)^m \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2 - 1)^m \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n dx \\ &= -\frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2 - 1)^m \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n dx. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что внеинтегральный член зануляется, поскольку многочлен $\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2 - 1)^m$ содержит в качестве множителя выражение $x^2 - 1$, равное нулю при $x = \pm 1$. Повторяя интегрирование по частям m раз, найдём

$$I_{mn} = \frac{(-1)^m}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^m \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n dx.$$

Однако, $m > n$, а значит, $n + m > 2n$, и

$$\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n = 0.$$

Следовательно, при $m \neq n$ $I_{mn} = 0$.

Если же $m = n$, то выведенная выше с помощью интегрирования по частям формула даёт

$$I_{nn} = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n dx.$$

Преобразуя этот интеграл, учтём следующие три обстоятельства. Первое — многочлен $(x^2 - 1)^n$ имеет степень $2n$, причём его старший коэффициент равен 1, а значит его производная порядка $2n$ равна $(2n)!$. Второе — подынтегральная функция чётна. Третье — имеет место равенство $(x^2 - 1)^n = (-1)^n (1 - x^2)^n$. Поэтому

$$I_{nn} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot 2 \int_0^1 (1 - x^2)^n dx.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменной $y = x^2$ и вспомним, что бета-функция Эйлера задаётся интегралом

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1 - t)^{b-1} dt,$$

где a и b — положительные параметры. Тогда можем записать

$$I_{nn} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \int_0^1 y^{-1/2} (1 - y)^n dy = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} B\left(\frac{1}{2}, n + 1\right).$$

В своё время с помощью интегрирования по частям для $b > 1$ была выведена формула

$$B(a, b) = \frac{b - 1}{a + b - 1} B(a, b - 1).$$

Желающие вспомнить это вычисление могут найти его в пункте 529 второго тома книги Г. М. Фихтенгольца “Курс дифференциального и интегрального исчисления.” Используя последнюю формулу и тот факт, что

$$B(a, 1) = \int_0^1 t^{a-1} dt = \frac{1}{a},$$

получаем

$$B(a, n+1) = \frac{n}{a+n} \cdot \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{a+2} \cdot \frac{1}{a+1} \cdot B(a, 1) \\ = \frac{n!}{(a+n)(a+n-1)\dots(a+1)a}.$$

Теперь мы в состоянии закончить вычисление I_{nn} , которое и завершает доказательство формулы Родрига для многочленов Лежандра:

$$I_{nn} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{n! 2^{n+1}}{(1+2n)(1+2n-2)\dots(1+2)1} \\ = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \cdot 2 \cdot \frac{2n \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

§ 8. Разложение функций в ряды по многочленам Лежандра

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. Для всех n и всех $x \in [-1, 1]$ справедливо неравенство $|P_n(x)| \leq 1$.

Доказательство. Когда вы применяли формулу Тейлора для получения разложений элементарных функций в степенные ряды, вы получили формулу

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,$$

справедливую при $|x| < 1$ и любом вещественном α . Правая часть этой формулы называется биномиальным рядом. Найти коэффициенты этого ряда совсем не трудно, если последовательно вычислять значения производных функции $(1+x)^\alpha$ при $x = 0$. Сложнее доказать, что при каждом $x \in (-1, 1)$ сумма этого ряда равна $(1+x)^\alpha$, для чего нужно оценивать остаточный член в формуле Тейлора этой функции. Мы этого сейчас делать не будем, а желающие освежить такое рассуждение в своей памяти могут найти подробности в пункте 407 второго тома трёхтомника “Курс дифференциального и интегрального исчисления” Г. М. Фихтенгольца.

Положив $\alpha = -1/2$ и заменив x на $-x$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-1)^n x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

где для краткости введено обозначение

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}, \quad a_0 = 1,$$

а разложение имеет место для всех $x \in (-1, 1)$.

В производящей функции

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

многочленов Лежандра сделаем замену переменной $x = \cos \theta$ ($-\pi < \theta < \pi$):

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t \cos \theta + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) t^n.$$

С другой стороны, воспользовавшись формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ и биномиальным разложением для функции $(1-x)^{-1/2}$, можем написать при $|t| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2t \cos \theta + t^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-e^{i\theta}t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^{-i\theta}t}} \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{i\theta m} t^m \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-i\theta k} t^k \right). \end{aligned}$$

Поскольку известно, что степенные ряды можно почленно перемножать внутри интервала сходимости, то, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t в двух последних формулах, получим

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= \sum_{m=0}^n a_m a_{n-m} e^{i\theta(2m-n)} \\ &= a_0 a_n \cos n\theta + a_1 a_{n-1} \cos(n-2)\theta + \dots + a_n a_0 \cos n\theta. \end{aligned}$$

Учитывая, что все a_n положительны, можем написать

$$|P_n(\cos \theta)| \leq a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0 = P_n(1) = 1.$$

Чтобы убедиться в последнем равенстве, достаточно в производящей функции положить $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Лемма доказана.

Теорема. Если функция $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема, то для каждого $x \in [-1, 1]$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

где $c_n = (P_n, P_n)^{-1}(f, P_n) = (n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$.

Доказательство. Как было показано в § 6, многочлены $(n + 1/2)^{1/2} P_n$ ортонормированы на интервале $(-1, 1)$ с весом $h(x) \equiv 1$. Для произвольной функции $g \in L_2^h[-1, 1]$ обозначим через $\lambda_n(g)$ её n -й коэффициент Фурье относительно системы многочленов $(n+1/2)^{1/2} P_n$, т. е. положим

$$\lambda_n(g) = (n + \frac{1}{2})^{1/2} \int_{-1}^1 g(x) P_n(x) dx.$$

Предполагая, что функция g имеет непрерывную первую производную и воспользовавшись рекуррентной формулой (6) из § 5:

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n + 1)P_n(x),$$

с помощью интегрирования по частям можем написать

$$\begin{aligned} \lambda_n(g) &= \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1/2} \left[\int_{-1}^1 g(x) P'_{n+1}(x) dx - \int_{-1}^1 g(x) P'_{n-1}(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1/2} \left[g(x) P_{n+1}(x) \Big|_{-1}^1 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-1}^1 g'(x) P_{n+1}(x) dx - g(x) P_{n-1}(x) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 g'(x) P_{n-1}(x) dx \Big] \\
& = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1/2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^{-1/2} \lambda_{n-1}(g') \\
& \quad - \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1/2} \left(n + \frac{3}{2}\right)^{-1/2} \lambda_{n+1}(g').
\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы учли, что внеинтегральные члены попарно сокращаются, т. к. из доказательства леммы мы знаем, что $P_{n+1}(1) = P_{n-1}(1) = 1$ и, аналогично, $P_{n+1}(-1) = P_{n-1}(-1) = (-1)^{n+1}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(-1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

Введём обозначения

$$a_n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1/2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^{-1/2}; \quad b_n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1/2} \left(n + \frac{3}{2}\right)^{-1/2}$$

и перепишем доказанную выше формулу в более коротком виде:

$$\lambda_n(g) = a_n \lambda_{n-1}(g') - b_n \lambda_{n+1}(g').$$

Повторное применение этой формулы даёт

$$\begin{aligned}
c_n & = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \lambda_n(f) \\
& = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} [a_n \lambda_{n-1}(f') - b_n \lambda_{n+1}(f')] \\
& = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \{a_n [a_{n-1} \lambda_{n-2}(f'') - b_{n-1} \lambda_n(f'')] \\
& \quad - b_n [a_{n+1} \lambda_n(f'') - b_{n+1} \lambda_{n+2}(f'')]\}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Теперь заметим, что числа $\lambda_n(f'')$ являются коэффициентами Фурье непрерывной функции f'' относительно ортонормированной системы $(P_n, P_n)^{-1/2} P_n$. Поэтому неравенство Бесселя даёт

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_n(f'')]^2 \leq \int_{-1}^1 [f''(x)]^2 dx < +\infty.$$

Как известно общий член сходящейся числового ряда стремится к нулю, а значит — ограничен. Следовательно найдётся такая постоянная K , что для всех n выполнено неравенство

$$|\lambda_n(f'')| \leq K.$$

Кроме того, очевидно, каждая из последовательностей a_n и b_n эквивалентна последовательности $1/2n$ при $n \rightarrow \infty$ (Напомним, что последовательности называются эквивалентными, если предел отношения их n -ых членов равен единице). Следовательно, найдётся постоянная M такая, что для всех достаточно больших номеров n будут выполнены неравенства

$$a_n \leq M/n \text{ и } b_n \leq M/n.$$

Учитывая сказанное, из равенства (7) заключаем, что для всех достаточно больших номеров n выполнено неравенство

$$|c_n| \leq 4KM^2(n + \frac{1}{2})^{1/2}/n^2 \leq \text{const}/n^{3/2}.$$

Поскольку $|P_n(x)| \leq 1$ для всех $x \in (-1, 1)$ и всех n , то последнее неравенство означает, что модуль n -ого члена функционального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ оценивается сверху n -ым членом сходящегося числового ряда $\text{const} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$. Значит функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ сходится равномерно и его сумма является функцией непрерывной.

Легко убедиться, что все коэффициенты Фурье непрерывной функции $g(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ относительно ортонормированной системы $(n + 1/2)^{1/2} P_n$ равны нулю:

$$\begin{aligned} \lambda_m(g) &= (m + \frac{1}{2})^{1/2} \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (m + \frac{1}{2})^{1/2} \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx \\ &= (m + \frac{1}{2})^{-1/2} c_m - (m + \frac{1}{2})^{-1/2} c_m = 0. \end{aligned}$$

Используя критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве и тот факт, что $(n + 1/2)^{1/2}P_n$ — полная система, отсюда заключаем, что функция g равна нулю в смысле пространства $L_2^h[-1, 1]$. Последнее, как известно, означает, что

$$\int_{-1}^1 g^2(x)h(x) dx = 0. \quad (8)$$

Остаётся заметить, что если бы неотрицательная непрерывная функция g^2 была строго положительной хоть в одной точке промежутка $[-1, 1]$, то интеграл (8) был бы положителен. Значит для всех $x \in [-1, 1]$ $g(x) = 0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что только что доказанная теорема аналогична изучавшимся ранее теоремам о разложении функции в тригонометрический ряд. Несколько усложнив доказательство, мы могли бы, как и в случае рядов Фурье, получить теорему о разложении разрывных функций в ряд по многочленам Лежандра. И вновь оказалось бы, что в точке разрыва сумма ряда сходится к полусумме пределов функции слева и справа.

Аналогию с рядами Фурье можно продолжить, если вспомнить, что чем более гладкой является функция, тем быстрее стремится к нулю её коэффициент Фурье. Легко понять, что в нашем случае равенство (7), равно как и предшествующее ему, выражают именно это обстоятельство.

Задачи

19. Разложить в ряд по многочленам Лежандра следующие функции:

- | | |
|---|----------------------------------|
| а) x^2 ; | б) $\frac{1}{\sqrt{1-px}}$; |
| в) $\sqrt{1-px}$; | г) $\frac{1-x^2}{2\sqrt{1-x}}$; |
| д) e^{ax} ; | е) δ — функция Дирака; |
| ж) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 \leq x < \alpha; \\ 1, & \text{если } \alpha < x \leq 1. \end{cases}$ | |

20. Используя формулу

$$P_n(\cos \theta) = a_0 a_n \cos n\theta + a_1 a_{n-1} \cos(n-2)\theta + \dots + a_n a_0 \cos n\theta,$$

полученную при доказательстве леммы, показать, что

$$P_{2n}(\cos \theta) = 2 \cdot \frac{(4n-1)!!}{(4n)!!} \cos 2n\theta + 2 \cdot \frac{(4n-3)!!}{(4n-2)!!} \cdot \frac{1}{2} \cos(2n-2)\theta \\ + 2 \cdot \frac{(4n-5)!!}{(4n-4)!!} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cos(2n-4)\theta + \dots + \frac{(4n-2n-1)!!}{(4n-2n)!!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

причём коэффициента 2 нет только у последнего слагаемого.

21. Используя предыдущую задачу показать, что

$$\int_0^\pi P_{2n}(\cos \theta) d\theta = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \pi.$$

22. Используя предыдущую задачу, разложить в ряд по многочленам Лежандра следующие функции:

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{б) } \arcsin x.$$

§ 9. Мультипольное разложение кулонова потенциала

Если в точке трёхмерного пространства с радиус-вектором \vec{r}_1 помещён единичный положительный электрический заряд, то, как известно, потенциал созданного им поля в точке с радиус-вектором \vec{r}_2 , равен

$$\Phi = \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

Введя обозначение $r_1 = |\vec{r}_1|$, $r_2 = |\vec{r}_2|$, $r_- = \min(r_1, r_2)$, $r_+ = \max(r_1, r_2)$, $t = r_-/r_+$ θ — угол между векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , можем записать

$$\Phi = \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2 \cos \theta + r_2^2}} = \frac{1}{r_+ \sqrt{1 - 2t \cos \theta + t^2}}.$$

Поскольку $0 \leq t \leq 1$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ сходится для всех $|t| < 1$, можем записать

$$\Phi = \frac{1}{r_+} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r_-}{r_+} \right)^n. \quad (9)$$

Интересно, что в этой формуле r_1 и r_2 меняются ролями в зависимости от того, что из них больше. Вопрос о сходимости ряда при $r_+ = r_-$ мы не обсуждаем.

Полученная формула часто применяется в теоретической физике. Приведём пример, называемый мультипольным разложением кулонова потенциала.

Пусть заряд занимает конечный объём V , а плотность заряда задана функцией $\rho(\vec{r})$. Будем интересоваться потенциалом поля, создаваемого этим зарядом на расстояниях много бóльших, чем линейные размеры объёма V . Введём прямоугольную систему координат с началом внутри объёма V и обозначим через \vec{r} радиус-вектор текущей точки объёма V , а через \vec{R} — радиус-вектор точки, в которой вычисляется потенциал. Тогда, как известно,

$$\Phi(\vec{R}) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|} dV.$$

Используя обозначения $R = |\vec{R}|$, $r = |\vec{r}|$, θ — угол между векторами \vec{R} и \vec{r} , а также формулу (8), получим

$$\Phi(\vec{R}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \iiint_V \rho(\vec{r}) r^n P_n(\cos \theta) dV = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n}{R^{n+1}}.$$

Отметим, что первые три коэффициента в последней формуле имеют собственные названия:

$$\sigma_0 = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV \text{ — полный заряд;}$$

$$\sigma_1 = \iiint_V \rho(\vec{r}) r \cos \theta dV \text{ — дипольный момент;}$$

$$\sigma_2 = \iiint_V \rho(\vec{r}) r^2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} dV \text{ — квадрупольный момент.}$$

§ 10. Применение многочленов Лежандра при решении дифференциальных уравнений

Как известно, многие проблемы электростатики, термодинамики и других разделов физики могут быть сведены к задаче о нахождении потенциала, т. е. гармонической функции u , заданной в области D и

удовлетворяющей на её границе ∂D условиям вида

$$u|_{\partial D} = f \quad \text{или} \quad \left. \frac{du}{dn} \right|_{\partial D} = f$$

где f — заданная функция на поверхности ∂D , а n — её внешняя нормаль.

В настоящем параграфе мы будем решать такую задачу для сферы. Причём, чтобы не выходить за пределы изложенных в предыдущих параграфах сведений о многочленах Лежандра, мы ограничимся случаем симметрии вращения. Последнее означает, что значения граничной функции f не изменяются при вращении точек сферы вокруг некоторой оси, которую без ограничения общности можно считать осью z .

Более точно нашу задачу можно сформулировать так: *Предполагая, что в трёхмерном пространстве введены сферические координаты, найти функцию $u = u(r, \varphi, \theta)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа*

$$\Delta u = 0$$

в шаре $r < a$ и принимающую на сфере $r = a$ заданные значения

$$u|_{r=a} = f(\theta).$$

Как известно, уравнение Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Поскольку граничные значения $u|_{r=a}$ не меняются при поворотах относительно оси z , т. е. не зависят от φ , то кажется естественным искать решение u , не меняющееся при поворотах относительно оси z , т. е. не зависящее от φ . Но тогда последний член в уравнении Лапласа занулится.

Двигаясь дальше, будем искать частные решения уравнения Лапласа в виде

$$u(r, \theta) = R(r)\Psi(\theta).$$

Тогда

$$\frac{1}{r^2} \Psi \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} R \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right) = 0$$

или

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\Psi \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right).$$

Левая часть последней формулы зависит только от r , а правая — только от θ . Поэтому и левая и правая часть есть постоянная величина, которую мы обозначим через $n(n+1)$, считая n натуральным числом. Теперь наша задача свелась к нахождению решений обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1)R = 0 \quad (10)$$

и

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right) + n(n+1) \sin \theta \Psi = 0. \quad (11)$$

Изложенный в предыдущем абзаце приём сведения уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, называется *методом разделения переменных* и часто используется в математике и её приложениях.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что уравнению (10) удовлетворяет функция

$$R(r) = Ar^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

а уравнению (11) — функция

$$\Psi(\theta) = BP_n(\cos \theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где A и B — произвольные постоянные. В самом деле, как известно, n -ый многочлен Лежандра P_n является частным решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0.$$

Сделаем в нём замену переменного, полагая $x = \cos \theta$. Тогда $dx = -\sin \theta d\theta$, а значит

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin \theta}$$

и

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy(\cos \theta)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{dy(\cos \theta)}{d\theta}.$$

Дважды применяя последнюю формулу к дифференциальному уравнению Лежандра, будем последовательно иметь

$$\frac{d}{dx} \left[-\sin^2 \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right] + n(n+1)P_n(\cos \theta) = 0,$$

$$\frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right] + n(n+1) \sin \theta P_n(\cos \theta) = 0,$$

а значит Ψ — решение уравнения (11).

Таким образом, мы имеем набор частных решений

$$Cr^n P_n(\cos \theta), \quad n = 0, 1, \dots,$$

уравнения Лапласа, а поскольку оно линейно, то и любая линейная комбинация

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos \theta)$$

этих решений снова есть решение. И нам остаётся подобрать коэффициенты c_n так, чтобы решение принимало на поверхности шара $r < a$ заданные значения.

Другими словами, мы хотим подобрать коэффициенты c_n так, чтобы для всех $\theta \in [0, \pi]$ имело место равенство

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n P_n(\cos \theta).$$

Это очень похоже на разложение функции в ряд по многочленам Лежандра. Действительно, если мы сделаем замену переменных $\cos \theta = x$, то последнее равенство переписется в виде

$$f(\arccos x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n P_n(x), \quad x \in [-1, 1].$$

Значит, речь идёт о том, чтобы разложить функцию $g(x) = f(\arccos x)$ в ряд по многочленам Лежандра в интервале $[-1, 1]$. Поскольку функция “арккосинус” бесконечно дифференцируема, то, согласно теореме из § 8, для дважды непрерывно дифференцируемой функции f такое разложение справедливо и даётся формулами

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(x),$$

где $c_n a^n = g_n = (n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^1 g(x) P_n(x) dx = (n + \frac{1}{2}) \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$.

Окончательно получаем, что функция

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad (12)$$

где $g_n = (n + \frac{1}{2}) \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ удовлетворяет и уравнению Лапласа и граничным условиям.

Как это обычно бывает, получив решение, постараемся его обдумать с разных сторон.

Прежде всего заметим, что функциональный ряд, стоящий в правой части формулы (12) сходится в каждой точке шара $r < a$, т. к. каждый его член мажорируется соответствующим членом сходящейся геометрической прогрессии $K \sum_{n=0}^{\infty} (r/a)^n$.

В процессе решения мы сделали следующие упрощающие предположения:

- а) $u(r, \varphi, \theta) = R(r)\Psi(\theta)$;
- б) общая постоянная в уравнениях (10) и (11) равна не произвольному вещественному числу, а $-n(n+1)$, где n — натуральное;
- в) для каждого из уравнений (10) и (11) мы брали одно из двух его линейно независимых решений.

Поэтому нетривиальным становится утверждение о том, что мы не потеряли никаких решений. Это действительно так и следует из того, что решение нашей задачи единственно: изучая формулу Гаусса — Остроградского, вы доказывали, что гармоническая функция в ограниченной области однозначно определяется своими значениями на границе области. Те, кто хочет вспомнить доказательство этого факта, могут посмотреть задачу 4395 из “Сборника задач и упражнений по математическому анализу” Б. П. Демидовича — там в двух словах намечен план доказательства.

§ 11. Поле точечного заряда, помещённого внутри полой проводящей сферы

Применим результаты предыдущего параграфа для *нахождения*

поля точечного заряда q , помещённого внутри полой проводящей сферы радиуса a на расстоянии b от её центра.

Поместим начало координат в центр сферы и направим ось z через точку A , в которой находится заряд. Нам будет удобно представить искомый потенциал Φ в виде суммы потенциала источника (т. е. потенциала, создаваемого зарядом q) и потенциала u вторичного поля, создаваемого зарядами, индуцированными на внутренней поверхности сферы:

$$\Phi = \frac{q}{\rho} + u,$$

где $\rho = |AM| = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}$ — расстояние от точки A до произвольной точки M , в которой ищется потенциал, имеющей в сферической системе координаты (r, φ, θ) .

Поскольку мы имеем дело со статикой, то потенциал Φ на сфере $r = a$ равен нулю. Следовательно, мы имеем граничные условия для функции u :

$$u|_{r=a} = -\frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} = f(\theta).$$

(Правое равенство здесь является обозначением). Кроме того, из электростатики известно, что потенциал u удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. Тем самым мы пришли к задаче, решённой в предыдущем параграфе: *найти функцию u , удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в шаре $r < a$ и граничным условиям $u|_{r=a} = f(\theta)$ на сфере $r = a$.*

Как мы знаем, основным элементом решения этой задачи является разложение функции $f(\theta)$ в ряд по многочленам $P_n(\cos \theta)$. В нашем случае нет необходимости вычислять интегралы из формулы (12). Достаточно в формуле для производящей функции

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

положить $t = b/a$, $x = \cos \theta$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} = -\frac{q}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{a}\right) \cos \theta}} \\ &= -\frac{q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{b}{a}\right)^n. \end{aligned}$$

После этого формула (12) даёт

$$u = -\frac{q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{br}{a^2}\right)^n P_n(\cos \theta).$$

Преобразуем полученное выражение с помощью формулы для производящей функции. Положив в ней $t = br/a^2$, $x = \cos \theta$, будем иметь

$$\begin{aligned} u &= -\frac{q}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{br}{a^2}\right) \cos \theta + \left(\frac{br}{a^2}\right)^2}} \\ &= -\frac{qa}{b} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2 - 2r\left(\frac{a^2}{b}\right) \cos \theta + r^2}} = \frac{q'}{\rho'}, \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения

$$q' = -\frac{qa}{b}, \quad \rho' = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2b'r \cos \theta + b'^2}}, \quad b' = \frac{a^2}{b}.$$

Теперь мы видим, что окончательно искомый потенциал может быть представлен в виде суммы

$$\Phi = \frac{q}{\rho} + \frac{q'}{\rho'}.$$

Здесь первое слагаемое является потенциалом заряда q в отсутствие сферы, второе же можно интерпретировать как потенциал некоторого вспомогательного заряда q' , называемого отражённым и учитывающего влияние проводящей сферы, помещённого в точке A' , полученной из точки A инверсией относительно сферы $r = a$. (Напоминание: говорят, что точка A' получена из точки A инверсией относительно сферы $r = a$ с центром в точке O , если обе они лежат на одном луче, выходящем из O и $|OA| \cdot |OA'| = a^2$. Легко понять, что в нашем случае $|OA| = b$, $|OA'| = b' = a^2/b$, а значит действительно $|OA| \cdot |OA'| = bb' = a^2$).

Задачи

23. Вычислить плотность заряда на проводящей границе полости $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, в которую помещён заряд q на расстоянии $r = b < 1$ от центра.

24. Определить возмущённый электростатический потенциал при внесении нейтральной проводящей сферы радиуса r в первоначально однородное электромагнитное поле.

§ 12. Многочлены Эрмита: производящая функция и формула Родрига

Разложим функцию

$$w(x, t) = e^{2xt-t^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{C},$$

в ряд Тейлора в нуле:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \quad (13)$$

Ниже мы увидим, что функции H_n являются многочленами, ортогональными на всей числовой прямой с весом e^{-x^2} . Именно их мы и будем называть *многочленами Эрмита*. При таком подходе очевидно, что функция $w(x, t) = e^{2xt-t^2}$ является для них производящей.

В соответствии с формулой Тейлора имеем

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \left. \frac{\partial^n w}{\partial t^n} \right|_{t=0} = e^{x^2} \left[\left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right] \right|_{t=0} \\ &= (-1)^n e^{x^2} \left[\left. \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} \right] \right|_{y=x}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad H_0(x) = 1.$$

Это выражение называется *формулой Родрига*.

Задачи

25. Доказать, что

$$\begin{aligned} H_{2n}(0) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, & H_{2n+1}(0) &= 0, \\ H'_{2n}(0) &= 0, & H'_{2n+1}(0) &= (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} 2. \end{aligned}$$

26. Найти $H_1(x)$, $H_2(x)$ и $H_3(x)$, выполнив дифференцирование в формуле Родрига.

27. Доказать, что если n — чётно, то $H_n(x)$ является чётной функцией от x , а если n — нечётно, то — нечётной.

28. Доказать равенства

$$e^{t^2} \cos(2xt) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H_{2n}(x) \frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

$$e^{t^2} \sin(2xt) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H_{2n+1}(x) \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

29. Доказать тождество

$$e^{x^2} H_n(x) = -\frac{d}{dx} e^{x^2} H_{n-1}(x).$$

30. С помощью производящей функции получить теорему сложения для многочленов Эрмита:

$$H_n(x \cos \alpha + y \sin \alpha) = n! \sum_{k=0}^n \frac{H_k(x) H_{n-k}(y)}{k! (n-k)!} \cos^k \alpha \sin^{n-k} \alpha.$$

§ 13. Многочлены Эрмита: рекуррентные формулы и дифференциальное уравнение

Поскольку

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 2(x-t)e^{2xt-t^2},$$

то имеет место тождество

$$\frac{\partial w}{\partial t} - (2x-2t)w = 0.$$

Подставляя в него вместо w степенной ряд (13) и вспоминая, что в пределах круга сходимости степенной ряд можно дифференцировать почленно, будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при t^n , получим *рекуррентную формулу*

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что если H_n и H_{n-1} являются многочленами степени n и $n - 1$ соответственно, то H_{n+1} является многочленом степени $n + 1$. Поскольку $H_0(x) = 1$ и $H_1(x) = 2x$ являются многочленами степени 0 и 1, отсюда на основании принципа математической индукции заключаем, что *при каждом n функция H_n действительно является многочленом степени n .*

Аналогично из тождества

$$\frac{\partial w}{\partial x} - 2tw = 0,$$

легко получить ещё одну рекуррентную формулу

$$H'_n(x) - 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

Складывая формулы (14) и (15), придём к соотношению

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H'_n(x) = 0,$$

продифференцировав которое ещё раз и вновь используя формулу (15), получим

$$H'_{n+1}(x) - 2H_n(x) - 2xH'_n(x) + H''_n(x) = 0,$$

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Значит, функция $y = H_n(x)$ является частным решением уравнения

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Задачи

31. Доказать тождество

$$e^{-x^2} H_n(x) = -\frac{d}{dx} e^{-x^2} H_{n-1}(x).$$

32. Проверить, что функция $y_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$, называемая *функцией Эрмита*, является частным решением уравнения

$$y'' + (2n + 1 - x^2)y = 0.$$

§ 14. Многочлены Эрмита: соотношения ортогональности

Нам предстоит доказать *соотношения ортогональности*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Из них, в частности, следует, что многочлены H_n ортогональны на всей числовой оси с весом e^{-x^2} .

Пусть $y_n = e^{-x^2/2} H_n(x)$. Тогда, в силу задачи 32, имеем

$$y_n'' + (2n + 1 - x^2)y_n = 0,$$

$$y_m'' + (2m + 1 - x^2)y_m = 0.$$

Умножив первое из этих равенств на y_m , второе — на y_n и вычтя второе из первого, получим

$$y_m'' y_n - y_m' y_n' + 2(n - m)y_n y_m = 0,$$

что можно также переписать в виде

$$\frac{d}{dx}(y_n' y_m - y_m' y_n) + 2(n - m)y_n y_m = 0.$$

Интегрируя последнее соотношение от минус до плюс бесконечности и учитывая тот очевидный факт, что $y_n(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, будем иметь

$$2(n - m) \int_{-\infty}^{+\infty} y_n y_m dx = 2(n - m) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0.$$

Если $n \neq m$, то из этого равенства следует ортогональность многочленов H_n и H_m с весом e^{-x^2} .

Чтобы рассмотреть случай $n = m$, запишем рекуррентную формулу (14)

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и заменим в ней n на $n - 1$:

$$H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

Умножим первое из этих соотношений на H_{n-1} , второе — на H_n и вычтем второе из первого:

$$2nH_{n-1}^2(x) + H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}H_n(x) - H_n^2(x) = 0,$$

$n=2, 3, \dots$. Умножим полученное равенство на e^{-x^2} , проинтегрируем по всей вещественной прямой и воспользуемся установленной выше ортогональностью многочленов Эрмита. В результате получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x) dx, \quad n = 2, 3, \dots$$

Следовательно, мы сумели выразить искомый интеграл для H_n через такой же интеграл для H_{n-1} . Многократно применяя эту формулу, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx &= 2n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x) dx = \dots \\ &= 2^{n-1} n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_1^2(x) dx = 2^{n-1} n! 4 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Последнее равенство здесь написано в силу следующего вычисления, использующего интегрирование по частям и известное значение интеграла Эйлера — Пуассона $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \right)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^2 dx &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x d(e^{-x^2}) \\ &= -\frac{1}{2} x e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Задача

33. Показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^2 H_n^2(x) dx = 2^n n! \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}.$$

(Заметим, что этот интеграл встречается при подсчёте среднего квадрата смещения квантового осциллятора.)

§ 15. Разложение функций в ряды по многочленам Эрмита

Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *кусочно-гладкой*, если для каждого положительного вещественного числа a найдется конечное число точек $-a = a_1 < a_2 < \dots < a_n = a$ таких, что на каждом интервале (a_i, a_{i+1}) функция f непрерывно дифференцируема, а в каждой точке $x + a_i$ она имеет конечные пределы слева и справа

$$f(x-0) = \lim_{h \rightarrow +0} f(x-h), \quad f(x+0) = \lim_{h \rightarrow +0} f(x+h),$$

а также конечную левую и правую производные

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x-h) - f(x-0)}{-h}, \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}.$$

Напомним, что именно такое определение кусочно-гладкой функции мы принимали, когда изучали вопрос о разложении функции в тригонометрический ряд Фурье. При этом, очевидно, допускается, что кусочно-гладкая функция имеет точки разрыва.

Теорема. Если для кусочно-гладкой функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f^2(x) dx$$

имеет конечное значение, то в каждой точке x непрерывности функции f имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x),$$

$$\text{где } c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx.$$

Доказательство этой теоремы мы опустим, т.к. оно с одной стороны довольно громоздко, а с другой — не даёт ничего нового в идейном плане после того, как были доказаны аналогичные теоремы о разложении функции в тригонометрический ряд Фурье и в ряд по многочленам Лежандра. Интересующиеся могут найти это доказательство в монографии Н. Н. Лебедева “Специальные функции и их приложения,” стр. 91–97.

Методы нахождения разложений для функций частного вида мы продемонстрируем на следующих примерах.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^{2p}$ ($p = 0, 1, 2, \dots$).

Поскольку функция f чётна, а многочлен H_{2n+1} — нечётен, то

$$c_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1} (2n+1)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) H_{2n+1}(x) dx = 0,$$

т. к. под интегралом стоит нечётная функция.

Чтобы найти c_{2n} , воспользуемся формулой Родрига и правилом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{1}{2^{2n} (2n)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) H_{2n}(x) dx \\ &= \frac{1}{2^{2n} (2n)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} e^{-x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2^{2n} (2n)! \sqrt{\pi}} \left[x^{2p} \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right. \\ &\quad \left. - 2p \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p-1} \left(\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} e^{-x^2} \right) dx \right] = \dots \\ &= \frac{(2p)(2p-1)\dots(2p-2n+1)}{2^{2n} (2n)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p-2n} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

В процессе вычислений мы учли, что все внеинтегральные члены за-
нуляются. Из последнего выражения видно, что если $n > p$, то в
числителе дроби, стоящей перед интегралом, один из сомножителей
будет равен нулю. Следовательно, если $n > p$, то $c_{2n} = 0$.

Предполагая, что $n \leq p$ и пользуясь чётностью подынтегральной
функции, можем написать

$$c_{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(2p)!}{(2p-2n)!} \cdot 2 \int_0^{+\infty} x^{2p-2n} e^{-x^2} dx.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $x^2 = y$ и вспом-
ним, что для $\alpha > 0$ гамма — функция Эйлера задаётся интегралом

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

Тогда

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(2p)!}{(2p-2n)!} \int_0^{+\infty} y^{p-n} e^{-y} \frac{dy}{\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(2p)!}{(2p-2n)!} \Gamma\left(p-n+\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Чтобы избежать прямого вычисления последнего интеграла, восполь-
зуемся функциональными свойствами гамма — функции: $\Gamma(\alpha+1) =$
 $\alpha\Gamma(\alpha)$ и его следствием $\Gamma(n+1) = n!$, а также формулой удвоения

$$2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2\alpha).$$

Применяя формулу удвоения для $\alpha = p-n+\frac{1}{2}$, получим

$$2^{2p-2n}\Gamma\left(p-n+\frac{1}{2}\right)(p-n)! = \sqrt{\pi}(2p-2n)!.$$

Следовательно,

$$c_{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(2p)!}{(2p-2n)!} \frac{\sqrt{\pi}(2p-2n)!}{2^{2p-2n}(p-n)!} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(2n)!(p-n)!}.$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$x^{2p} = \sum_{n=0}^p \frac{(2p)!}{2^{2p}(2n)!(p-n)!} H_{2n}(x), \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пример 2. Пусть $f(x) = e^{ax}$, где a — произвольное вещественное или комплексное число.

Как и в предыдущем примере, разложение можно найти, вычисляя c_n с помощью интегралов. Но в данном случае проще подставить в разложение для производящей функции

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

значение $t = a/2$. Тогда сразу найдём

$$e^{ax} = e^{a^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{2^n n!} H_n(x).$$

Задачи

34. Разложить следующие функции в ряды по многочленам Эрмита:

- | | |
|--|------------------------------------|
| а) $f(x) = \cos 2x$; | б) $f(x) = \sin 2x$; |
| в) $f(x) = \operatorname{ch} 2x$; | г) $f(x) = \operatorname{sh} 2x$; |
| д) $f(x) = x^{2p+1}$, $p = 0, 1, 2, \dots$; | |
| е) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$ | |
| ж) $f(x) = x $. | |

§ 16. Функции Эрмита. Уравнение Шрёдингера для гармонического осциллятора

Как уже говорилось в задаче 32, функции $y_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, называются *функциями Эрмита*. Следующие их свойства являются простой переформулировкой известных нам свойств многочленов Эрмита и в доказательстве не нуждаются:

1) *Функции Эрмита ортогональны на интервале $(-\infty, +\infty)$ с весом единица:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_n(x)y_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m; \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{если } n = m. \end{cases}$$

2) *Всякая непрерывно дифференцируемая функция f , интегрируемая с квадратом на $(-\infty, +\infty)$ может быть разложена в ряд по функциям Эрмита:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)y_n(x) dx.$$

3) *Если $\lambda = 2n + 1$, то функция Эрмита $y_n(x)$ является частным решением уравнения*

$$y'' + (\lambda - x^2)y = 0. \tag{16}$$

Ниже нам понадобится такое уточнение последнего свойства: *если λ не равняется ни одному из чисел вида $\lambda_n = 2n + 1$ ($n = 0, 1, \dots$), то уравнение (16) не имеет ненулевых решений, интегрируемых с квадратом на интервале $(-\infty, +\infty)$.*

Рассуждая от противного, предположим, что такое решение y , соответствующее некоторому λ , нашлось. Задав произвольно $n = 0, 1, 2, \dots$, будем иметь

$$y'' + (\lambda - x^2)y = 0,$$

$$y_n'' + (\lambda_n - x^2)y_n = 0.$$

Умножив первое из этих равенств на y_n , второе — на y и вычтя второе из первого, получим

$$y''y_n - y_n''y + (\lambda - \lambda_n)yy_n = 0,$$

что можно также записать в виде

$$\frac{d}{dx}(y'y_n - y_n'y) + (\lambda - \lambda_n)yy_n = 0. \tag{17}$$

Тот факт, что функция $y_n(x) = e^{-x^2} H_n(x)$ и её производная y'_n стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$, очевиден. Поскольку функция y интегрируема с квадратом на интервале $(-\infty, +\infty)$, то можно показать, что существуют последовательности чисел a_k и b_k стремящиеся к плюс и минус бесконечности, соответственно, такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} y'(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} y(b_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} y'(b_k) = 0$$

Тогда, интегрируя равенство (17) в пределах от a_k до b_k , получим

$$[y'(x)y_n(x) - y'_n(x)y(x)] \Big|_{b_k}^{a_k} + (\lambda - \lambda_n) \int_{b_k}^{a_k} y(x)y_n(x) dx = 0.$$

Откуда, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, найдём

$$(\lambda - \lambda_n) \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)y_n(x) dx = 0.$$

Поскольку по предположению λ не равняется ни одному из чисел λ_n , отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)y_n(x) dx = 0.$$

Другими словами, это равенство означает, что все коэффициенты Фурье функции y относительно ортогональной системы функций y_n равны нулю. Но функция y является решением дифференциального уравнения второго порядка, а значит — как минимум дважды непрерывно дифференцируема. Поэтому она разлагается в поточечно сходящийся ряд Фурье по функциям Эрмита. Но выше мы убедились, что все коэффициенты этого ряда равны нулю, а значит функция y тождественно равна нулю. Что и требовалось доказать.

В квантовой механике стационарное состояние частицы, находящейся в стационарном (т. е. не зависящем от времени t) поле с потенциалом $U = U(x, y, z)$, описывается волновой функцией

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{\frac{iE}{\hbar}t},$$

где \hbar — постоянная Планка, E — общая энергия частицы, а функция ψ удовлетворяет *стационарному уравнению Шрёдингера*

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

и условию нормировки

$$\iiint |\psi|^2 dx dy dz = 1.$$

Здесь m обозначает массу частицы, а Δ — оператор Лапласа, т. е.

$$\Delta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Задача состоит в том, чтобы найти указанные выше стационарные состояния, т. е. найти набор собственных значений энергии E и соответствующих решений ψ стационарного уравнения Шрёдингера.

В случае гармонического осциллятора (т. е. грузика, подвешенного на пружинке) потенциал U имеет вид

$$U = \frac{m\omega^2}{2}x^2,$$

где ω — собственная (циклическая) частота осциллятора, а x — величина отклонения от положения равновесия. Стационарное уравнение Шрёдингера при этом превратится в

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega^2}{2}x^2 \right) \psi = 0$$

при дополнительном условии нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Вводя обозначения

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad z = \frac{x}{x_0},$$

для функции $\psi = \psi(z)$ после очевидных преобразований, получим уравнение

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + (\lambda - z^2)\psi = 0$$

с дополнительным условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(z)|^2 dz = \frac{1}{x_0}.$$

Если λ принимает одно из значений $\lambda_n = 2n + 1$ ($n = 0, 1, \dots$), то последнее уравнение имеет решение

$$\psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-z^2/2} H_n(z)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}.$$

Как следует из приведённых выше свойств функций Эрмита, при других значениях λ уравнение (18) ненулевых решений не имеет.

Возвращаясь к исходным обозначениям, находим

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}},$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из последней формулы мы видим, что с точки зрения квантовой механики энергия осциллятора может принимать лишь дискретный набор значений E_n . Это обстоятельство кардинально отличает квантовую механику от классической, где, как известно, энергия осциллятора

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

может равняться произвольному положительному числу (p — импульс частицы). Чтобы подчеркнуть это отличие, говорят, что в квантовой механике энергия квантуется. Число n , определяющее номер квантового уровня, называют главным квантовым числом. В низшем квантовом состоянии при $n = 0$ энергия осциллятора отлична от нуля и равна

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega.$$

§ 17. Многочлены Лагерра: производящая функция и формула Родрига

Рассмотрим функцию

$$w(x, t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-xt/(1-t)},$$

определённую для произвольного вещественного x и комплексного t , по модулю не превосходящего 1: $|t| < 1$. Параметр α будем считать бóльшим, чем минус единица: $\alpha > -1$. При фиксированном x разложим функцию $w(x, t)$ в ряд Тейлора по переменной t :

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n.$$

Ниже мы увидим, что функции L_n^α являются многочленами, ортогональными на интервале $(0, +\infty)$ с весом $x^\alpha e^{-x}$. Именно их мы и будем называть *многочленами Лагерра*. Очевидно, это определение не противоречит информации, приведённой в таблице параграфа 4. Кроме того, непосредственно из определения ясно, что функция

$$w(x, t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-xt/(1-t)}$$

является производящей для многочленов Лагерра.

Представляя коэффициенты в разложении производящей функции в ряд Тейлора в виде контурных интегралов и используя теорию вычетов, можно показать, что

$$L_n^\alpha(x) = e^x \frac{x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{n+\alpha}], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Это соотношение называется *формулой Родрига*. Детально её доказательство мы приводить не будем отчасти потому, что оно требует привлечения методов теории функций комплексного переменного, отчасти — потому, что мы не будем пользоваться ею.

Задачи

35. Проверить следующие соотношения двумя способами: непосредственно находя коэффициенты в разложении производящей функции и выполняя дифференцирование в формуле Родрига —

$$L_0^\alpha(x) = 1; \quad L_1^\alpha(x) = 1 + \alpha - x;$$

$$L_2^\alpha(x) = \frac{1}{2}[(1 + \alpha)(2 + \alpha) - 2(2 + \alpha)x + x^2].$$

36. Вывести формулу

$$L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y) = \sum_{k=0}^n L_k^\alpha(x)L_{n-k}^\beta(y).$$

37. Доказать тождество

$$(1-t)^2 \frac{\partial w}{\partial t} + [x - (1-t)(1+\alpha)]w = 0.$$

§ 18. Многочлены Лагерра: рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение

Подставим в тождество, приведённое в задаче 37, разложение производящей функции в степенной ряд и воспользуемся тем, что в круге сходимости степенной ряд можно дифференцировать почленно. Получим

$$(1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} nL_n^\alpha(x)t^{n-1} + [x - (1-t)(1+\alpha)] \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x)t^n = 0.$$

Выделим в получившемся степенном ряде коэффициент при t^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) и приравняем его к нулю:

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) - 2nL_n^\alpha(x) + (n-1)L_{n-1}^\alpha(x) + (x - \alpha - 1)L_n^\alpha(x) + (\alpha + 1)L_{n-1}^\alpha(x) = 0$$

или

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (x - \alpha - 2n - 1)L_n^\alpha(x) + (n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0 \quad (19)$$

Это рекуррентное соотношение справедливо для всех n , начиная с единицы. Из него, в частности, следует, что если L_n^α и L_{n-1}^α являются многочленами степени n и $n-1$ соответственно, то L_{n+1}^α является многочленом степени $n+1$. Но поскольку мы уже знаем, что $L_0^\alpha(x) = 1$ и $L_1^\alpha(x) = 1 + \alpha - x$, то, в силу принципа математической индукции, L_n^α является многочленом степени n при любом $n = 0, 1, 2, \dots$.

Аналогично предыдущему, подставляя в тождество

$$(1-t) \frac{\partial w}{\partial x} + tw = 0$$

тейлоровское разложение производящей функции w , дифференцируя его почленно и приравнивая к нулю коэффициенты при t^n , получим ещё одно рекуррентное соотношение

$$\frac{dL_n^\alpha}{dx} - \frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx} + L_{n-1}^\alpha = 0, \quad (20)$$

справедливое для всех n , начиная с единицы.

Из формулы (19) выразим $L_{n-1}^\alpha(x)$ и подставим в полученное соотношение (20):

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{x - \alpha - 2n - 1}{n + \alpha}\right) \frac{dL_n^\alpha}{dx} + \frac{n + 1}{n + \alpha} \frac{dL_{n+1}^\alpha}{dx} \\ & + \left(-\frac{x - \alpha - 2n - 1}{n + \alpha} + \frac{1}{n + \alpha}\right) L_n^\alpha - \frac{n + 1}{n + \alpha} L_{n+1}^\alpha = 0. \end{aligned}$$

После приведения подобных и умножения на $n + \alpha$, последнее выражение примет вид

$$(x - n - 1) \frac{dL_n^\alpha}{dx} + (n + 1) \frac{dL_{n+1}^\alpha}{dx} + (2n + 2 + \alpha - x) L_n^\alpha - (n + 1) L_{n+1}^\alpha = 0.$$

Наши рассуждения доказывают это соотношение для $n = 1, 2, \dots$. Прямая проверка убеждает нас, что оно справедливо также при $n = 0$.

Заменив в последней формуле индекс n на $n - 1$, получим соотношение

$$(x - n) \frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx} + n \frac{dL_n^\alpha}{dx} + (2n + \alpha - x) L_{n-1}^\alpha - n L_n^\alpha = 0,$$

справедливое для $n = 1, 2, \dots$. Подставляя в него выражение для $\frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx}$, полученное из (20), будем иметь

$$x \frac{dL_n^\alpha}{dx} - n L_n^\alpha + (n + \alpha) L_{n-1}^\alpha = 0. \quad (21)$$

Последнее соотношение справедливо для $n = 1, 2, \dots$ и позволяет выражать производную от многочлена Лагерра через сами многочлены.

Дифференцируя (21) по x и исключая из получившегося уравнения функции $\frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx}$ и L_{n-1}^α с помощью (20) и (21), будем последовательно иметь

$$\frac{dL_n^\alpha}{dx} + x \frac{d^2 L_n^\alpha}{dx^2} - n \frac{dL_n^\alpha}{dx} + (n + \alpha) \frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx} = 0,$$

$$x \frac{d^2 L_n^\alpha}{dx^2} + (1-n) \frac{dL_n^\alpha}{dx} + (n+\alpha) \left(\frac{dL_n^\alpha}{dx} + L_{n-1}^\alpha \right) = 0,$$

$$x \frac{d^2 L_n^\alpha}{dx^2} + (1+\alpha) \frac{dL_n^\alpha}{dx} + nL_n^\alpha - x \frac{dL_n^\alpha}{dx} = 0,$$

$$x \frac{d^2 L_n^\alpha}{dx^2} + (1+\alpha-x) \frac{dL_n^\alpha}{dx} + nL_n^\alpha = 0.$$

Следовательно, функция $y(x) = L_n^\alpha(x)$ является частным решением уравнения

$$xy'' + (1+\alpha-x)y' + ny = 0.$$

Задачи

38. Исходя из тождества $(1-t)w(x, t, \alpha+1) = w(x, t, \alpha)$, вывести равенство $L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x) = L_n^\alpha(x)$ для $n = 1, 2, \dots$.

39. Из соотношения $\partial w / \partial x(x, t, \alpha) = -tw(x, t, \alpha+1)$ вывести формулу

$$\frac{dL_n^\alpha}{dx}(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$$

для $n = 1, 2, \dots$.

40. Проверить, что дифференциальное уравнение

$$xy'' + (1+\alpha-2\beta)y' + \left[n + \frac{1+\alpha}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\beta(\beta-\alpha)}{x} \right] y = 0$$

имеет частное решение $y_n(x) = e^{-x/2} x^\beta L_n^\alpha(x)$, называемое функцией Лагерра.

41. Проверить, что дифференциальное уравнение

$$y'' + \left[4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2} \right] y = 0$$

имеет частное решение $y(x) = e^{-x^2/2} x^{\alpha+1/2} L_n^\alpha(x^2)$.

§ 19. Многочлены Лагерра: соотношение ортогональности

В этом параграфе мы докажем, что многочлены Лагерра удовлетворяют соотношениям

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m; \\ \Gamma(n+\alpha+1)/n!, & \text{если } n = m, \end{cases}$$

называемым *соотношениями ортогональности*. Из них, в частности, следует, что многочлены L_n^α ортогональны на интервале $(0, +\infty)$ с весом $e^{-x}x^\alpha$. (Напомним, что параметр α принимает значения бóльшие минус единицы).

Пусть $y_n(x) = e^{-x/2}x^{\alpha/2}L_n^\alpha(x)$. Полагая в задаче 40 $\beta = \alpha/2$, видим, что функция y_n удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy_n'' + y_n' + \left(n + \frac{1 + \alpha}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\alpha^2}{4x} \right) y_n = 0,$$

которое можно переписать в несколько ином виде

$$(xy_n')' + \left(n + \frac{1 + \alpha}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\alpha^2}{4x} \right) y_n = 0.$$

Напишем это же уравнение ещё для одного индекса — m

$$(xy_m')' + \left(m + \frac{1 + \alpha}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\alpha^2}{4x} \right) y_m = 0,$$

умножим первое из этих соотношений на y_m , второе — на y_n и вычтем из первого второе. Получим соотношение

$$(xy_n')' y_m - (xy_m')' y_n + (n - m) y_n y_m = 0,$$

проинтегрировав которое на интервале $(0, +\infty)$, будем иметь

$$\begin{aligned} x (y_n' y_m - y_m' y_n) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xy_n'(x) y_m'(x) dx \\ + \int_0^{+\infty} xy_m'(x) y_n'(x) dx + (n - m) \int_0^{+\infty} y_n(x) y_m(x) dx = 0. \end{aligned}$$

При $\alpha > -1$ внеинтегральные члены в этом выражении зануляются: при $x \rightarrow +\infty$ это очевидно, а при $x \rightarrow +0$ это следует из непосредственно проверяемого соотношения $x(y_n' y_m - y_m' y_n) = O(x^{1+\alpha})$ (см. задачу 42).

Окончательно, последнее соотношение даёт

$$(n - m) \int_0^{+\infty} y_n(x) y_m(x) dx = 0,$$

откуда и следует, что при $n \neq m$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = 0.$$

Чтобы найти значение этого интеграла при $n = m$, умножим формулу (19) на $L_{n-1}^\alpha(x)$ и вычтем из получившегося выражения умноженную на $L_n^\alpha(x)$ формулу (19), в которой индекс n заменён на $n - 1$:

$$\frac{(n+1)L_{n+1}^\alpha - (x-\alpha-2n-1)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0 \mid \cdot L_{n-1}^\alpha(x) - nL_n^\alpha - (x-\alpha-2n+1)L_{n-1}^\alpha(x) + (n-1+\alpha)L_{n-2}^\alpha(x) = 0 \mid \cdot L_n^\alpha(x)}{(n+\alpha)[L_{n-1}^\alpha(x)]^2 - n[L_n^\alpha(x)]^2 + \dots} = 0.$$

В последнем выражении многоточие заменяет сумму попарных произведений многочленов Лагерра с несовпадающими индексами, взятых с некоторыми постоянными множителями. Умножая последнее соотношение на $x^\alpha e^{-x}$, интегрируя его от 0 до $+\infty$ и пользуясь доказанной выше ортогональностью многочленов Лагерра с разными номерами, будем иметь

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2 dx = \frac{n+\alpha}{n} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_{n-1}^\alpha(x)]^2 dx,$$

$n = 2, 3, \dots$. Следовательно, нам удалось выразить искомый интеграл для L_n^α через такой же интеграл для L_{n-1}^α . Многократно применяя полученную формулу, найдём

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2 dx &= \frac{n+\alpha}{n} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_{n-1}^\alpha(x)]^2 dx \\ &= \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)}{n(n-1)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_{n-2}^\alpha(x)]^2 dx = \dots \\ &= \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(\alpha+2)}{n(n-1)\dots 3 \cdot 2} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_1^\alpha(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

Теперь мы сможем закончить это вычисление, если используем явный вид многочлена Лагерра первой степени $L_1^\alpha(x) = 1 + \alpha - x$, определение гамма-функции $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$ и её основное функциональное свойство $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{(n + \alpha)(n + \alpha - 1) \dots (\alpha + 2)}{n(n - 1) \dots 3 \cdot 2} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_1^\alpha(x)]^2 dx \\
&= \frac{(n + \alpha)(n + \alpha - 1) \dots (\alpha + 2)}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [(1 + \alpha)^2 - 2(1 + \alpha)x + x^2] dx \\
&= \frac{(n + \alpha)(n + \alpha - 1) \dots (\alpha + 2)}{n!} [(1 + \alpha)^2 \Gamma(\alpha + 1) \\
&\quad - 2(1 + \alpha)\Gamma(\alpha + 2) + \Gamma(\alpha + 3)] \\
&= \frac{(n + \alpha)(n + \alpha - 1) \dots (\alpha + 2)}{n!} \Gamma(\alpha + 1) [(1 + \alpha)^2 \\
&\quad - 2(1 + \alpha)^2 + (2 + \alpha)(1 + \alpha)] \\
&= \frac{(n + \alpha)(n + \alpha - 1) \dots (\alpha + 2)(\alpha + 1)}{n!} \Gamma(\alpha + 1) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}.
\end{aligned}$$

Тем самым мы нашли норму многочлена Лагерра L_n^α при $n = 2, 3, \dots$. Прямая проверка показывает, что это же выражение годится для $n = 0, 1$.

Задачи

42. Доказать, что $x[y'_n(x)y_m(x) - y'_m(x)y_n(x)] = O(x^{1+\alpha})$ при $x \rightarrow +0$, где y_n — функция Лагерра. Другими словами, доказать, что величина

$$\frac{x[y'_n(x)y_m(x) - y'_m(x)y_n(x)]}{x^{1+\alpha}}$$

остаётся ограниченной при x стремящемся к нулю справа.

43. Прямой проверкой убедиться, что формула

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2 dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}$$

справедлива при $n = 0$ и $n = 1$.

44. Используя задачу 4, доказать формулы

$$L_n^{-1/2}(x^2) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!} H_{2n}(x),$$

$$L_n^{1/2}(x^2) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}n!} \frac{H_{2n+1}(x)}{x}.$$

§ 20. Разложение функций в ряды по многочленам Лагерра

Теорема. Если для кусочно-гладкой функции $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha [f(x)]^2 dx$$

имеет конечное значение, то в каждой точке x непрерывности функции f имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x),$$

где $c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) f(x) dx.$

При первом знакомстве с предметом нам кажется излишним приводить доказательство этой теоремы. Наиболее же дотошные читатели могут найти его, отправляясь от книги Н. Н. Лебедева “Специальные функции и их приложения,” стр. 144 .

Следующие примеры иллюстрируют два основных приёма разложения конкретных функций в ряды по многочленам Лагерра.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^\beta, x > 0.$

Интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha x^{2\beta} dx$$

имеет две особые точки: 0 и $+\infty.$ На бесконечности он, очевидно, сходится при любых α и $\beta.$ В нуле же он сходится, если и только если $\alpha + 2\beta > -1.$ Значит при $\beta > -(1 + \alpha)/2$ выполнены условия

теоремы и для всех $x \in (0, +\infty)$ справедливо равенство

$$x^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x),$$

где $c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha+\beta} L_n^\alpha(x) dx$. Воспользовавшись формулой Родрига, а затем интегрируя n раз по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{+\infty} x^\beta \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{n+\alpha}] dx \\ &= -\frac{\beta}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{+\infty} x^{\beta-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [e^{-x} x^{n+\alpha}] dx = \dots \\ &= (-1)^n \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha+\beta} dx. \end{aligned}$$

Используя определение гамма — функции и её основное функциональное свойство, можем преобразовать последнее выражение к виду

$$c_n = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta-n+1)}.$$

Таким образом, при $\alpha > -1$, $\beta > -(1+\alpha)/2$ и для каждого $x \in (0, +\infty)$ имеет место равенство

$$x^\beta = \Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\beta+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n^\alpha(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta-n+1)}.$$

Пример 2. Пусть $f(x) = e^{-ax}$, $x > 0$.

Интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha e^{-2ax} dx$$

сходится в нуле при $\alpha > -1$, а на бесконечности — при $\alpha > -1/2$. Следовательно, при выполнении этих неравенств, функция f разлагается в ряд по многочленам Лагерра. Как и в предыдущем примере, коэффициенты разложения можно найти, вычисляя соответствующие

интегралы. Но в данном случае проще в равенстве для производящей функции

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n$$

положить $t = a/(a+1)$. Тогда $1-t = 1/(a+1)$, $t/(1-t) = a$ и, следовательно,

$$(a+1)^{\alpha+1} e^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) \left(\frac{a}{a+1}\right)^n.$$

Откуда и находится искомое разложение

$$e^{-ax} = (a+1)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n L_n^\alpha(x).$$

Задача

45. Разложить в ряд по многочленам Лагерра функцию $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

§ 21 Функции Лагерра

Определённые при $x > 0$ и $\alpha > -1$ функции $y_n^\alpha(x) = e^{-x/2} x^{\alpha/2} \times L_n^\alpha(x)$, $n = 0, 1, \dots$, называются *функциями Лагерра*. Следующие их свойства являются простой переформулировкой известных нам свойств многочленов Лагерра и в доказательстве не нуждаются:

1) *Функции Лагерра ортогональны на интервале $(0, +\infty)$ с весом единица*

$$\int_0^{+\infty} y_n^\alpha(x) y_m^\alpha(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ \Gamma(n + \alpha + 1)/n!, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

2) *Всякая непрерывно дифференцируемая функция f , интегрируемая с квадратом на интервале $(0, +\infty)$, может быть разложена в ряд по функциям Лагерра:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n^\alpha(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

где

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{+\infty} f(x) y_n^\alpha(x) dx.$$

3) Введя обозначения $\lambda_n^\alpha = n + (1 + \alpha)/2$, можем утверждать, что функция Лагерра $y_n^\alpha(x)$ является частным решением уравнения

$$xy'' + y' + [\lambda - x/4 - \alpha^2/4x] y = 0 \quad (22)$$

при $\lambda = \lambda_n^\alpha$ (см. задачу 40). Более того, действуя по аналогии с изложенным в параграфе 16, можно показать, что если при фиксированном α число λ не равняется ни одному из чисел λ_n^α , то уравнение (22) не имеет ненулевых решений, интегрируемых с квадратом на интервале $(0, +\infty)$.

Оказывается, что именно функции Лагерра решают задачу квантования электрона в кулоновом потенциале, а также задачу квантования трёхмерного гармонического осциллятора. Но с технической точки зрения изложение этих вопросов целесообразно отложить до знакомства со свойствами сферических функций.

Содержание

Предисловие	3
§ 1. Ортогональные многочлены как результат ортогонализации системы мономов	5
§ 2. Общие свойства ортогональных многочленов	9
§ 3. Свойства нулей ортогональных многочленов	12
§ 4. Классические ортогональные многочлены	15
§ 5. Многочлены Лежандра: производящая функция и рекуррентные соотношения	19
§ 6. Многочлены Лежандра: дифференциальное уравнение и соотношения ортогональности	22
§ 7. Формула Родрига для многочленов Лежандра	26
§ 8. Разложение функций в ряды по многочленам Лежандра ..	29
§ 9. Мультипольное разложение кулонова потенциала	35
§ 10. Применение многочленов Лежандра при решении дифференциальных уравнений	36
§ 11. Поле точечного заряда, помещённого внутри полой, проводящей сферы	40
§ 12. Многочлены Эрмита: производящая функция и дифференциальное уравнение	43
§ 13. Многочлены Эрмита: рекуррентные формулы и дифференциальное уравнение	44
§ 14. Многочлены Эрмита: соотношения ортогональности ...	46
§ 15. Разложение функций в ряды по многочленам Эрмита ..	48
§ 16. Функции Эрмита. Уравнение Шрёдингера для гармонического осциллятора	51
§ 17. Многочлены Лагерра: производящая функция и формула Родрига	56
§ 18. Многочлены Лагерра: рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение	57
§ 19. Многочлены Лагерра: соотношения ортогональности ...	59
§ 20. Разложение функций в ряды по многочленам Лагерра ..	63
§ 21. Функции Лагерра	65