Теоремы об обратной фукции и их приложения в теории многогранников*

Александров Виктор Алексеевич

Содержание

1. Введение *2*
2. Теорема о неявной функции при вырождении якобиана *4*
3. Нелокальные теоремы об обратной функции *23*
4. Краткие сведения из теории многогранников *28*
5. Общая схема применения теоремы об обратной функции в теории многогранников *32*
6. Жёсткость выпуклых многогранников *40*
7. Существование изгибаемых многогранников *50*
8. Единственность выпуклого многогранника с данной развёрткой *60*
9. Существование выпуклого многогранника с данной развёрткой *63*
10. Теоремы типа Г. Минковского и А. Д. Александрова для многогранных ежей *71*
11. Применения теорем о неявной функции с вырожденным якобианом к изучению изгибаемых многогранников и каркасов *92*
12. Заполнение пространства многогранниками *105*
Список литературы *113*

Аннотация. В этом обзоре показано как теоремы о неявной и обратной функции работают в теории многогранников, а именно — как их используют для вывода классических и новых теорем о многогранниках, таких как существование, единственность и жёсткость выпуклого многогранника с данной развёрткой, построение изгибаемых многогранников, существование и единственность выпуклого многогранника с данными площадями и направлениями граней, обобщение последних теорем на невыпуклые многогранники, продолжение бесконечно малых изгибаний многогранников в «настоящие изгибания», замощение пространства многогранниками и т. п.

MSC (2000): 52C25, 52B10, 52B11, 26B10

Ключевые слова: выпуклый многогранник, изгибаемый многогранник, теорема об обратной функции.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00104) и Программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ 311.2003.1).

1 Введение

Каждый математик знает теорему об обратной функции как минимум в следующей наивной формулировке:

Пусть $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ *— две вещественно значные функции двух вещественных переменных, якобиан*

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

которых в точке (u_0, v_0) *не равен нулю, и* $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$. *Тогда в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0) *можно найти обратное отображение*

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = u(x_0,y_0), \\ v_0 = v(x_0,y_0). \end{cases}$$

Более строго об обратной (или, чуть более общó, — неявной) функции можно рассказать так.

Неявная функция $f : U \to Y$, заданная уравнением $F(x,y) = z_0$, где $F : X \times Y \to Z$ — некоторое отображение множеств X, Y и Z, $U \subset X$, $x \in X$, $y \in Y$, $z_0 \in Z$, это такая функция f, что при любом $x \in U$ имеет место равенство $F(x, f(x)) = z_0$.

Теоремы о неявной функции описывают свойства решений уравнения $F(x,y) = z_0$.

Простейшая теорема о неявной функции традиционно входит в университетский курс математического анализа: без неё не обойтись ни при построении теории условного экстремума функций многих переменных (см., напр., [18] или [144]), ни в дифференциальной геометрии (см., напр., [43] или [49]). Приведём одну из таких формулировок из учебника В.А.Зорича [144].

Теорема 1.1 *Пусть* X, Y, Z *— нормированные пространства, причём* Y *— полное пространство;* $W = \{(x,y) \in X \times Y \| x - x_0 < \alpha \wedge |y - y_0| < \beta\}$ *— окрестность точки* (x_0, y_0) *в произведении* $X \times Y$ *пространств* X, Y.

Если отображение $F : W \to Z$ *удовлетворяет условиям*

1. $F(x_0, y_0) = 0$*;*
2. $F(x,y)$ *непрерывно в точке* (x_0, y_0)*;*
3. $F'_y(x,y)$ *определено в* W *и непрерывно в* (x_0, y_0)*;*

4. $F'_y(x_0, y_0)$ *обратимый опреатор (то есть обратный оператор существует и непрерывен);*
то найдутся окрестность $U = U(x_0)$ *точки* x_0 *в* X*, окрестность* $V = V(y)$ *точки* y_0 *в* Y *и отображение* $f : U \to V$ *такие, что*

1′. $U \times V \subset W$*;*

2′. $(F(x, y) = 0$ *в* $U \times V) \iff (y = f(x)$*, где* $x \in U$*, а* $f(x) \in V)$*;*

3′. $y_0 = f(x_0)$*;*

4′. f *непрерывно в точке* x_0.

Здесь $F'_y(x_0, y_0)$ — производная Фреше (или сильная производная) отображения $F : W \subset X \times Y \to Z$ в точке (x_0, y_0) по переменной y, то есть такое линейное непрерывное отображение $L : Y \to Z$, что

$$F(x_0, y) - F(x_0, y_0) = L(y - y_0) + o(x_0, y - y_0),$$

где $o(x_0, y - y_0)$ есть некоторое отображение, обладающее тем свойством, что

$$\lim_{y \to y_0} \frac{|o(x_0, y - y_0)|_Z}{|y - y_0|_Y} = 0.$$

Студентам обычно сообщают и другие варианты теоремы о неявной функции. Например, *если в дополнение к условиям теоремы 1.1 известно, что отображение* $F : W \to Z$ *непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0)*, то определяемая уравнением* $F(x, y) = 0$ *функция* $y = f(x)$ *будет непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки* x_0.

Имеется обширная специальная литература, посвящённая обобщениям теоремы 1.1 в самых различных направлениях. Дело в том, что в каких-то задачах необходимо изучать отображения не банаховых, а более общих пространств, в каких-то нужно заменить производную Фреше производной Гато, ослабить требования непрерывности отображения или невырожденности его производной, а в каких-то совершенно необходимо контролировать размеры окрестности U, где определена неявная функция [29], [61]. Наконец, известны далёкие обобщения теоремы о неявной функции для дифференциальных операторов, полученные Дж. Нэшем [59].

Настоящая работа не претендует на то, чтобы охватить всё это разнообразие. Мы намерены рассказать как теоремы о неявной и обратной функции работают в теории многогранников. По ходу изложения мы будем формулировать, а иногда и доказывать необходимые нам разновидности теоремы об обратной или неявной функции, выходящие за рамки стандартного университетского курса. Однако в основном наше внимание будет сосредоточено на использовании этих теорем для вывода классических и новых теорем о многогранниках таких как существование, единственность и жёсткость выпуклого многогранника с данной развёрткой, построение изгибаемых многогранников, существование и единственность выпуклого многогранника с данными площадями и направлениями граней, обобщение последних теорем на невыпуклые многогранники, продолжение бесконечно малых изгибаний многогранников в «настоящие изгибания», замощение пространства многогранниками и т. п.

Настоящая работа адресована как специалистам по геометрии и анализу, так и студентам желающим специализироваться в этих областях. Автор надеется, что первые найдут в ней новые идеи и методы, а вторым она сможет послужить введением в предмет.

2 Теорема о неявной функции при вырождении якобиана

Пусть $F : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ — дифференцируемое отображение; $t, t_0 \in \mathbf{R}^l$; $X, X_0 \in \mathbf{R}^m$ и пусть $F(t_0, X_0) = 0$. Классическая теорема о неявной функции даёт условия, при которых уравнение $F(t, X) = 0$ определяет неявную функцию $X = X(t)$ в некоторой окрестности точки (t_0, X_0). Главное из этих условий состоит в том, чтобы оператор $F'_X(t_0, X_0)$ был обратим.

Теорема о неявной функции имеет многочисленные приложения и обобщена в самых разных направлениях. Однако в случае, когда оператор $F'_X(t_0, X_0)$ не обратим, «общеупотребительного» варианта этой теоремы нет в том смысле, что имеющиеся теоремы предназначены для конкретных задач, см., напр., [40] и [85].

В настоящем параграфе мы докажем теоремы, гаратирующие наличие (или отсутствие) неявной функции, определяемой системой алгебраических многочленов. В параграфе 11 мы применим эти теоремы к изучению изгибаемых многогранников.

Возникающие при изучением изгибаемых многогранников отображения F вообще не зависят от параметра t. Именно на этом частном случае мы и сосредоточим своё внимание. Типичной системой нелинейных алгебраических уравнений, к которой применимы наши рассуждения, может служить следующая:

$$F_1(t,x_1,x_2,x_3) \equiv x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0, \tag{1}$$

$$F_2(t,x_1,x_2,x_3) \equiv 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 = 0, \tag{2}$$

$$F_3(t,x_1,x_2,x_3) \equiv x_1 - 3x_2 + x_3 + 3 = 0. \tag{3}$$

Параметр t в эту систему явным образом не входит. Точка $X_0 = (5,5,7)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяет системе (1)–(3). Определитель матрицы Якоби системы (1)–(3) зануляется в точке $X_0 = (x_1, x_{,2}, x_3)$:

$$\det F'_X(t,X_0) = \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 & -2x_3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & -14 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому классическая теорема о неявной функции не применима. Тем не менее, из излагаемых ниже результатов будет следовать, что решение X_0 системы (1)–(3) не является изолированным, а принадлежит непрерывному семейству решений $X = X(t)$, которое и является неявной функцией, определяемой системой (1)–(3) и точкой X_0.

Достаточные условия существования неявной функции

Пусть $X = (x_1,\dots,x_m) \in \mathbf{R}^m$ и пусть $F(X) = (F_1(X),\dots,F_n(X))$, причём каждая из функций F_k $(k = 1,\dots,n)$ является многочленом. Не умаляя общности можем считать, что степень каждого многочлена F_k не превосходит 2.

Чтобы пояснить последнее утверждение, допустим, например, что в системе уравнений $F(X) = 0$ каждый из многочленов F_k $(k = 1,\dots,n-1)$ имеет степень не выше 2, а многочлен F_n имеет вид $F_n(X) = x_1^2 x_2 - 1$. Введём новую независимую переменную x_{m+1} и положим $\widetilde{X} = (x_1,\dots,\ x_m, x_{m+1})$. Введём новые функции $\widetilde{F}_n(\widetilde{X}) = x_{m+1}x_2 - 1$ и $\widetilde{F}_{n+1} = x_{m+1} - x_1^2$ и положим $\widetilde{F}(\widetilde{X}) = (F_1(X),\dots,F_{n-1}(X), \widetilde{F}_n(\widetilde{X}), \widetilde{F}_{n+1}(\widetilde{X}))$. Очевидно, системы уравнений $F(X) = 0$ и $\widetilde{F}(\widetilde{X}) = 0$ эквивалентны, но каждое уравнение последней системы имеет степень не выше 2.

Итак, без ограничения общности будем считать, что каждый многочлен F_k имеет степень не выше 2. В таком случае F_k может быть записан в виде

$$F_k(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^k x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i^k x_i + \gamma^k,$$

где α_{ij}^k, β_i^k и γ^k — некоторые вещественные числа, причём $\alpha_{ij}^k = \alpha_{ji}^k$.

Известно, что если система алгебраических уравнений имеет семейство решений, непрерывно зависящее от некоторого параметра, то она имеет также семейство решений, аналитически зависящее от (возможно другого) параметра (см., напр., [47] или [130, лемма 18.3]). Поэтому, допустив, что система уравнений $F(X) = 0$ имеет непрерывное семейство решений $X = X(t) \equiv (x_1(t), \ldots, x_m(t))$, мы можем без ограничения общности считать, что это семейство аналитически зависит от параметра t, т. е. разлагается в сходящийся ряд Мак-Лорена:

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k} t^k, \qquad x_{i,k} \in \mathbf{R}.$$

Подставив этот ряд в уравнение $F_k(X) = 0$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left[\alpha_{ij}^k \left(\sum_{p=0}^{\infty} x_{i,p} t^p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} x_{i,q} t^q \right) \right] + \sum_{i=1}^{m} \beta_i^k \left(\sum_{p=0}^{\infty} x_{i,p} t^p \right) + \gamma^k = 0$$

или

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^k \sum_{q=0}^{p} x_{i,q} x_{j,p-q} \right] t^p + \sum_{p=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} \beta_i^k x_{i,p} t^p \right] + \gamma^k = 0.$$

Трактуя левую часть последнего соотношения как разложение в ряд Мак-Лорена функции, тождественно равной нулю, заключаем, что при каждом $p \geq 1$ коэффициент этого разложения при t^p должен быть равен нулю; т. е. соотношение

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{q=0}^{p} \alpha_{ij}^k x_{i,q} x_{j,p-q} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i^k x_{i,p} + \gamma^k = 0 \tag{4}$$

должно быть справедливо для всех $p \geq 1$ и для всех $1 \leq k \leq n$.

Для каждого $p \geq 1$ положим $X_p = (x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{m,p}) \in \mathbf{R}^m$. Определим билинейное отображение $B : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ по правилу: если $X = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, $Y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$, то k-я компонента вектора $B(X, Y)$ равна

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^k x_i y_j.$$

Определим также линейное отображение $A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ по правилу: если $X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, то k-я компонента вектора $A(X)$ равна

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i^k x_i.$$

Используя эти обозначения, можем переписать формулы (4) в виде

$$\sum_{p=0}^{q} B(X_p, X_{q-p}) + AX_q = 0.$$

Отсюда вытекает, что если векторы X_0, X_1, $\dots X_{q-1}$ уже известны, то для нахождения вектора X_q нужно решить следующую систему линейных уравнений

$$B(X_0, X_q) + B(X_q, X_0) + AX_q = -\sum_{p=1}^{q-1} B(X_p, X_{q-p}). \tag{5}$$

Определим линейное отображение $C : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ формулой $CX = B(X_0, X) + B(X, X_0) + AX$. Тогда формулу (5) можно записать короче

$$CX_q = -\sum_{p=1}^{q-1} B(X_p, X_{q-p}). \tag{6}$$

В предшествующем изложении векторы X_p были порождены коэффициентами Мак-Лорена $x_{i,p}$ семейства точных решений системы уравнений $F(X) = 0$. Теперь мы допустим, что в $\mathbf{R}^m$ нам дан конечный набор векторов Y_0, Y_1, $\dots$, Y_q. Выражение

$$Y(t) = \sum_{p=0}^{q} Y_p t^p$$

будем называть *приближённым порядка q решением* алгебраической системы уравнений $F(X) = 0$, если для каждого $p = 1, 2, \dots, q$ коэффициент при t^p в разложении функции $F(Y(t))$ в ряд Мак-Лорена равен нулю. Из сказанного выше видно, что это условие эквивалентно тому, что для каждого $p = 1, 2, \dots, q$ справедливо соотношение

$$CY_p = -\sum_{l=1}^{p-1} B(Y_l, Y_{p-l}).$$

Теперь мы готовы сформулировать достаточное условие существования неявной функции, определяемой системой алгебраических многочленов.

Теорема 2.1 *Пусть*

$$\sum_{p=0}^{q} Y_p t^p \tag{7}$$

является приближённым порядка q решением алгебраической системы уравнений $F(X) = 0$. Пусть существует число k ($0 \leq k < q$) такое, что для всех $i = 1, 2, \ldots, q$ и всех $j = k, k+1, \ldots, q$ уравнение

$$CY = -B(Y_i, Y_j) - B(Y_j, Y_i)$$

имеет решение, лежащее в линейной оболочке векторов Y_k, Y_{k+1}, $\ldots Y_q$. Тогда система уравнений $F(X) = 0$ имеет аналитическое семейство решений $X(t) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} X_p t^p$, начальный отрезок которого совпадает с приближённым решением (7), т. е. такое семейство, что для всех $p = 0, 1, \ldots, q$ справедливо равенство $X_p = Y_p$.

Доказательство теоремы 2.1. Линейную оболочку векторов Y_k, Y_{k+1}, $\ldots$,Y_q обозначим через L.

Символом P обозначим совокупность всех неотрицательных целых чисел p для каждого из которых существует приближённое решение

$$\sum_{l=0}^{q+p} X_l t^l \tag{8}$$

порядка $q + p$ системы $F(X) = 0$ такое, что (i) для всех $l = 0, 1, \ldots, q$ справедливо равенство $X_l = Y_l$ и (ii) для каждого $l = q+1, q+2, \ldots, q+p$ вектор X_l лежит в L.

В силу условий теоремы, $0 \in P$. Поэтому $P \neq \emptyset$. Убедимся, что P совпадает со множеством всех неотрицательных целых чисел $\mathbf{N}$. Для этого достаточно убедиться , что если $p \in P$, то $p+1 \in P$.

Итак, пусть $p \in P$ и пусть приближённое решение (8) обладает свойствами (i) и (ii). Чтобы убедиться, что $p+1 \in P$, достаточно найти вектор $X_{q+p+1} \in L$, удовлетворяющий линейной алгебраической системе уравнений

$$CX_{q+p+1} = -\sum_{l=1}^{q+p} B(X_l, X_{q+p+1-l}). \tag{9}$$

Согласно допущениям (i) и (ii), каждый из векторов $X_{q+1}, \ldots, X_{q+p}$ лежит в L, а значит — является линейной комбинацией векторов $Y_k, Y_{k+1}, \ldots, Y_q$. Поэтому правая часть уравнения (9) представляет собой линейную комбинацию векторов $B(Y_i, Y_j) + B(Y_j, Y_i)$, где $1 \le i \le q$ и $k \le j \le q$. Поэтому, в соответствии с условиями теоремы, система (9) имеет решение, лежащее в L. Значит, $p+1 \in P$ и $P = \mathbf{N}$.

Таким образом, мы убедились, что система $F(X) = 0$ имеет приближённые решения любого порядка, начальный отрезок каждого из которых совпадает с приближённым решением (7). Осталось убедиться, что из этих приближённых решений сколь угодно высокого порядка можно сконструировать точное решение в форме степенного ряда, начальный отрезок которого совпадает с (7).

Доказательство этого факта основывается на следующей алгебраической теореме М. Артина (см. [19], [20] и [102]):

Теорема 2.2 *Для каждой системы алгебраических уравнений $f(x, y) = 0$, где $f = (f_1, \ldots, f_k)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, существует целое число $\beta = \beta(m, n, d, \alpha)$, зависящее от m, n, общей степени d полиномов f и от неотрицательного целого α, такое что если система $f(x, y) = 0$ имеет некоторое приближённое порядка β решение $\overline{y(x)}$, то эта система имеет также (точное) решение $y(x)$, которое может быть взято в форме сходящегося степенного ряда, у которого все начальные коэффициенты до порядка α совпадают с соответствующими коэффициентами многочлена $\overline{y(x)}$.*

Чтобы завершить доказательство теоремы 2.1, применим теорему Артина 2.2 к нашей системе $F(X) = 0$ следующим образом: Положим $\alpha = q$ и найдём число β, существование которого гарантируется теоремой Артина. Как мы видели раньше, приближённое решение (7) может быть продолжено в приближённое решение сколь угодно высокого порядка, в том числе и в приближённое решение порядка β. После чего заключение теоремы 2.1 непосредственно следует из теоремы Артина 2.2.

Замечание. Принципиальным моментом в доказательстве теоремы 2.1 (как, впрочем, и в теореме 2.2) является необходимость возвращаться назад и исправлять уже найденные приближённые решения. Неизбежность этого шага продемонстрируем следующим примером, которым мы обязаны И. В. Львову.

Пример. Пусть векторы $e_0, e_1, \dots e_{n-1}$ образуют базис в линейном пространстве L. Зададим билинейное отображение $B : L \times L \to L$ формулой

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq 1 \text{ или } j \neq 2; \\ e_1, & \text{если } i = 1 \text{ и } j = 2. \end{cases}$$

Несложная прямая проверка показывает, что для любого $N \geq 2$ приближённое решение порядка N $X = X_0 + tX_1 + \ldots + t^N X_N$, где $X_0 = e_0, X_1 = X_2 = \ldots = X_{N-1} = e_1, X_N = e_2$, не продолжается ни в какое приближённое решение порядка $N+1$, и в то же время приближённое решение $X = X_0 + tX_1 + \ldots + t^{N-1} X_{N-1}$ допускает неограниченное продолжение.

Приведём несколько примеров применения теоремы 2.1.

Пример. Пусть $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ задано формулами (1)–(3), а именно пусть

$$\begin{array}{lcl} F_1(t, x_1, x_2, x_3) & \equiv & x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0, \\ F_2(t, x_1, x_2, x_3) & \equiv & 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 = 0, \\ F_3(t, x_1, x_2, x_3) & \equiv & x_1 - 3x_2 + x_3 + 3 = 0, \end{array}$$

и пусть $X_0 = (5, 5, 7)^{\mathrm{T}}$. Прямые вычисления дают:

$$(\alpha_{ij}^1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad (\beta_i^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^1 = -1;$$

$$(\alpha_{ij}^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (\beta_i^2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^2 = 1;$$

$$(\alpha_{ij}^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (\beta_i^3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^3 = 3;$$

$$B(X, Y) = (x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3, 0, 0)^{\mathrm{T}};$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 10 & 10 & -14 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \det C = 0.$$

Решая однородную систему линейных алгебраических уравнений $CX = 0$ мы видим, что вектор $X_1 = (4, 3, 5)^{\mathrm{T}}$ образует базис в пространстве её решений. Прямые вычисления показывают, что

$B(X_1, X_1) = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, а значит мы можем взять $X_q = 0$ для всех $q \geq 2$. Это позволяет нам сослаться на теорему 2.1 при $q = 2$ и $k = 1$ и заключить, что X_0 не является изолированным решением системы $F(X) = 0$.

В данном случае однопараметрическое семейство решений, конечно, может быть выписано явно: $X(t) = X_0 + tX_1$. Его геометрический смысл станет очевидным, если мы заметим, что уравнение $F_1(X) = 0$ задаёт однополостный гиперболоид, а пара линейных уравнений $F_2(X) = F_3(X) = 0$ задаёт его прямолинейную образующую, проходящую через точку X_0.

Пример. Пусть функция $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$ задана формулой $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2$ и пусть $X_0 = (0, 0)^{\mathrm{T}}$.

Преобразуем уравнение $f(X) = 0$ в систему уравнений, степень каждого из которых не превосходит 2:

$$F_1(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 x_3 - x_2^2 = 0, \tag{10}$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^2 - x_3 = 0. \tag{11}$$

При этом мы получаем $B(X, Y) = (\frac{1}{2}x_1 y_3 - x_2 y_2 + \frac{1}{2}x_3 y_1, x_1 y_1)^{\mathrm{T}}$,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Мы не будем шаг за шагом решать соответствующие уравнения (6), а заметим, что уравнение $f(X) = 0$, очевидно, имеет следующее аналитическое семейство решений $x_1 = t^2$, $x_2 = t^3$. Отсюда непосредственно получаем $X_0 = X_1 = X_5 = X_6 = \ldots = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $X_2 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $X_3 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $X_4 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. Найдём наименьшие q и k для которых выполняются условия теоремы 2.1.

Прямые вычисления дают:

$$\begin{array}{rcll} B(X_1, X_i) + B(X_i, X_1) & = & (0,0)^{\mathrm{T}} & \text{для всех } i \geq 1, \\ B(X_2, X_i) + B(X_i, X_2) & = & (0,0)^{\mathrm{T}} & \text{для } i = 3 \text{ и всех } i \geq 5, \\ B(X_3, X_i) + B(X_i, X_3) & = & (0,0)^{\mathrm{T}} & \text{для всех } i \geq 4, \\ B(X_4, X_i) + B(X_i, X_4) & = & (0,0)^{\mathrm{T}} & \text{для всех } i \geq 4, \\ B(X_2, X_2) & = & (0,1)^{\mathrm{T}}, & \\ B(X_3, X_3) & = & (-1,0)^{\mathrm{T}}, & \\ B(X_2, X_4) + B(X_4, X_2) & = & (1,0)^{\mathrm{T}}. & \end{array}$$

Следовательно, условия теоремы 2.1 выполняются при $q = k = 5$, но не выполняются ни при каких меньших значениях q и k. Поэтому на основании теоремы 2.1 мы можем утверждать, что приближённое решение $X_0 + tX_1 + t^2 X_2 + t^3 X_3 + t^4 X_4 + t^5 X_5$ может быть продолжено в точное решение системы (10), но мы не можем сделать такого вывода, основываясь только на приближённом решении $X_0 + tX_1 + t^2X_2 + t^3X_3 + t^4X_4$.

Теперь приведём пример алгебраической системы уравнений, имеющей аналитическое семейство решений, которое не может быть получено на основании теоремы 2.1 ни при каких значениях q и k.

Пример. Пусть отображение $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ задано следующими формулами

$$F_1(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4, \tag{12}$$
$$F_2(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 \tag{13}$$

и пусть $X_0 = (2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Прямые вычисления дают:

$$(\alpha_{ij}^1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (\beta_i^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^1 = -4;$$

$$(\alpha_{ij}^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (\beta_i^2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^2 = 0;$$

$$B(X, Y) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, x_1y_1 + x_2y_2)^{\mathrm{T}};$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\operatorname{rank} C = 1$, $\operatorname{im} C = \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 | \xi = 2\eta\}$, $\ker C = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 | u = 0\}$ и $\dim \ker C = 2$.

Заметим, что система (12) задаёт кривую Вивиани и допускает следующее аналитическое по параметру семейство решений:

$$\begin{aligned} &x_1(t) = 1 + \cos t, \\ &x_2(t) = \sin t, \\ &x_3(t) = 2\sin(t/2), \\ &X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p. \end{aligned}$$

Ясно, что каждый конечный отрезок последнего ряда является приближённым решением некоторого порядка системы (12). Допустим, что он удовлетворяет условиям теоремы 2.1 с параметрами q и k.

Из доказательства теоремы 2.1 следует, что при $p \geq k$ вектор X_p строится как линейная комбинация решений уравнений

$$CX = -B(X_i, X_j) - B(X_j, X_i)$$

при $1 \leq i \leq q$ и $k \leq j \leq q$. Следовательно, каждый из векторов $B(X_2, X_p) + B(X_p, X_2)$ должен лежать в образе оператора C, т. е. его первая компонента должна быть в 2 раза больше второй. Но это условие, очевидно, не выполняется, т. к. $B(X_2, Y) + B(Y, X_2) = (-y_1, -y_1)^{\mathrm{T}}$, а среди векторов X_p бесконечно много имеют ненулевую первую компоненту.

Таким образом, последний пример показывает, что, вообще говоря, условия теоремы 2.1 не являются необходимыми для существования неявной функции. Это означает, что теорему 2.1 невозможно использовать для доказательства изолированности данного решения алгебриаческой системы уравнений. В следующем разделе мы укажем несколько дополнительных условий, при выполнении которых условия теоремы 2.1 будут не только достаточными, но станут и необходимыми для существования аналитического семейства решений системы алгебраических уравнений.

Небходимые условия существования неявной функции

Простейшее необходимое условие существования непрерывного семейства решений известно в теории изгибаний гладких поверхностей по крайней мере со времени работ С. Кон-Фоссена [31]. Для алгебраических систем уравнений оно может быть сформулировано так (мы используем обозначения, введённые в предыдущем разделе этого параграфа).

Теорема 2.3 *Если система $CX = 0$ имеет только нулевое решение, то система алгебраических уравнений $F(X) = 0$ не имеет непостянного аналитического семейства решений, представленного в виде суммы сходящегося степенного ряда с заданным свободным членом X_0.*

Доказательство будем вести от противного. Допустим, что система алгебраических уравнений $F(X) = 0$ имеет непостоянное аналитическое по параметру семейство решений, представленное в виде суммы сходящегося степенного ряда

$$X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p$$

и пусть q является наименьшим положительным числом, для которого $X_q \neq 0$. Согласно (6), вектор X_q должен удовлетворять линейной алгебраического системе

$$CX_q = -\sum_{p=1}^{q-1} B(X_p, X_{q-p}) = 0,$$

которая, согласно условиям теоремы, может иметь только нулевое решение. Значит $X_q = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.3.

В теории изгибаний гладких поверхностей известны и более продвинутые необходимые условия (см., напр., [35], [45]). Соответствующий алгебраический вариант приведём в следующей теореме.

Теорема 2.4 *Если система алгебраических уравнений* $F(X) = 0$ *и вектор* X_0 *таковы, что никакое её приближённое решение первого порядка* $X_0 + tX_1$ *с* $X_1 \neq 0$ *не может быть продолжено в приближённое решение второго порядка, то система* $F(X) = 0$ *не имеет непостянного аналитического семейства решений, представленного в виде суммы сходящегося степенного ряда со свободным членом* X_0.

Доказательство снова будем вести от противного. Допустим, что система алгебраических уравнений $F(X) = 0$ имеет непостоянное аналитическое по параметру семейство решений, представленное в виде суммы сходящегося степенного ряда

$$X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p$$

и пусть q является наименьшим положительным числом, для которого $X_q \neq 0$. Вектор X_q лежит в ядре оператора C, а значит, ввиду условий теоремы, вектор $B(X_q, X_q)$ не лежит в образе оператора C. Согласно (6), вектор X_{2q} должен удовлетворять линейной алгебраического системе уравнений

$$CX_{2q} = -\sum_{p=1}^{2q-1} B(X_p, X_{2q-p}) = -B(X_q, X_q).$$

Поскольку вектор $B(X_q, X_q)$ не лежит в образе оператора C, то последняя система решения не имеет. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.4.

Перейдём к обсуждению дополнительных условий, при выполнении которых условия теоремы 2.1 будут не только достаточными, но станут и необходимыми для существования аналитического семейства решений системы алгебраических уравнений. Полученные на этом пути результаты будут в определённом смысле обобщать теоремы 2.3 и 2.4. Прежде всего изучим ситуацию, когда в последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_q$, состоящей из коэффициентов приближённых решений, мало линейно независимых векторов.

Теорема 2.5 *Пусть система алгебраических уравнений $F(X) = 0$ имеет аналитическое семейство решений, представленное в виде суммы сходящегося степенного ряда*

$$X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p,$$

причём векторы X_3 и X_4 содержатся в линейной оболочке векторов X_1 и X_2. Тогда для всех $1 \leq i, j \leq 2$ система уравнений

$$CX = -B(X_i, X_j) - B(X_j, X_i)$$

имеет решение, лежащее в линейной оболочке векторов X_1 и X_2.

Доказательство. Векторы X_1, X_2, X_3 и X_4 удовлетворяют следующим уравнениям

$$\begin{aligned}
&CX_1 = 0,\\
&CX_2 = -B(X_1, X_1),\\
&CX_3 = -B(X_1, X_2) - B(X_2, X_1),\\
&CX_4 = -B(X_1, X_3) - B(X_2, X_2) - B(X_3, X_1).
\end{aligned}$$

Линейную оболочку векторов X_1 и X_2 обозначим через L. Из второго уравнения непосредственно получаем $B(X_1, X_1) \in CL$. Поскольку $X_3 \in L$, то из третьего уравнения мы также непосредственно получаем $B(X_1, X_2) + B(X_2, X_1) \in CL$. Наконец, поскольку $X_3 \in L$, то найдутся числа c_3^1 и c_3^2 такие, что $X_3 = c_3^1 X_1 + c_3^2 X_2$. Поэтому четвёртое уравнение может быть переписано в виде $CX_4 = -2c_3^1 B(X_1, X_1) - c_3^2 [B(X_1, X_2) + B(X_2, X_1)] - B(X_2, X_2)$.

Вектор CX_4 принадлежит CL согласно условиям теоремы, а векторы $B(X_1, X_1)$ и $B(X_1, X_2)+B(X_2, X_1)$ принадлежат CL согласно доказанному ранее. Поэтому $B(X_2, X_2) \in CL$. Теорема 2.5 доказана.

Теорема 2.6 *Пусть система алгебраических уравнений $F(X) = 0$ имеет аналитическое семейство решений, представленное в виде суммы сходящегося степенного ряда*

$$X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p X_p,$$

причём векторы X_4, X_5, X_6 и X_7 содержатся в линейной оболочке векторов X_1, X_2 и X_3. Тогда для всех $1 \leq i, j \leq 3$ система уравнений

$$CX = -B(X_i, X_j) - B(X_j, X_i)$$

имеет решение, лежащее в линейной оболочке векторов X_1, X_2 и X_3.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\alpha \in \mathbf{R}$ и сделаем замену переменной $t = \tau+\alpha\tau^2$ в решении $X(t) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} t^p X_p : Y(\tau) \equiv X(\tau + \alpha\tau^2) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \tau^p Y_p$. Очевидно, $Y(\tau)$ являетсся аналитическим семейством решений уравнения $F(Y) = 0$ и поэтому при каждом $q \geq 1$ выполняется равенство

$$CY_q = -\sum_{p=1}^{q-1} B(Y_p, Y_{q-p}). \tag{14}$$

С другой стороны, векторы Y_p могут быть выражены через X_i перегруппировкой членов в выражении

$$\sum_{p=0}^{\infty} \tau^p Y_p = \sum_{p=0}^{\infty} (\tau + \alpha\tau^2)^p Y_p.$$

Это даёт

$$\begin{aligned} Y_0 &= X_0, \\ Y_1 &= X_1; \qquad (15) \\ Y_2 &= X_2 + \alpha X_1, \qquad (16) \end{aligned}$$

$$Y_3 = X_3 + 2\alpha X_2, \tag{17}$$
$$Y_4 = X_4 + 3\alpha X_3 + \alpha^2 X_2, \tag{18}$$
$$Y_5 = X_5 + 4\alpha X_4 + 3\alpha^2 X_3, \tag{19}$$
$$Y_6 = X_6 + 5\alpha X_5 + 6\alpha^2 X_4 + \alpha^3 X_3. \tag{20}$$

Согласно условиям теоремы, каждый из векторов X_4, X_5 и X_6 принадлежит линейной оболочке векторов X_1, X_2 и X_3, а значит — найдутся числа c_j^i, $1 \le i \le 3$, $4 \le j \le 6$ такие, что $X_j = c_j^1 X_1 + c_j^2 X_2 + c_j^3 X_3$ для каждого $4 \le j \le 6$. С учётом этих равенств формулы (18)–(20) могут быть переписаны в виде

$$Y_4 = (c_4^3 + 3\alpha)X_3 + (c_4^2 + \alpha^2)X_2 + c_4^1 X_1, \tag{21}$$
$$Y_5 = (c_5^3 + 4\alpha c_4^3 + 3\alpha^2)X_3 + (c_5^2 + 4\alpha c_4^2)X_2 + (c_5^1 + 4\alpha c_4^1)X_1, \tag{22}$$
$$Y_6 = (c_6^3 + 5\alpha c_5^3 + 6\alpha^2 c_4^3 + \alpha^3)X_3 + (c_6^2 + 5\alpha c_5^2 + 6\alpha^2 c_4^2)X_2 \tag{23}$$
$$+ (c_6^1 + 5\alpha c_5^1 + 6\alpha^2 c_4^1)X_1. \tag{24}$$

Линейную оболочку векторов X_1, X_2 и X_3 обозначим через L.

При $q = 2$ уравнение (14) принимает вид $CY_2 = -B(Y_1, Y_1)$ или, с учётом (15) и (16), $CX_2 + \alpha CX_1 = -B(X_1, X_1)$. Откуда непосредственно вытекает $B(X_1, X_1) \in CL$.

При $q = 3$ уравнение (14) принимает вид $CY_3 = -B(Y_1, Y_2) - B(Y_2, Y_1)$ или, с учетом (16) и (17), $CX_3 + 2\alpha CX_2 = -2\alpha B(X_1, X_1) - [B(X_1, X_2) + B(X_2, X_1)]$. Откуда непосредственно вытекает $B(X_1, X_2) + B(X_2, X_1) \in CL$.

При $q = 4$ уравнение (14) принимает вид $CY_4 = -B(Y_1, Y_3) - B(Y_2, Y_2) - B(Y_3, Y_1)$ или, с учетом (18) и (21), $(c_4^3 + 3\alpha)CX_3 + (c_4^2 + \alpha^2)CX_2 + c_4^1 CX_1 = -\alpha^2 B(X_1, X_1) - 3\alpha[B(X_1, X_2) + B(X_2, X_1)] - [B(X_1, X_3) + B(X_3, X_1)] - B(X_2, X_2)$. Откуда с учётом уже доказанного вытекает

$$[B(X_1, X_2) + B(X_2, X_1)] + B(X_2, X_2) \in CL. \tag{25}$$

Аналогично, из уравнения (14) при $q = 5$ мы получаем

$$[B(X_1, X_3) + B(X_3, X_1)] + [B(X_2, X_3) + B(X_3, X_2)] \in CL, \tag{26}$$

при $q = 6$ получаем

$$(c_5^3 + 4\alpha c_4^3 + 3\alpha^2)[B(X_1, X_3) + B(X_3, X_1)] \tag{27}$$
$$+(2c_4^2 - 10\alpha^2 - 4\alpha c_4^3)B(X_2, X_2) \tag{28}$$
$$+(c_4^3 + 3\alpha)[B(X_2, X_3) + B(X_3, X_2)] \in CL, \tag{29}$$

наконец, при $q = 7$ получаем

$$
\begin{aligned}
(c_4^1 - \alpha c_4^2 + 6\alpha^4 + c_6^3 + 5\alpha c_5^3 + 8\alpha^2 c_4^3)[B(X_1, X_3) + B(X_3, X_1)] && (30)\\
+(c_5^2 + 4\alpha c_4^2 - 2\alpha c_5^3 + 8\alpha^2 c_4^3 - 6\alpha^3)B(X_2, X_2) && (31)\\
+(c_5^3 + 2\alpha c_4^3 + c_4^2 + 4\alpha^2)[B(X_2, X_3) + B(X_3, X_2)] && (32)\\
+(c_4^3 + 3\alpha)B(X_3, X_3) \in CL. && (33)
\end{aligned}
$$

Соотношения (25)–(30) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно четырёх векторных неизвестных $B(X_1, X_3) + B(X_3, X_1)$, $B(X_2, X_2)$, $B(X_2, X_3) + B(X_3, X_2)$ и $B(X_3, X_3)$. Правые части этих уравнений являются некоторыми векторами U_1, U_2, U_3, U_4 из CL. Если определитель этой системы отличен от нуля, то каждая из четырёх векторных неизвестных окажется линейной комбинацией векторов U_1, U_2, U_3 и U_4, а значит — будет лежать в CL.

Прямые вычисления показывают, что определитель системы (25)–(30) равен

$$
\begin{aligned}
&-6\alpha^4 + 18\alpha^3 + 20\alpha^2 c_4^3 + \alpha[2c_4^2 + (c_4^3)^2 - c_5^3]\\
&+[-c_4^1 + c_5^2 - c_4^2 c_4^3 - (c_4^3)^2 + 2c_4^3 c_5^3 - c_6^3].
\end{aligned}
$$

Этот многочлен от α не равен нулю тождественно ни при каких значениях коэффициентов c_j^i разложения векторов X_4, X_5, X_6 по векторам X_1, X_2, X_3. Поэтому, выбрав подходящее значение α, мы можем добиться того, чтобы определитель системы, соответствующей (25)–(30) был отличен от нуля. Из этого, как было сказано выше, следует заключение теоремы 2.6.

Один из приведённых в предыдущем разделе настоящего параграфа примеров показывает, что в случае когда четыре вектора X_1, X_2, X_3 и X_4 являются линейно независимыми, может оказаться, что некоторые из векторов $B(X_i, X_j) + B(X_j, X_i)$ не лежат в образе оператора C, но система $F(X) = 0$ определяет неявную функцию. Это означает, что прямого аналога теорем 2.5 и 2.6 не существует уже для случая, когда четыре вектора X_1, X_2, X_3 и X_4 являются линейно независимыми.

Это обстоятельство, безусловно затрудняет доказательство того факта, что данная система уравнений $F(X) = 0$ не имеет аналитического семейства решений. Но имеются ещё и другие причины, не позволяющие делать такие заключения. Одна из них носит чисто технический характер и состоит в быстром разрастании объёма вычислений: если, изучая возможность продолжения приближённого решения первого порядка $X_0 + tX_1$ в приближённое решение второго порядка, мы нашли одно такое продолжение $X_0 + tX_1 + t^2 X_2$, то при любом $\widetilde{X} \in \ker\, C$ выражение $X_0 + tX_1 + t^2(X_2 + \widetilde{X})$ также будет приближённым решением второго порядка и мы вынуждены изучать вопрос о продолжении в приближённое решение третьего порядка не для одного приближённого решения второго порядка, а для целого семейства таких решений. Другая причина носит более принципиальный характер. Допустим, мы сумели пробиться через вышеописанные разрастающиеся вычисления и нашли число N такое, что никаким способом нельзя продолжить никакое приближённое решение первого порядка $X_0 + tX_1$, $X_1 \in \ker\, C$, $X_1 \neq 0$, хоть в какое-нибудь приближённое решение порядка N. Означает ли это, что система $F(X) = 0$ не определяет неявной функции в окрестности точки X_0? Нет! Мы должны убедиться в невозможности продолжения и такого $X_0 + t \cdot 0 + t^2 X_1$, и такого $X_0 + t \cdot 0 + t^2 \cdot 0 + t^3 X_1$ и всех прочих приближённых решений, начинающихся с нулей, где $X_1 \in \ker\, C$, $X_1 \neq 0$. Один из приведённых в предыдущем разделе настоящего параграфа примеров показывает, что у (точного) решения системы $F(X) = 0$ действительно несколько первых коэффициентов X_p могут обращаться в ноль. Вместе с тем у нас нет оценки того, сколько именно нулей может встретиться среди начальных членов тейлоровского разложения неявной функции, определяемой данным уравнением. Поэтому мы вынуждены проверять бесконечное число возможностей, происходящих от «дописывания нулей» в начальных членах приближённого решения. Значит, в общем случае у нас нет конечного алгоритма, гарантирующего отсутствие неявной функции.

Ниже мы покажем, что в случае $\dim \ker\, C = 1$ такой алгоритм всё-же существует. Прежде всего уточним терминологию. По-прежнему будем считать, что нам дана алгебраическая система уравнений $F(X) = 0$, каждое из которых имеет степень не выше 2, и по которой построены билинейный оператор B и линейный оператор C. Допустим, что $\dim \ker\, C = 1$. В области определения оператора C фиксируем произвольное подпространство T коразмерности 1 такое, что $T \cap \ker\, C = \{0\}$. Формальный степенной ряд $X(t) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} t^p X_p$ мы будем называть *T-стандартным формальным решением* системы $F(X) = 0$, если выполняются следующие условия:

1) для каждого $q \geq 1$ справедливо равенство $CX_q = -\sum\limits_{p=1}^{q-1} B(X_p, X_{q-p})$;

2) $X_1 \neq 0$;

3) $X_p \in T$ для каждого $p \geq 2$.

Ключевую роль в нашем подходе играет следующая

Теорема 2.7 *Если система $F(X) = 0$ имеет (точное) непостоянное решение в форме сходящегося степенного ряда $X(t) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} t^p X_p$ и dim ker $C = 1$, то, для любого подпространства T коразмерности 1 такого, что $T \cap \ker C = \{0\}$, система $F(X) = 0$ имеет также и T-стандартное формальное решение $Y(t) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} t^p Y_p$ такое, что $Y_0 = X_0$.*

Чтобы не прерывать изложения, доказательство этой теоремы будет приведено в конце настоящего параграфа.

Коэффициенты Y_p T-стандартного формального решения системы $F(X) = 0$ находятся последовательно как решения линейных систем алгебраических уравнений $CY_p = -\sum\limits_{l=1}^{p-1} B(Y_l, Y_{p-l})$. При этом если решение имеется, то оно единственно ввиду требования $Y_p \in T$ (а значит, не происходит разрастания объёма вычислений). Если же при некотором p решение Y_p не существует, то не существует и T-стандартного формального решения системы $F(X) = 0$. В силу теоремы 2.7 это означает, что у системы $F(X) = 0$ не существует и (точного) непостоянного решения в форме сходящегося степенного ряда (с любым количеством нулевых начальных коэффициентов). Таким образом мы получили алгоритм, который в некоторых случаях после конечного числа шагов гарантирует нам отсутствие неявной функции, определяемой системой $F(X) = 0$ в окрестности точки X_0. Приведём простейший пример работы предложенного алгоритма.

Пример. Пусть отображение $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ задано следующими формулами

$$\begin{aligned}
&F_1(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4,\\
&F_2(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 - 3)^2 + x_2^2 - 1,\\
&F_3(x_1, x_2, x_3) \equiv x_2,
\end{aligned}$$

и пусть $X_0 = (2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Ясно, что уравнение $F_1 = 0$ определяет сферу в $\mathbf{R}^3$, а уравнение $F_2 = 0$ определяет цилиндр, имеющий со сферой лишь одну общую точку X_0. Поэтому система уравнений $F(X) = 0$ неявной функции не определяет. Покажем как можно прийти к этому же выводу опираясь на теорему 2.7.

Прямые вычисления дают:

$$(\alpha^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (\beta^1_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^1 = -4;$$

$$(\alpha^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (\beta^2_i) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^2 = -1;$$

$$(\alpha^3_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (\beta^3_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^3 = 0;$$

$$B(X,Y) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, x_1y_1 + x_2y_2, 0)^{\mathrm{T}};$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\operatorname{rank} C = 2$, $\operatorname{im} C = \{(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbf{R}^3 | \xi = 2\eta\}$, $\ker C = \{(u,v,w) \in \mathbf{R}^3 | u = v = 0\}$, $\dim \ker C = 1$, $X_1 = (0,0,1)$ и $B(X_1,X_1) = (1,0,0)^{\mathrm{T}} \notin \mathrm{im}\ C$.

Последнее означает, что приближённое решение $X_0 + tX_1$ не может быть продолжено в приближённое решение второго порядка. Значит не существует и T-стандартного формального решения системы $F(X) = 0$. В силу теоремы 2.7 это означает, что система $F(X) = 0$ не определяет неявной функции в окрестности точки X_0.

Доказательство теоремы 2.7. Обозначим через N наименьший положительный номер p для которого $X_p \neq 0$ и через q — наибольшее число при котором (точное) непостоянное решение системы $F(X) = 0$, данное нам согласно условиям теоремы в форме сходящегося степенного ряда $X(t) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} t^p X_p$, обладает свойствами (i) $X_p = 0$ для всех $0 < p \leq q$, $p \neq 0 \pmod N$ и (ii) $X_p \in T$ для всех $0 < p \leq q$, $p \neq N$, $p = 0 \pmod N$.

Убедимся, что можно сделать полиномиальную замену переменной $t = t(\tau)$ так, что новое (точное) непостоянное решение $\widetilde{X}(\tau) \equiv X(t(\tau))$ системы $F(X) = 0$, данное нам в форме сходящегося степенного ряда $\widetilde{X}(\tau) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \tau^p \widetilde{X}_p$, обладает свойствами (i) и (ii) для числа $q+1$ и, является таким, что $\widetilde{X}_0 = X_0$, $\widetilde{X}_N = X_N$.

Другими словами, мы собираемся убедиться, что заменами переменной t можно последовательно занулять коэффициенты X_p с номерами, не кратными N и превращать их в векторы, лежащие в T, если p кратно N, не изменяя при этом X_0 и X_N и получая после такого преобразования опять (точное) непостоянное решение в форме сходящегося степенного ряда. Совершив бесконечно много таких полиномиальных замен переменной t, и не следя за радиусами сходимости получающихся по ходу дела рядов, мы получим формальный степенной ряд $Z(\tau) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \tau^p Z_p$ коэффициенты которого Z_p, $p = 0, 1, \ldots$, обладают следующими свойствами:

(a) $Z_0 = X_0$;

(b) $Z_p = 0$ для всех $p \neq 0 (\mathrm{mod}\ N)$;

(c) $Z_N = X_N \neq 0$;

(d) $Z_p \in T$ для всех $p > 0,\ p = 0 (\mathrm{mod}\ N)$;

(e) для каждого $q \geq 1$ справедливо равенство $CZ_q = -\sum\limits_{p=1}^{q-1} B(Z_p, Z_{q-p})$.

Наконец, сделав в формальном степенном ряде $Z(\tau)$ замену переменной $t = \tau^N$, мы получим T-стандартное формальное решение $Y(t)$, существование которого и утверждает теорема 2.7.

Итак, для завершения доказательства теоремы 2.7 нам необходимо обосновать возможность описанного выше перехода от решения $X(t)$, обладающего свойствами (i) и (ii) для q к решению $\widetilde{X}(\tau)$ обладающего свойствами (i) и (ii) для $q + 1$ и такого, что $\widetilde{X}_0 = X_0$, $\widetilde{X}_N = X_N$.

Пусть $q = iN + j$, где $0 \leq j \leq N - 1$. Сделаем замену переменной $t = \tau + \alpha\tau^{q+1-N}$ (здесь τ — новая переменная, а α — постоянная, значение которой будет уточнено ниже):

$$\begin{aligned}
&\widetilde{X}(\tau) = X(\tau + \alpha\tau^{q+1-N}) \\
&= X_0 + (\tau + \alpha\tau^{q+1-N})^N X_N + (\tau + \alpha\tau^{q+1-N})^{2N} X_{2N} + \cdots \\
&+ (\tau + \alpha\tau^{q+1-N})^{iN} X_{iN} + (\tau + \alpha\tau^{q+1-N})^{iN+j} X_{iN+j} + \cdots \\
&= X_0 + \tau^N X_N + \tau^{2N} X_{2N} + \cdots + \tau^{iN} X_{iN} + \tau^q (X_q + N\alpha X_N) + \cdots .
\end{aligned}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $0 < j \leq N - 1$. Как известно, вектор X_q находится из системы линейных алгебраических уравнений

$$CX_q = -\sum_{r=1}^{iN+j} B(X_r, X_{iN+j-r}). \qquad (34)$$

Если $r = 0 (\mathrm{mod}\ N)$, то $iN + j - r = j (\mathrm{mod}\ N)$ и, в частности, $iN + j - r \neq 0 (\mathrm{mod}\ N)$. Значит, при любом $1 \leq r \leq iN + j - 1$

хотя бы один из двух векторов X_r, X_{iN+j-r} равен нулю. Поэтому правая часть равенства (34) равна нулю и $X_q \in \ker C$. С другой стороны, $X_N \in \ker C$ и $\dim \ker C = 1$. Значит векторы X_q и X_N пропорциональны. А поскольку $X_N \neq 0$, то найдётся число α такое, что $X_q + \alpha N X_N = 0$. При таком выборе α (точное) решение $\widetilde{X}(\tau) = X(\tau + \alpha\tau^{q+1-N})$ и будет обладаать свойствами (i) и (ii) для числа $q+1$ и для него будут справедливы равенства $\widetilde{X}_0 = X_0$ и $\widetilde{X}_N = X_N$.

Теперь рассмотрим случай, когда $j = 0$. В этом случае, если $r = sN$ $(0 \leq s \leq i)$, то $iN + j - r = (i-s)N$. Значит, уравнение (34) может быть переписано в виде

$$CX_q = -\sum_{s=1}^{i} B(X_{sN}, X_{(i-s)N}).$$

Правая часть последнего выражения, вообще говоря, не равна нулю. Поэтому X_q, вообще говоря, не лежит в $\ker C$. Но пользуясь тем, что линейная оболочка подпространств T и $\ker C$ совпадает со всем пространством, мы можем найти такое α, что $X_q + \alpha N X_N \in T$. При таком выборе α (точное) решение $\widetilde{X}(\tau) = X(\tau + \alpha\tau^{q+1-N})$ и будет обладаать свойствами (i) и (ii) для числа $q+1$ и для него будут справедливы равенства $\widetilde{X}_0 = X_0$ и $\widetilde{X}_N = X_N$.

Тем самым доказана возможность перехода от $X(t)$ к $\widetilde{X}(\tau)$ с соблюдением свойств (i), (ii) и равенств $\widetilde{X_0} = X_0$, $\widetilde{X}_N = X_N$. Это и завершает доказательство теоремы 2.7.

3 Нелокальные теоремы об обратной функции

В приведённой в параграфе 1 локальной версии теоремы о неявной функции 1.1 наличие неявной функции гарантируется «в некоторой окрестности» рассматриваемой точки. Вообще говоря, эта окрестность может быть неконтролируемо малой. Однако, в которых задачах необходимо быть уверенным, что эта окрестность достаточно велика. В настоящем параграфе мы приведём несколько соответствующих теорем об обратной функции.

Начнём с одной теоремы, хорошо известной из работ Ж. Адамара [52], П. Леви [95], Ф. Джона [57] и др. см., напр., [28], [92], прежде чем сформулировать которую введём следующие обозначения.

Если B и b — банаховы пространства, а отображение $f : B \to b$ является локальным гомеоморфизмом, то нижнее растяжение [57] отображения f в точке $X \in B$ обозначим через

$$D_X^- f = \liminf_{Y \to X} \frac{|f(Y) - f(X)|}{|Y - X|},$$

где $\liminf$ и $|\cdot|$ — символы нижнего предела и нормы соответственно. Отметим, что если f дифференцируемо в точке X и дифференциал $f'(X)$ обратим, то, очевидно, $D_X^- f = \|f'(X)^{-1}\|^{-1}$, где $\|\cdot\|$ — операторная норма линейного отображения. Кроме того, для неотрицательных вещественных чисел определим невозрастающую функцию M, задав её равенством

$$M(t) = \inf_{\substack{|X| \le t \\ X \in B}} D_X^- f.$$

Теорема 3.1 *Пусть B и b — банаховы пространства, а отображение $f : B \to b$ является локальным гомеоморфизмом, причём*

$$\int\limits_0^{+\infty} M(t)\,dt = +\infty.$$

Тогда f взаимно однозначно отображает B на всё пространство b.

Отметим, что условия теоремы 3.1 в определённом смысле неулучшаемы. А именно, в работе Ф. Джона [57, с. 92] для любой функции m такой, что $\int\limits_0^{+\infty} m(t)\,dt < +\infty$, построено непрерывно дифференцируемое отображение $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ со свойствами:

(а) f сюръективно, но не инъективно;

(б) для всех $u \in \mathbf{R}^2$ строки матрицы $f'(X)$ попарно ортогональны и $\det f'(X) > 0$;

(в) для каждого $t \ge 0$ имеем $\inf\limits_{|X| \le t} D_X^- f = m(t)$.

Впрочем, используя метод, предложенный Ф. Джоном, можно без труда построить отображение f, не являющееся ни сюръективным, ни инъективным, но обладающим свойствами (б) и (в).

Теорема 3.1 даёт условия, при которых обратное отображение определено во всём пространстве. Следующая теорема (см. [57, теорема IIA]) обобщает её на случай, когда существование обратного отображения можно гарантировать лишь в шаре некоторого конечного радиуса.

Теорема 3.2 *Пусть B и b — банаховы пространства, f является локально-гомеоморфным отображением шара пространства B с центром и радиуса R в пространство b. Положим для $0 \le t < R$*

$$M(t) = \inf_{|X-Y| \le t} D_Y^- f.$$

Тогда в шаре ω пространства b с центром $f(X)$ радиуса

$$r = \int\limits_0^R M(t)\,dt$$

определено отображение f^{-1}, обратное к f, т. е. такое, что

(а) *$\omega \subset f(B)$;*

(б) *f^{-1} непрерывно в ω;*

(в) *$f(f^{-1}(Y)) = Y$ для всех $Y \in \omega$.*

Примеры приложения теорем 3.1 и 3.2 к геометрическим задачам можно найти, напр., в [8]–[10].

Теоремы 3.1 и 3.2 носят количественный характер. Но есть ещё качественные теоремы об обратной функции, одна из которых, называемая обычно «леммой А. Д. Александрова об отображении», будет нам особенно полезна. Приведём её в формулировке, заимствованной из [6].

Теорема 3.3 *Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — два многообразия одного и того же числа измерений и пусть отображение $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *в каждой связной компоненте многоогразия $\mathbf{B}$ содержатся образы точек из $\mathbf{A}$;*

(2) *f взаимно однозначно;*

(3) *f непрерывно;*

(4) *если точки B_m $(m = 1, 2, \ldots)$ многоогразия $\mathbf{B}$ являюися образами точек A_m $(m = 1, 2, \ldots)$ многоогразия $\mathbf{A}$ и последовательность $B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots$ сходится к точке $B \in \mathbf{B}$, то в $\mathbf{A}$*

существует точка A, отображающаяся в B, такая, что имеется подпоследовательность последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$, сходящаяся к точке A.

При этих условиях f сюръективно, то есть $f(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$.

Доказательство. В силу условия (4) отображение f взаимно непрерывно. Действительно, пусть $B_m = f(A_m)$, $B = f(A)$ и последовательность $B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots$ сходится к точке $B \in \mathbf{B}$. Допустим, что последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ не сходится к точке $A \in \mathbf{A}$. Тогда есть такая окрестность точки A, вне которой лежит бесконечно много точек A_m. Пусть это будут точки $A_{m_1}, A_{m_2}, \ldots, A_{m_j}, \ldots$. Мы получаем, что $B_{m_j} = f(A_{m_j})$, $B = f(A)$ и последовательность $B_{m_1}, B_{m_2}, \ldots, B_{m_j}, \ldots$ сходится к точке $B \in \mathbf{B}$, но, вместе с тем, никакая подпоследовательность последовательности $A_{m_1}, A_{m_2}, \ldots, A_{m_j}, \ldots$ не может сходиться к A. Это, однако, противоречит условию (4), так как по взаимной однозначности отображения f только данная точка A отображается в B. Следовательно, последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ должна сходиться к точке A, т. е. f является взаимно непрерывным.

Так как отображение f взаимно однозначно и взиамно непрерывно, то оно является топологическим. Теорема Брауэра об инвариантности области утверждает, что *при топологическом отображении n-мерного многообразия $\mathbf{A}$ в n-мерное многообразие $\mathbf{B}$ всякое открытое множество многообразия $\mathbf{A}$ переходит в открытое множество многообразия $\mathbf{B}$* (см., напр., [6, Гл. 2, §9] или [22, 18.2.6.5]). Применяя её к нашей ситуации видим, что образ многообразия $\mathbf{A}$, т. е. $f(\mathbf{A})$, есть открытое множество в $\mathbf{B}$.

С другой стороны, из условия (4) следует, что $f(\mathbf{A})$ является замкнутым множеством в $\mathbf{B}$. Действительно, если точки $B_m = f(A_m)$ сходятся к B, то по условию (4) существует точка $A \in \mathbf{A}$, отображающаяся в B, т. е. B принадлежит $f(\mathbf{A})$, и следовательно, $f(\mathbf{A})$ замкнуто.

Но если $f(\mathbf{A})$ и открыто и замкнуто в $\mathbf{B}$, и имеет точки в каждой компоненте связности многообразия $\mathbf{B}$, то оно простирается на всё $\mathbf{B}$: $f(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$. Теорема 3.3 доказана.

Напомним ещё общеизвестную теорему из теории накрытий, которая оказывается полезной во многих ситуациях.

Пусть даны топологические пространства X и B и непрерывное отображение $f : X \to B$. Говорят, что отображение f является *накрытием*, если у всякой точки $b \in B$ существует открытая окрестность $U \subset B$, полный прообраз $f^{-1}(U)$ которой представляется в как объединение попарно непересекающихся открытых в X множеств, каждое из которых гомеоморфно отображается на U отображением f. При этом B называется *базой* накрытия, а X — *накрывающим пространством.*

Теорема 3.4 *Пусть X — линейно связное топологическое пространство, B — линейно связное односвязное топологическое пространство и $f : X \to B$ — накрытие. Тогда f является гомеоморфизмом на всё B.*

Доказательство использует следующее несложное утверждение, известное как теорема о накрывающих путях: *Для любого пути $\gamma : [0,1] \to B$ с началом $\gamma(0) = a$ и любой точки $x_0 \in f^{-1}(a)$ существует, и притом единственный, путь $\delta : [0,1] \to X$ с началом x_0, накрывающий путь γ, т. е. такой, что $(f \circ \delta)(t) = \gamma(t)$ при всех $t \in [0,1]$*. Переход от γ к δ называют *подъёмом* с началом x_0 пути γ.

Чтобы убедиться в сюръективности f, покажем, что произвольная точка $b \in B$ лежит в образе f. Для этого фиксируем произвольную точку $x_0 \in X$ и, пользуясь линейной связностью базы B, соединим точки $a = f(x_0)$ и b путём γ. Пусть δ является подъёмом с началом x_0 пути γ. Очевидно, все точки множества $f(\delta)$ лежат в образе f, а $b \in f(\delta)$. Следовательно, f сюръективно.

Инъективность f докажем от противного, а именно предположим, что нашлись точки $x_0 \neq x_1$ пространства X такие, что $f(x_0) = f(x_1)$. Поскольку X линейно связно, то найдётся путь $\delta_0 : [0,1] \to X$, соединяющий точки x_0 и x_1. Тогда путь $\gamma_0 = f \circ \delta_0$ является петлёй в B, т. е. таким путём, у которого начальная и конечная точки совпадают: $\gamma_0(0) = f(x_0) = f(x_1) = \gamma_0(1) = a$. Ввиду односвязности B петля γ_0 гомотопна постоянной петле $\gamma_1 : [0,1] \to X$, заданной формулой $\gamma_1(t) = a$ для всех $t \in [0,1]$. Обозначим эту гомотопию через γ_s $(0 \leq s \leq 1)$. Пользуясь определением накрытия несложно показать, что, во-первых, при каждом s подъём в начале x_0 пути $\gamma_s : [0,1] \to X$ имеет в качестве концевых точек как раз x_0 и x_1, а во-вторых, — подъём постоянной петли γ_1 есть постоянное отображение. Отсюда следует $x_0 = x_1$, что противоречит выбору этих точек. Полученное противоречие, доказывает, что f инъективно.

Наконец, непрерывность обратного отображения f^{-1} легко следует непосредственно из определения накрытия. Теорема 3.4 доказана.

4 Краткие сведения из теории многогранников

В этом параграфе мы приводим основные определения и напоминаем некоторые общеизвестные результаты, связанные с многогранниками. Впрочем, в последующих параграфах нам нередко приходится уточнять терминологию.

Подмножество евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ называют *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит все точки соединяющего их отрезка.

Выпуклым многогранником (точнее — *телесным выпуклым многогранником*) мы называем выпуклую оболочку конечного числа точек в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, то есть наименьшее выпуклое множество, содержащее эти точки.

Непосредственно их этого определения следует, что выпуклый многогранник является компактным множеством и не обязательно содержит внутренние точки.

Размерностью выпуклого многогранника называют минимальную размерность содержащей его плоскости в $\mathbf{R}^n$.

Через каждую точку границы выпуклого многогранника проходит хотя бы одна гиперплоскость, оставляющая этот многогранник в одном замкнутом полупространстве. Такая гиперплоскость называется *опорной* для данного выпуклого многогранника в данной точке его границы.

Пересечения выпуклого многогранника с его опорными гиперплоскостями называются *гранями*. Одномерные грани называются *рёбрами*, нульмерные — *вершинами*.

Выпуклый многогранник называют строго выпуклым, если ни один из его двугранных углов не является развернутым.

За подробностями о начальных сведениях по теории выпуклых многогранников мы отсылаем читателя к любой из классических книг [6], [26] или [50]. Там же можно найти доказательства следующих хорошо известных свойств выпуклых многогранников:

(1) *Выпуклый многогранник имеет конечное число граней.*

(2) *Каждая грань выпуклого многогранника есть выпуклый многогранник меньшей размерности.*

(3) *Грани граней являются гранями исходного выпуклого многогранника.*

(4) *n-мерный выпуклый многогранник имеет не менее чем $n+1$ вершину.*

(5) *Для любого n-мерного выпуклого многогранника справедливо соотношение Эйлера*

$$f_0 - f_1 + \ldots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1},$$

где через f_k обозначено число k-мерных граней исходного многогранника.

Границу телесного выпуклого многогранника называют *замкнутым выпуклым многогранником* или *многогранной поверхностью.* Этот термин обусловлен тем, что n-мерный замкнутый выпуклый многогранник в $\mathbf{R}^n$ является кусочно-линейным многообразием, гомеоморфным $(n-1)$-мерной сфере.

Пусть P — произвольный n-мерный замкнутый выпуклый многогранник в $\mathbf{R}^n$. Удалим из P несколько граней так, чтобы оставшаяся часть Q была гомеоморфна открытому $(n-1)$-мерному шару. Замыкание множества Q называют *выпуклым многогранником с границей* или *незамкнутой многогранной поверхностью.*

Обычно прилагательные «телесный», «замкнутый», «незамкнутый» или «выпуклый» перед существительным «многогранник» опускают, кроме тех случаев, когда это может привести к недоразумению.

Многогранники P и Q называют *комбинаторно эквивалентными* (или — многогранниками *одинакового комбинаторного строения*), если существует взаимно однозначное соответствие φ между множеством $\mathcal{F}$ всех граней многогранника P и множеством всех граней многогранника Q, сохраняющее отношение включения, т. е. такое, что для любых граней $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ включение $F_1 \subset F_2$ имеет место если и только если $\varphi(F_1) \subset \varphi(F_2)$.

Комбинаторное строение многогранника можно задавать абстрактно, указав набор его граней всех размерностей и указав какая грань содержит (включает в себя) какую. При этом, конечно, должны быть соблюдены некоторые свойства этого отношения включения, которыми заведомо обладают грани любого выпуклого многогранника в $\mathbf{R}^n$.

Нам придётся рассуждать о комбинаторном строении многограннков только трёхмерного пространства. Именно для этого случая и перечислим свойства отношения включения:

(i1) Каждое ребро содержит в точности две вершины.

(i2) Каждое ребро содержится ровно в двух 2-мерных гранях.

(i3) Для любых двух вершин есть не более одного ребра, содержащего обе эти вершины.

(i4) Для любых двух 2-мерных граней есть не более одного ребра, содержащегося в обеих этих гранях.

(i5) Каждая вершина содержится по крайней мере в трёх 2-мерных гранях.

(i6) Каждая 2-мерная грань содержит по крайней мере три вершины.

Набор точек, отрезков и многоугольников (трактуемых, соответственно, как вершины, рёбра и грани), удовлетворяющих свойствам (i1)–(i6), называют *абстрактным многогранником* (точнее — *2-мерным абстрактным многогоанником*).

Следующая глубокая теорема была доказана Е. Штейницем [122] (более современные изложения см., напр., в [50] или [68]).

Теорема 4.1 *Для любого абстрактного 2-мерного многогранника существует выпуклый многогранник в* $\mathbf{R}^3$*, имеющий то же комбинатроное строение.*

Теорему 4.1 иногда выражают так: *всякий абстрактный 2-мерный многогранник можно реализовать в виде выпуклого многогранника в* $\mathbf{R}^3$.

Порой комбинаторное строение выпуклого многогранника в $\mathbf{R}^3$ удобно фиксировать задавая граф его рёбер. При этом свойства (i1)–(i6) означают, что этот граф планарен и 3-связен, а теорема 4.1 состоит в том, что *граф* Γ *изоморфен графу рёбер некоторого выпуклого многогранника в* $\mathbf{R}^3$ *если и только если* Γ *планарен и 3-связен.*

Теорема 4.1 даёт исчерпывающее описание комбинаторного строения выпуклых многогранников в $\mathbf{R}^3$. Полного описания комбинаторного строения многомерных выпуклых многогранников на сегодняшеий день не известно.

Невыпуклым многогранником в $\mathbf{R}^n$ называют непрерывное отображение $f : K \to \mathbf{R}^n$, линейное на каждом симплексе симплициального комплекса K, тело которого является $(n-1)$-мерным связным компактным топологическим многообразием без края. Впрочем, образ тела комплекса K под действием отображения f также называют многогранником $P = f(K)$, добавляя прилагательное «невыпуклый», если в этом есть необходимость. Говорят, что многогранник не имеет самопересечений, если отображение f глобально инъективно.

Деформацией многогранника P_0 называют непрерывное семейство многогранников $\{P_t\}$, зависящее от некоторого параметра t, причём значению $t = 0$ соответствует исходный многогранник P_0, а каждый из многогранников P_t комбинаторно эквивалентен P_0.

Параметр t удобно интерпретировать как время, в связи с чем мы будем говорить о движении элементов многогранника P_0, вызывающем его изгибание: о движении вершин, вращении граней и т. п.

Если x есть какая-либо величина, относящаяся к многограннику (напр., площадь грани или длина ребра), то при деформации она будет функцией параметра t. Производную $\frac{dx}{dt}$ называют *скоростью изменения* величины x. Величину x называют *стационарной*, если начальная скорость её изменения равна нулю, т. е. если $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0$.

Задав деформацию многогранника P_0, мы автоматически задаём траекторию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, каждой точки $\mathbf{r} \in P_0$, параметризованную параметром t. В частности, с каждой точкой $\mathbf{r} \in P_0$ мы связываем вектор скорости $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}|_{t=0}$ этой кривой в начальный момент времени. Поле скоростей $\mathbf{v}$ является главной частью первого порядка относительно t той деформации многогранника P_0, с которой мы начали.

Бесконечно малым изгибанием (точнее — бесконечно малым изгибанием первого порядка) многогранника P_0 называют непрерывное векторное поле $\mathbf{v}$ на P_0 такое, что при любой деформации, порождающей это поле, длины всех кривых на P_0 стационарны.

Бесконечно малое изгибание многогранника называется *тривиальным*, если оно порождается движением многогранника в пространстве как единого целого.

Многогранник называется *жёстким* (точнее — жёстким первого порядка) при тех или иных условиях, если всякое его бесконечно малое изгибание, подчинённое этим условиям, является тривиальным. Это означает, что при этих условиях все величины, относящиеся к многограннику и инвариантные при движениях, оказываются стационарными.

Многогранник P_0 в трёхмерном евклидовом пространстве называют *изгибаемым*, если существует непрерывное семейство многогранников P_t $(0 \le t \le 1)$ со следующими свойствами:

(f1) для любых $s, t \in [0, 1]$ многогранники P_s и P_t изометричны во внутренних метриках (т. е. существует гомеоморфное сюръективное отображение $f : P_s \to P_t$, сохраняющее длины всех кривых);

(f2) для любого $r \in [0, 1]$ многогранник P_r допускает триангуляцию такую, что для любых $s, t \in [0, 1]$ и хотя бы одного гомеоморфного сюръективного отображения $f : P_s \to P_t$, сохраняющего длины всех кривых, сужение отображения f на каждую грань выбранной выше триангуляции многогранника P_s является сужением некоторой евклидовой изометрии трехмерного евклидова пространства;

(f3) существуют два числа $s, t \in [0, 1]$ такие, что многогранники P_s и P_t не могут быть совмещены евклидовым движением всего пространства.

Введённые в этом параграфе понятия естественным образом распространяются на пространство Лобачевского, сферическое пространство и пространство Минковского с индефинитной метрикой.

5 Общая схема применения теоремы об обратной функции в теории многогранников

Рассмотрим какой-нибудь класс многогранников . Например, это может быть класс многогранников с заранее заданным комбинаторным строением или класс выпуклых многогранников в заранее фиксированными внешними нормалями к граням. Обычно интересуются существованием или единственностью многогранника из данного класса с точностью до некоторых «тривиальных» преобразований, например, с точностью до параллельного переноса или движения всего пространства. «Тривиальные» преобразования образуют группу, профакторизовав класс по которой получают некоторое вспомогательное множество $\mathcal{P}$, в котором вводят подходящую структуру метрического пространства или многообразия. При этом, чтобы избежать усложнения терминогии, говорят о многограннике из $\mathcal{P}$, вместо того, чтобы говорить о классе эквивалетности относительно группы «тривиальных» преобразований, содержащей данный многогранник.

Далее любому многограннику из класса $\mathcal{P}$ сопоставляют тот или иной набор его числовых характеристик. Например, это может быть набор всех длин рёбер, набор величин плоских углов в гранях или двугранных углов, набор площадей всех граней и т. п. Конечно, в качестве таких числовых характеристик выбираются величины, инвариантные относительно группы «тривиальных» преобразований.

Таким образом возникает естественное отображение f из множества $\mathcal{P}$ в евклидово пространство. К отображению f применяют одну из теорем об обратной функции. Если при этом удаётся доказать, что производная отображения f обратима, то тем самым доказана теорема жёсткости для многогранников класса $\mathcal{P}$. Если удаётся доказать, что отображение f локально обратимо (то есть является локально инъективным), то тем самым для многогранников класса $\mathcal{P}$ устанавливается некоторая теорема о локальной однозначной определённости теми числовыми характеристиками, которые использованы при построении отображения f. Если удаётся доказать, что отображение f глобально обратимо, (то есть является инъективным), то тем самым для многогранников класса $\mathcal{P}$ устанавливается некоторая теорема об однозначной определённости. Наконец, если удаётся охарактеризовать образ $f(\mathcal{P})$ множества $\mathcal{P}$ под действием отображения f, то тем самым устанавливается некоторая теорема существования многогранника класса $\mathcal{P}$ с теми числовыми характеристиками, которые использованы при построении отображения f.

Приведём примеры классических и сравнительно новых теорем, доказываемых указанным выше способом.

Теорема 5.1 *Пусть $\mathcal{P}$ — множество классов эквивалентности выпуклых многогранников в трёхмерном евклидовом пространстве, имеющих данное комбинаторное строение. Эквивалентными считаются многогранники, получающиеся друг из друга движением всего пространства или движением и отражением. Отображение f, сопоставляющее каждому классу многогранников из $\mathcal{P}$ длины всех его рёбер и величины всех плоских углов его граней, имеет максимальный ранг.*

Другими словами теорему 5.1 формулируют так: *Выпуклые многогранники являются жёсткими.*

Теорема 5.1 впервые была доказана М. Деном в 1916 г., см. [42]. В настоящей статье мы докажем её следуя именно методу М. Дена. Другие доказательства этой теоремы можно найти во многих книгах, напр., в [6].

Не вдаваясь в детали упомянем, что известны многочисленные обобщения теоремы 5.1: инвестен её аналог для произвольных выпуклых замкнутых поверхностей, для многогранников в пространстве Лобачевского и в сферическом пространстве, а также для для произвольных замкнутых выпуклых тел в этих пространствах, см., напр., [94].

Тот факт, что теорема 5.1 справедлива в сферическом пространстве позволяет тривиальным образом распространить её на многогранники в евклидовых пространствах размерности большей трёх. Решающим обстоятельством тут является тот факт, что уже один выпуклый многогранный угол в четырёхмерном евклидовом пространстве с жёсткими гранями оказывается жёстким потому, что его сечение сферой с центром в его вершине представляет собой замкнутый выпуклый многогранник на трёхмерной сфере или, если угодно, в трёхмерном сферическом пространстве. А как упомянуто выше, такой многогранник — жёсткий.

Теорема 5.1 допускает механическую интерпретацию, в которой речь идёт не о многограннике, составленном из твёрдых граней, а о системе стержней, образующих совокупность рёбер выпуклого многогранника. При этом среди рёбер могут быть ненастоящие, проходяшие внутри истинных граней. Стержни мыслятся скреплёнными в концах на шарнирах. При этом теорема 5.1 эквивалентна следующему утверждению: *Система стержней, образующих совокупность рёбер замкнутого выпуклого многогранника, не может находиться под напряжениями без воздействия внешних сил* [6, Гл. X; §4].

Различным аспектам жёсткости выпуклых многогранников и стержневых систем посвящена обширная литература, см., напр., [37, 64, 124, 125, 134, 138]. Проективный вариант этой теоремы доказывался различными авторами начиная ещё с В. Бляшке [23, 132, 137, 139]. Теоремы жёсткости для стержневых систем специального вида, так называемых двудольных каркасов, изучены особенно детально, см., напр., [25, 89, 135]. По сути дела последние теоремы относятся в теории графов [88] и при их доказательстве зачастую используется теория матроидов [48, 140].

Интересное направление исследований представляет собой изучение жёсткости стержневых систем «находящихся в общем положении». При этом спрашивается можно ли в пространстве всех изучаемых стержневых систем указать открытое плотное множество, целиком состоящее из жёстких систем. С физической точки зрения такая постановка вопроса мотивируется потребностями стереохимии, то есть науки о пространственном строении молекул, и состоит в том, что мы знаем расстояния между молекулами в атоме лишь приближённо, с точностью до погрешности измерения, и можем интересоваться лишь жесткостью в общем положении [47, 48, 65].

Теоремы жёсткости для выпуклых многогранников и стержневых систем оказываются полезными в вопросах графического изображения многогранников [39] и исследовании жёсткости молекулярных структур, в особенности — протеинов [46, 56].

Перейдём к обсуждению следующей теоремы.

Теорема 5.2 *Пусть $\mathcal{P}$ — множество классов эквивалентности выпуклых многогранников в трёхмерном евклидовом пространстве, имеющих данное комбинаторное строение. Эквивалентными считаются многогранники, получающиеся друг из друга движением всего пространства или движением и отражением. Отображение f, сопоставляющее каждому классу многогранников из $\mathcal{P}$ длины всех его рёбер и величины всех плоских углов его граней, является инъективным.*

Другими словами теорему 5.2 формулируют так: *Выпуклые многогранники, одинаково составленные из равных граней, конгруэнтны, то есть совмещаются движением или движением и отражением всего пространства.*

Как недавно обнаружил И. Х. Сабитов [108], в качестве гипотезы эта теорема была сформулирована и даже доказана для некоторых классов выпуклых многогранников в 1-ом издании известного учебника А.-М. Лежандра [67, Note XII; p. 321–334]. По неизвестным причинам этот материал был исключён А.-М. Лежандром из всех многочисленных последующих изданий этого учебника.

Впервые теорема 5.2 была доказана в 1813 году Огюстеном Луи Коши [30]. Многие поколения геометров считали и считают доказательство О. Л. Коши образцом остроумия, значение которого не умалялось даже допущенными автором ошибками. Ошибки были замечены и исправлены значительно позже другими геометрами. Подробное обсуждение этой известной истории можно найти, например, в [108]. Само доказательство теоремы 5.2 доступно во многих книгах, см. напр., [1, 6, 22, 58, 68, 83]. Обсуждение тех или иных деталей доказательства теоремы 5.2 можно найти, напр., в статьях [35, 108, 115, 122].

Для полноты картины мы приведём в параграфе 8 основные идеи одного малоизвестного доказательства теоремы Коши 5.2, принадлежащего Ю. А. Волкову и А. В. Погорелову [93, 127]. Пользуясь случаем обратим внимание читателя и на ещё одно малоизвестное доказательство этой теоремы, принадлежащее В. А. Залгаллеру и Е. П. Сенькину [116, 143].

Ярким примером применения теоремы об обратной функции в теории многогранников служит теорема А. Д. Александрова о существовании выпуклого многогранника с данной метрикой [6, Гл. IV], к обсуждению которой мы и переходим.

Пусть $\mathcal{P}$ — множество классов эквивалентности выпуклых многогранников в трёхмерном евклидовом пространстве, причём к выпуклым многогранникам мы причисляем также дважды покрытые выпуклые многогранники. На этот раз комбинаторное строение многогранников не фиксировано, а эквивалентными считаются многогранники, получающиеся друг из друга движением всего пространства или движением и отражением.

Пусть $\mathcal{G}$ — множество классов эквивалентности римановых метрик g со следующими свойстами: (1) риманова метрика g определена на единичной сфере $\mathbf{S}^2$ всюду, за исключением некоторого конечного множества точек σ, называемого сингулярным множеством метрики g; (2) всюду в $\mathbf{S}^2 \setminus \sigma$ метрика g имеет кривизну, равную нулю; (3) в каждой точке множества σ сингулярная кривизна метрики g существует и неотрицательна.

Поясним свойство (3) подробнее. Попарно соединяя точки множества σ кратчайшими можно разбить сферу $\mathbf{S}^2$ на треугольники, каждый из которых изометричен некоторому треугольнику на евклидовой плоскости. При этом по определению угол при вершине геодезического треугольника принимается равным углу при соответствующей вершине изометричного ему евклидова треугольника, а сингулярной кривизной метрики g в точке множества σ называется число, равное 2π минус сумма углов всех геодезических треугольников, сходящихся в этой точке. Свойство (3) состоит в том, что эта величина должна быть неотрицательна.

Две метрики со свойствами (1)–(3) называются эквивалетными, если существует диффеоморфизм сферы $\mathbf{S}^2$ на себя, переводящий одну метрику в другую (и, в частности, переводящий сингулярное множество одной метрики в сингулярное множество другой и не изменяющий сингулярной кривизны метрики в точках сингулярного множества).

Всякая параметризация $\mathbf{S}^2 \to P$ выпуклого многогранника P, достаточно регулярная в пределах каждой грани, позволяет перенести на сферу метрику многогранника и, тем самым, построить на $\mathbf{S}^2$ метрику g со свойствами (1)–(3). Таким образом возникает естественное отображение $f : \mathcal{P} \to \mathcal{G}$.

Теорема 5.3 *Отображение f, сопоставляющее каждому классу многогранников из $\mathcal{P}$ соответствующий класс многогранных* *метрик из $\mathcal{G}$, является сюръективным.*

Другими словами теорему 5.3 формулируют так: *Всякая многогранная метрика положительной кривизны, заданная на сфере, реализуема посредством замкнутого выпуклого многогранника.* Первоначально эта теорема была доказана А. Д. Александровым в 1941 году в [3]. Подробные изложения доказательства этой теоремы можно найти, напр., в [4, 5, 6].

Теорема 5.3 была перенесена на многогранники пространства Лобачевского и сферического пространства [5]. Она послужила основой развитого А. Д. Александровым метода «разрезывания и склеивания», оказавшегося исключительно плодотворным при изучении негладких выпуклых двумерных поверхностей. Теорема существования, аналогичная теореме 5.3, была установлена и для произвольной выпуклой метрики [94].

Обычно теоремы существования, аналогичные теореме 5.3, доказываются с помощью теоремы об обратной функции (или с помощью «леммы об отображении», в терминологии А. Д. Александрова). Но известны два исключения, о которых необходимо упомянуть особо. Один метод доказательства теорем существования, аналогичных теореме 5.3, был предложен Л. А. Люстерником. Он кратко изложен Н. В. Ефимовым в его знаменитой статье [44] и сводится к решению некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. Другой оригинальный метод доказательства теорем такого сорта предложен Ю. А. Волковым. В нём задача сводится к нахождению минимума некоторого выпуклого функционала на пространстве трёхмерных развёрток. Кратко метод Ю. А. Волкова изложен в его статье [128], подробная же публикация [129] практически недоступна.

Теоремы существования, подобные теореме 5.3, были получены для выпуклых многогранников в пространстве Минковского У. Ильхамовым и Д. Д. Соколовым [55], и в пространстве де Ситтера Ж.-М. Шленкером [111].

В параграфе 9 обсуждаются основные этапы доказательства теоремы 5.3, основанного на «лемме А. Д. Александрова об отоюражении».

Важную роль в теории выпуклых многогранников вообще и в теории параллелоэдров в частности сыграла теорема Г. Минковского о существовании замкнутого выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней, см., напр., [6, 82].

Легко убедиться, что единичные векторы внешних нормалей $n_1, \dots, n_m$ и площади $f_1, \dots, f_m$ старшей размерности выпуклого многогранника с непустой внутренностью P евклидова пространства размерности $d \geq 2$ удовлетворяют следующим условиям:

(1) Векторы $n_1, \ldots, n_m$ не лежат в одной гиперплоскости.

(2) Все числа $f_1, \ldots, f_m$ положительны.

(3) $\sum_{j=1}^{m} f_j n_j = 0$ (см. лемму 10.9).

Теорема Минковского утверждает, что условия (1)–(3) не только необходимы, но и достаточны для существования выпуклого многогранника с данными нормалями $n_1, \ldots, n_m$ и данными площадями $f_1, \ldots, f_m$ граней старшей размерности, т. е. она утверждает, что *если данные единичные векторы $n_1, \ldots, n_m$ и данные числа $f_1, \ldots, f_m$ удовлетворяют условиям (1)–(3), то существует компактный выпуклый многогранник без края с внешними нормалями $n_1, \ldots, n_m$ и площадями $f_1, \ldots, f_m$ граней старшей размерности.*

Идея доказательства этой теоремы Г. Минковского состоит в следующем. Пусть фиксирован набор векторов $n_1, \ldots, n_m$, обладающих свойством (1). Обозначим через $\mathbf{B}$ множество упорядоченных совокупностей чисел $f_1, \ldots, f_m$, обладающих свойствами (2) и (3). Множество $\mathbf{B}$ трактуем как пересечение $(m-d)$-мерной плоскости в $\mathbf{R}^m$ с конусом, задаваемым в $\mathbf{R}^m$ неравенствами $f_j > 0$ $(j = 0, \ldots, m)$. Через $\mathbf{A}$ обозначим совокупность всех классов компактных выпуклых многогранников в $\mathbf{R}^d$, относя к одному классу многогранники, которые могут быть получены один из другого параллельным переносом. Заметим, что выпуклый многогранник в $\mathbf{R}^d$ с данными нормалями $n_1, \ldots, n_m$ к граням может быть задан набором своих опорных чисел $h_1, \ldots, h_m$, а параллельный перенос $\mathbf{R}^d$ задаётся d-мерным вектором. Поэтому множество $\mathbf{A}$ естественным образом превращается в $(m-d)$-мерное многообразие. При фиксированном наборе векторов $n_1, \ldots, n_m$ естественное отображение $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ сопоставляет многограннику, заданному своими опроными числами $h_1, \ldots, h_m$, набор площадей его граней $f_1, \ldots, f_m$. Теорема Г. Минковского эквивалентна сюъективности этого отображения.

В параграфе 10 доказана не только обсуждаемая теорема Г. Минковского, но и её обобщение на один класс невыпуклых многогранников.

Следующая группа классических теорем существования и единственности для многогранников, доказываемая, как правило, с помощью теоремы об обратной функции, является специфической для пространства Лобачевского или сферического пространства (в том смысле, что аналогичных утверждений для евклидова пространства быть не может). Речь идёт о так называемых теоремах Е. М. Андреева, гарантирующих существование и единственность выпуклого многогранника с заданными двугранными углами. Приведём одну из теорем такого рода в удобной для нас формулировке.

Пусть $\mathcal{P}$ — множество классов эквивалентности компактных выпуклых многогранников P в трёхмерном пространстве Лобачевского, имеющих данное комбинаторное строение и обладающих следующими свойствами:

(1) многогранник P имеет не менее пяти граней;

(2) каждый (внутренний) двугранный угол α многогранника P удовлетворяет неравенству $0 < \alpha \leq \pi/2$ (заметим, что из этого условия уже вытекает, что в каждой вершине многогранника P сходится ровно 3 ребра или, что то же самое, ровно три грани);

(3) если три ребра многогранника P сходятся в одной вершине, то соответствующие двугранные углы α_i, α_j и α_k удовлетворяют неравенству $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k > \pi$;

(4) если P содержит призматический 3-цикл, то то соответствующие двугранные углы α_i, α_j и α_k удовлетворяют неравенству $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k < \pi$ (напомним, что призматическим k-циклом называется циклически упорядоченный набор из k рёбер многогранника P таких, что (a) никакие два из этих рёбер не имеют общей вершины и (b) любые два соседних ребра принадлежат некоторой грани многогранника P, причём этой грани не принадлежит ни одно из остальных рёбер k-цикла);

(5) если P содержит призматический 4-цикл, то соответствующие двугранные углы α_i, α_j, α_k и α_l удовлетворяют неравенству $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k + \alpha_l < 2\pi$;

(6) если P содержит четырёхугольную грань, ограниченную рёбрами e_1, e_2, e_3 и e_4, записанными в циклическом порядке, то выполняются неравенства $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34} + \alpha_{41} < 3\pi$ и $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34} + \alpha_{41} < 3\pi$, где через α_i и α_{ij} обозначены двугранные углы многогранника P при рёбрах e_i и e_{ij} соответственно, а e_{ij} — это третье ребро многогранника P, инцидентное общей вершине рёбер e_i и e_j.

Эквивалентными считаются многогранники, получающиеся друг из друга движением всего пространства или движением и отражением.

Возникает естественное отображение f, сопоставляющее каждому классу многогранников из $\mathcal{P}$ величины всех его двугранных углов α_i.

Пусть, как обычно, f_1 — число рёбер у каждого из многогранников P, входящих в какой-то класс из $\mathcal{P}$. Подмножество евклидова пространства $\mathbf{R}^{f_1}$, состоящее из точек $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{f_1})$, удовлетвояющих неравенствам, перечисленным в условиях (2)–(6), обозначим через $\mathcal{A}$.

Теорема 5.4 *Отображение $f : \mathcal{P} \to \mathcal{A}$ является биекцией.*

Другими словами эта теорема, впервые доказанная Е.М. Андреевым в [16], утверждает, что *в трёхмерном пространстве Лобачевского компактные выпуклые многогранники, имеющие одинаковое комбинаторное строение и одинаковые двугранные углы, не превосходящие $\pi/2$, конгруэнтны.* Более того, она указывает точные пределы изменения двугранных углов выпуклых компактных остроугольных многогранников данного комбинаторного строения, то есть указывает нерасширяемое множество $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^{f_1}$ каждой точке которого соответствует (единственный) выпуклый многогранник с данными значениями двугранных углов.

Теорема 5.4 представляет собой не только интересное утверждение о геометрии трёхмерного пространства Лобачевского, но и является важным техническим средством в доказательстве теоремы Тёрстона о гиперболической гипотезе для трёхмерных многообразий Хакена, см., напр., [60]. Не удивительно, что теорема 5.4 обобщена в различных направлениях. Например, аналогичная теорема доказана для выпуклых многогранников конечного объёма в трёхмерном пространстве Лобачевского [17] и для полуидеальных выпуклых многогранников в трёхмерном пространстве Лобачевского [101], то есть таких многогранников, часть вершин которых является собственными точками пространства, а часть лежит на абсолюте.

Другие результаты, родственные теореме 5.4, читатель найдёт в работах Е. Д. Ходжсона, И. Ривина и У. Д. Смита [53], Е. Д. Ходжсона и И. Ривина [54, 98], И. Ривина [97], а также в работе К. Бао и Ф. Бонахона [21].

6 Жёсткость выпуклых многогранников

В этом разделе мы докажем следующую теорему

Теорема 6.1 *В трёхмерном евклидовом пространстве всякий замкнутый выпуклый многогранник с непустой внутренностью и жёсткими гранями является жёстким.*

Говоря о многограннике с жёсткими гранями мы имеем в виду, что к рассмотрению допускаются такие его бесконечно малые изгибания, которые порождаются движениями граней как твёрдых тел, но для каждой грани это движение может быть своим так, что a pripori смежным граням разрешено вращаться друг относительно друга вокруг общего ребра.

Доказательство теоремы 6.1. Не ограничивая общности достаточно рассмотреть только многогранники с треугольными гранями.

В самом деле, если многогранник P_0, имеющий n-угольную грань F, допускает нетривиальное бесконечно малое изгибание, то то же будет верно и для многогранника P_1, получающегося из P_0 заменой F боковыми гранями пирамиды с основаением F. Нужно только, во-первых, приписать точкам боковой поверхности пирамиды векторы скорости, соответствующие тому движению пирамиды как единого целого, которое порождает векторы скорости на основании пирамиды и, во-вторых, заметить, что выбирая пирамиды, у которых ортогональная проекция вершины попадает внутрь основания, а высота достаточно мала, мы получим в результате описанного преобразования опять выпуклый многогранник P_1.

Если многогранник P_1 имеет нетреугольную грань, то применим к нему ту же операцию. После конечного числа шагов мы придём к многограннику P_k, имеющему только треугольные грани, причём все вершины многогранника P_0 будут в то же время и вершинами многогранника P_k. На основании теоремы 6.1 для многогранников с треугольными гранями заключаем, что построенное нами бесконечно малое изгибание многогранника P_k порождено его движением как единого целого в пространстве. Поэтому векторы скорости всех вершин исходного многогранника P_0 порождены его движением как единого целого. Значит этим же движением порождается всё поле бесконечно малого изгибания многогранника P_0. Следовательно, это изгибание тривиально, а сам многогранник P_0 — жёсткий.

Таким образом из жесткости замкнутых выпуклых многогранников с треугольными гранями вытекает то же для всех вообще замкнутых выпуклых многогранников. Поэтому далее мы ограничиваемся рассмотрением только многогранников с треугольными гранями.

Для многогранников с треугольными гранями жёсткость граней вытекает из жёсткости рёбер, то есть из условия стационарности длин рёбер в момент $t = 0$.

Пусть $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{f_0}$ — радиус-векторы вершин многогранника P_0, причём $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, z_k)$ для всех $k = 1, \ldots, f_0$ (здесь, как обычно, f_0 — число вершин P_0). Пусть $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{f_0}$ — векторы скорости вершин многогранника P_0 при бесконечно малом изгибании, причём $\mathbf{v}_k = (u_k, v_k, w_k)$. Если вершины с номерами i и j соединены ребром многогранника P_0, то длина соответствующего ребра многогранника P_t равна $|(\mathbf{x}_i + t\mathbf{v}_i) - (\mathbf{x}_j + t\mathbf{v}_j)| = ((x_i - x_j + tu_i - tu_j)^2 + (y_i - y_j + tv_i - tv_j)^2 + (z_i - z_j + tw_i - tw_j)^2)^{1/2}$. При этом условие стационарности длины этого ребра при $t = 0$, т. е. условие жёсткости ребра, имеет вид

$$(x_i - x_j)(u_i - u_j) + (y_i - y_j)(v_i - v_j) + (z_i - z_j)(w_i - w_j) = 0. \quad (35)$$

Тем самым мы получили линейную алгебраическую систему уравнений (35) относительно переменных u_k, v_k, w_k $(k = 1, \ldots, f_0)$, которой удовлетворяет всякое бесконечно малое изгибание многогранника P_0. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что эта система обладает только тривиальными решениями, то есть только такими, которые порождаются движениями многогранника P_0 как единого целого.

Назовём какую-нибудь одну грань, её три ребра и её три вершины *граничными элементами*, а все остальные элементы многогранника P_0 — *внутренними*. Примем три граничные вершины за неподвижные, т. е. будем считать, что вектор скорости каждой из них равен нулю. Тем самым мы исключили созможность движения многогранника P_0 как твёрдого тела в пространстве и нам предстоит доказать, что система (35), в которую включены только уравнения, соответствующие внутренним рёбрам многогранника P_0, имеет только нулевое решение.

Пусть, как обычно, многогранник P_0 имеет f_1 рёбер. С учётом того, что все грани P_0 треугольные, P_0 имеет $2f_1/3$ граней и, в силу формулы Эйлера, $f_1/3 + 2$ вершин. Таким образом, система уравнений (35), записанная для внутренних рёбер, будет содержать $f_1 - 3$ уравнения, связывающих $3(f_1/3 - 1)$ координаты внутренних вершин. Следовательно, матрица однородной системы (35) является квадратной и условие жёсткости многогранника P_0 сводится к необращению в нуль определителя D матрицы M системы (35).

Ключевую роль в проводимом ниже анализе определителя D играет следующая теорема Лапласа, см., напр., [62].

Теорема 6.2 *Пусть в определителе d матрицы порядка n произвольно выбраны k строк (или k столбцов), $1 \le k \le n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения равна определителю d.*

Матрица M состоит из $f_1/3-1$ групп столбцов по три в каждой, соответствующих $f_1/3-1$ внутренним вершинам многогранника P_0. Каждый определитель третьего порядка матрицы, состоящей из такой тройки столбцов, либо содержит строку из нулей, либо представляет собой выражение вида

$$T_{ik'k''k'''} = \begin{vmatrix} x_i - x_{k'} & y_i - y_{k'} & z_i - z_{k'} \\ x_i - x_{k''} & y_i - y_{k''} & z_i - z_{k''} \\ x_i - x_{k'''} & y_i - y_{k'''} & z_i - z_{k'''} \end{vmatrix},$$

равное по абсолютной величине ушестерённому объёму тетраэдра с вершинами $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{k'}$, $\mathbf{x}_{k''}$ и $\mathbf{x}_{k'''}$. Разлагая определитель D по таким минорам, на основании теоремы Лапласа 6.2, получим для D выражение

$$D = \pm \sum_{\delta\in\Delta} (-1)^{\alpha(\delta)} \prod_{(i;k',k'',k''')\in\delta} T_{ik'k''k'''}, \tag{36}$$

которое образуется следующим образом.

Через δ в (36) обозначена произвольная совокупность наборов чисел $(i;k',k'',k''')$, обладающих следующими свойствами:

(a) Каждое из чисел набора $(i;k',k'',k''')$ пробегает множество номеров внутренних рёбер многогранника P_0, которых, как было показано выше, имеется f_1-3 штук.

(b) Если набор $(i;k',k'',k''')$ содержится в δ, то вершины $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{k'}$, $\mathbf{x}_{k''}$ и $\mathbf{x}_{k'''}$ являются внутренними вершинами многогранника P_0, а рёбра $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{k'}$, $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{k''}$, $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{k'''}$ — его внутренними рёбрами.

(c) Два набора $(i;k',k'',k''')$ и $(\bar{i};\overline{k}',\overline{k}'',\overline{k}''')$ считаются равными между собой, если у них совпадают первые элементы ($i=\bar{i}$) и совпадают множества, составленные из трёх оставшихся элементов (т. е. $\{k',k'',k'''\}=\{\overline{k}',\overline{k}'',\overline{k}'''\}$; другими словами — порядок, в котором встречаются три последние аргумента не существенен). Естественно, в множество δ включается только один из равных наборов.

(d) Для каждой внутренней вершины $\mathbf{x}_j$ многогранника P_0 найдётся набор $(i;k',k'',k''')\in\delta$ такой, что $i=j$.

(e) Для каждого внутреннего ребра $\mathbf{x}_p\mathbf{x}_q$ многогранника P_0 найдётся ровно один набор $(i;k',k'',k''') \in \delta$ такой, что $p=i$, а номер q совпадает с одним из номеров i, k', k'' или k'''.

Если не вдаваться в детали, то δ можно определить и короче: δ является таким распределением (без пропусков и повторений) внутренних рёбер многогранника P_0 на тройки, что в каждой тройке все три ребра сходятся в одной вершине и каждой внутренней вершине соответствует тройка рёбер, сходящихся именно в ней.

Через Δ в (36) обозначено множество всех возможных распределений δ. Например для тетраэдра каждое из множеств Δ и δ содержит всего один элемент; для октаэдра множество Δ содержит два элемента, а каждое из множеств δ содержит по три элемента.

Наконец, число $\alpha(\delta)$ в (36) равно числу транспозиций пар рёбер при переходе от некоторого фиксированного распределения $\delta_0 \in \Delta$ к данному распределению $\delta \in \Delta$.

Тогда $\prod\limits_{(i;k',k'',k''')\in\delta} T_{ik'k''k'''}$ в (36) равно произведению объёмов всех тетраэдров $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{k'}\mathbf{x}_{k''}\mathbf{x}_{k'''}$ в распределении δ, умноженных на 6 или -6 сообразно с ориентацией этих тетраэдров. Складывая все эти произведения, соответствующие всевозможным распределениям $\delta \in \Delta$, снабжённые указанным образом знаком, в соответствии с теоремой Лапласа 6.2, получим $\pm D$. Тем самым формула (36) доказана.

Теперь доказательство теоремы 6.1 может быть легко завершено на основе следующих лемм 6.3 и 6.4.

Лемма 6.3 *Для всякого трёхмерного замкнутого выпуклого многогранника с треугольными гранями множество Δ непусто.*

Другими словами лемма 6.3 утверждает, что для всякого выпуклого многогранника определитель D в формуле (36) не может обращаться в нуль из-за одного лишь распределения нулей в его матрице, или, что то же самое, число членов в сумме, представляющей D в формуле (36), отлично от нуля.

Лемма 6.4 *Для всякого трёхмерного замкнутого выпуклого многогранника с треугольными гранями сумма числа $\alpha(\delta)$ (т. е. числа транспозиций рёбер при переходе от некоторого фиксированного распределения $\delta_0 \in \Delta$ к данному распределению $\delta \in \Delta$) и числа перемен ориентации, претерпеваемых тетраэдрами $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{k'}\mathbf{x}_{k''}\mathbf{x}_{k'''}$ при этих транспозициях, является чётной.*

Из лемм 6.3 и 6.4, очевидно, вытекает, что определитель D в формуле (36) представляется в виде суммы отличных от нуля величин одного знака и поэтому сам отличен от нуля. Этим завершается доказательство теоремы 6.1.

Доказательство леммы 6.3. На самом деле лемма 6.3 носит топологический характер в том смысле, что она использует весьма немногие свойства графа, составленного из рёбер выпуклого многогранника. В этом смысле её можно было бы формулировать (и было бы удобнее доказывать) для планарных графов с треугольными гранями. Но мы предпочитаем не обременять читателя сменой терминологии. Наиболее дотошные читатели поймут, что теорема Е. Штейница 4.1 даёт нам такое право.

Прежде всего заметим, что у всякого замкнутого выпуклого многогранника P с треугольными гранями существует внутренняя вершина, в которой сходится 3, 4, или 5 его внутренних рёбер.

Если бы это было не так, то в каждой из его $f_1/3-1$ внутренних вершин сходилось бы не менее шести рёбер, а значит P имел бы не менее $6(f_1/3-1)/2=f_1-3$ внутренних рёбер. Но тогда полное количество рёбер многогранника P заведомо превосходило бы f_1, что противоречит определению f_1.

Далее мы будем поочерёдно брать вершину многогранника P, в которой сходится 3, 4, или 5 его внутренних рёбер и будем перестраивать многогранник P в окрестности этой вершины так, что полученный новый многогранник P' будет иметь на одну вершину меньше, чем P. При этом мы будем каждый раз прослеживать, что если на P' нужное распределение δ' имелось, то распределение δ с теми же свойствами может быть построено и на многограннике P. Тем самым мы будем сводить вопрос о существовании распределения δ к аналогичному вопросу для многогранника с меньшим числом вершин. В конце концов мы доберёмся до многогранника с наименьшим числом вершин, т. е. до тетраэдра. Но для тетраэдра распределение δ, очевидно, существует: нужно единственной внутренней вершине тетраэдра отнести все три пересекающиеся в этой вершине внутренние ребра тетраэдра.

Таким образом для завершения доказательства леммы 6.3 нам нужно научиться перестраивать в указанном выше смысле окрестность произвольной вершины многогранника P, в которой сходятся 3, 4 или 5 его внутренних рёбер.

Пусть в вершине A многогранника P сходятся ровно три его внутренних ребра AB, AC и AD. Удалим из многогранника P три треугольника ABC, ACD и ABD и заменим их одним треугольником BCD. Полученный в результате многогранник обозначим P'. Как и было обещано, он имеет на одну вершину меньше, чем многогранник P. Кроме того, если распределение δ' на P' существует, то его совсем легко превратить в распределение на P: достаточно отнести к вершине A все три сходящихся в ней ребра AB, AC и AD.

Если быть более пунктуальным, то δ получается из распределения δ' добавлением к последнему четвёрки $(i; k', k'', k''')$, где номер i соответствует вершине A, а номера k', k'' и k''' — вершинам B, C и D соответственно. Наглядно же такая перестройки изображена в верхней строке рис. 1, где каждое из рассматриваемых рёбер снабжено стрелкой, исходящей из той вершины, к которой это ребро отнесено.

Пусть теперь в вершине A многогранника P сходятся ровно четыре его внутренних ребра AB, AC, AD и AE. Поскольку любая пара вершин в многограннике соединяется самое большее одним ребром, то точка B отлична от D, точка C отлична от E. Кроме того, в силу своей выпуклости, многогранник P не может содержать в качестве своего ребра одновременнно и BD и CE. Пусть, например, CE не является ребром многогранника P.

Образуем из P новый многогранник P', заменяя четыре треугольника ABC, ACD, ADE и ABE, прилегающие к вершине A, двумя треугольниками BCE и CDE.

Выберем в P' граничный треугольник так, чтобы отрезок CE был в P' внутренним ребром. Это возможно, так как в P' имеются треугольники, отличные от BCE и CDE. Если теперь для многогранника P' существует требуемое распределение δ' и при этом распределении ребро CE отнесено, скажем, к вершине C, то для получения δ из δ' проделаем следующее: (i) оставим без изменения распределение рёбер, общих для многогранников P и P', (ii) относём рёбра AB, AE и AD к вершине A, и (iii) заменим ребро CE многогранника P' ребром AC многогранника P в тройке рёбер, отнесённых к вершине C.

Схематически такая перестройка изображена во второй строке рис. 1, где как и раньше каждое из рассматриваемых рёбер снабжено стрелкой, исходящей из той вершины, к которой это ребро отнесено.

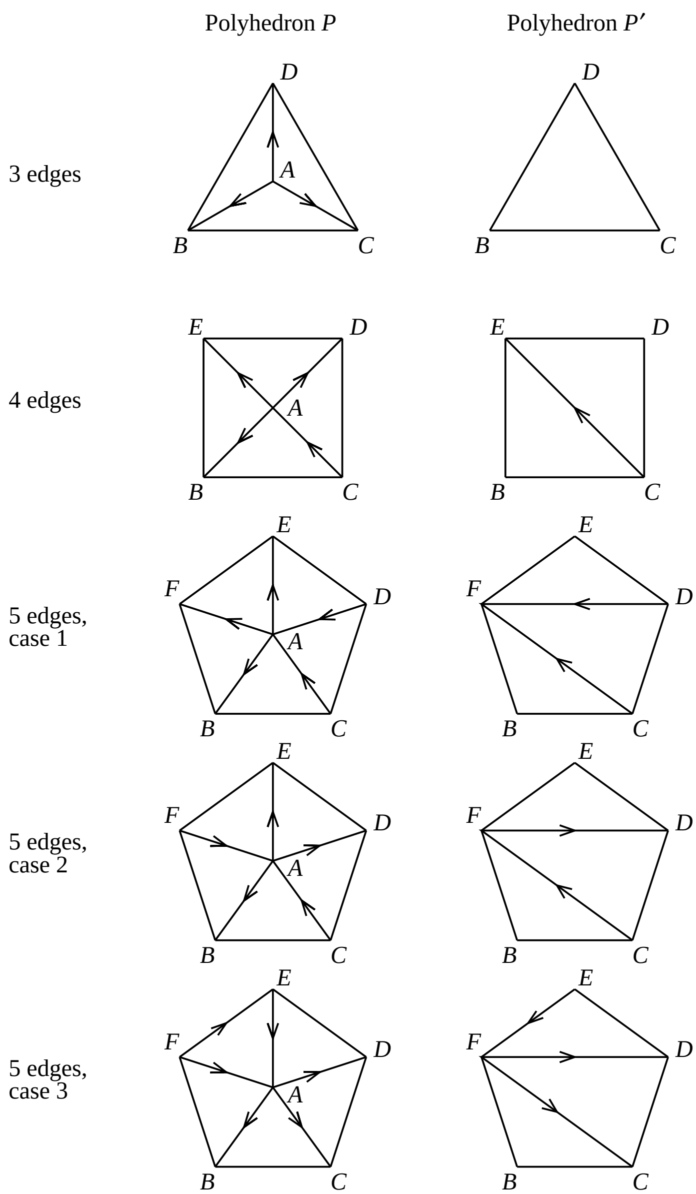
Polyhedron P
Polyhedron P'
3 edges
4 edges
5 edges, case 1
5 edges, case 2
5 edges, case 3
A
B
C
D
E
F

Рис. 1

Наконец, пусть теперь в вершине A многогранника P сходятся ровно пять его внутренних рёбер AB, AC, AD, AE и AF. Поскольку любая пара вершин в многограннике соединяется самое большее одним ребром, то все точки B, C, D, E и F различны между собой. Кроме того, существует самое большее одно ребро многогранника P, являющееся диагональю пятиугольника $BCDEF$. Мы можем поэтому принять что отрезки CF и DF не являются рёбрами многогранника P.

Образуем теперь P' из P, заменяя пять треугольников с вершиной A тремя треугольниками с вершиной F. Тогда если для P' существует распределение δ', то мы сможем получить из δ' распределение δ для P тремя различными путями, смотря по тому, к каким вершинам отнесены рёбра CF и DF. Все эти три случая изображены в строках 3–5 рис. 1, причём, как обычно, каждое из рассматриваемых рёбер снабжено стрелкой, исходящей от той вершины, к которой это ребро отнесено. Все другие возможности сводятся к одному из этих трёх случаев переменой обозначений, в том числе и подходящим переименованием точки F. Особо отметим, что в случае, соответствующем пятой строке рис. 1, ребро EF отнесено к вершине E на многограннике P' и к вершине F на многограннике P. Лемма 6.3 доказана.

Доказательство леммы 6.4 основано на том, что удаётся сконструировать процесс, при помощи которого можно перейти от какого-нибудь фиксированного распределения δ к любому другому и удаётся проследить, что на каждом шаге этого процесса сумма числа $\alpha(\delta)$, т. е. числа транспозиций рёбер, и числа перемен ориентации, претерпеваемых тетраэдрами $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{k'}\mathbf{x}_{k''}\mathbf{x}_{k'''}$ при этих транспозициях, является чётной, что и составляет утверждение леммы 6.4.

Этот процесс строится следующим образом. Пусть, скажем, при распределении δ_1 ребро $\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1$ относится к вершине $\mathbf{x}_0$, а ребро $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ — к $\mathbf{x}_1$, а при распределении δ_2, напротив, ребро $\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1$ относится к вершине $\mathbf{x}_1$, а ребро $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ — к $\mathbf{x}_2$. Тогда должно существовать ребро $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$, которое при распределении δ_1 относится к вершине $\mathbf{x}_2$, а при δ_2 — к $\mathbf{x}_3$.

Если принять во внимание конечность числа рёбер многогранника P, то, продолжая этот процесс, мы придём к замкнутой ломаной линии $\mathbf{x}_m\mathbf{x}_{m+1}\ldots\mathbf{x}_{m+n}\mathbf{x}_m$, такой, что при распределении δ_1 каждое ребро $\mathbf{x}_{m+i}\mathbf{x}_{m+i+1}$ будет отнесено к вершине $\mathbf{x}_{m+i}$, а при распределении δ_2, наоборот, — к вершине $\mathbf{x}_{m+i+1}$. Такую замкнутую ломаную линию, рёбра которой при некотором распределении δ отнесены к следующим за ними вершинам в циклическом порядке, называют *кольцом* распределения δ.

Можно показать, что от одного какого-нибудь распределения δ_1 можно перейти к любому другому распределению δ_2, обращая порядок следования в одном или нескольких кольцах δ_1. Более того, можно показать, что при обращении порядка следования в кольце сумма числа $\alpha(\delta)$, т. е. числа транспозиций рёбер, и числа перемен ориентации, претерпеваемых тетраэдрами $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{k'}\mathbf{x}_{k''}\mathbf{x}_{k'''}$ при этих транспозициях, является чётной. Подробности, связанные с доказательством леммы 6.4, читатель может найти, напр., в [42].

В заключение этого параграфа сформулируем некоторые теоремы жёсткости для невыпуклых многогранников в трёхмерном евклидовом пространстве, полученные Л. Родригесом и Г. Розенбергом в [99].

Пусть Σ обозначает симплициальный комплекс, гомеоморфный сфере или проективной плоскости. Говорят, что $M \subset \mathbf{R}^3$ является *многогранником, параметризованным с помощью* Σ, если M является образом Σ под действием непрерывного отображения f, которое является изометрией на каждой грани Σ, причём отраз каждой грани Σ под действием f является выпуклым многоугольником в $\mathbf{R}^3$. Более того, предполагается, что f или инъективно на звезде каждой вершины или имеет устойчивую особенность в v. Последнее означает, что с комбинаторной точки зрения достаточно малая окрестность вершины v в M является конусом над цифрой 8.

Говорят, что многогранник N, параметризованный с помощью Σ, ε-близок к многограннику M, если N является образом Σ под действием отображения $\widetilde{f}$ и, для каждой грани F комплекса Σ, хаусдорфово расстояние между множествами $f(F)$ и $\widetilde{f}(F)$ не превосходит ε.

Рассматриваемые в [99] многогранники M считаются оснащёнными единичными векторами нормалей к граням, в том смысле, что каждой грани F приписан единичный вектор n, ортогональный к этой грани (причём векторы такого оснащения на некоторых гранях могут быть «внутренними нормалями» к M, а на некоторых — «внешними нормалями»).

Далее для каждой вершины v многогранника M следующим образом строится её *гауссов образ* $g(v)$: если $F_1, \ldots, F_k$ — грани многогранника M, инцидентные вершине v, занумерованные в порядке, соответствующем какому-нибудь обходу вокруг вершины v, и если $n_1, \ldots, n_k$ — соответствующие этим граням векторы оснвщения M, то $g(v)$ — это сферический многоугольник на единичной сфере $\mathbf{S}^2$, образованный дугами кратчайших, соединяющих точки n_1, n_2; n_2, n_3; $\ldots n_k, n_1$.

В [99] доказана, например, следующая теорема:

Теорема 6.5 *Предположим, что оснащение многогранника M может быть выбрано так, что гауссов образ каждой вершины является выпуклым многоугольником на сфере $\mathbf{S}^2$. Тогда M является ε-жёстким, т. е. всякий многогранник N, имеющий то же комбинаторное строение, что и M, и ε-близкий к M, с необходимостью конгруэнден M.*

Отметим, что всякий выпуклый многогранник заведомо удовлетворяет условиям теоремы 6.5, поскольку в этом случае в качестве оснащения можно взять, например, векторы внешних нормалей к граням. В [99] показано, что теорема 6.5 применима к некторым невыпуклым многогранникам, а также доказаны различные (в том числе нелокальные) теоремы жёсткости для многогранников, в которых выпуклость многогранника заменяется тем или иным ограничением на гауссов образ вершин.

Результат, близкий к теореме 6.5, получен также Г. Ю. Паниной [87].

7 Существование изгибаемых многогранников

В этом параграфе мы докажем следующую теорему

Теорема 7.1 *В трёхмерном евклидовом пространстве существуют изгибаемые многогранники, гомеоморфные сфере.*

Все построенные предлагаемым ниже способом изгибаемые многогранники имеют самопересечения. Замкнутые изгибаемые многогранники с самопересечениями были построены Р. Брикаром [27] ещё в 1897 г. Устранить самопересечения удалось лишь в 1976 г. Р. Коннелли [32, 33]. Тогда же развернулось настоящее соревнование за построение подобного примера с наименьшим числом вершин, в которое были вовлечены, напр., П. Делинь и Н. Кёйпер. Наиболее изящный пример изгибаемого замкнутого многогранника без самопересечений был построен К. Штеффеном приблизительно в 1978 году. Он содержит всего девять вершин — на одну больше, чем у куба. Сам К. Штеффен ничего не опубликовал о своем многограннике, но его построение хорошо известно, см. напр., [13, 22, 107]. Мы воспроизведём его в конце этого параграфа.

В частной переписке К. Штеффен объяснил отсутствие его собственной публикации на эту тему тем, что он посчитал полученные им результаты не законченными, поскольку хотел не просто построить пример изгибаемого многогранника без самопересечений с девятью вершинами, но намеревался доказать, что не существует изгибаемого многогранника без самоперечений, гомеоморфного сфере и имеющего 8 или меньше вершин. Некоторое продвижение в этом направлении достигнуто в пока ещё не опубликованной статье И. Г. Максимова [72], где показано, что если многогранник P (i) имеет 8 вершин, (ii) не имеет самопересечений, и (iii) комбинаторное строение P отличается от комбинаторного строения одного явно указанного многогранника, то P не изгибаем.

Наиболее удивительное свойство изгибаемых многогранников было установлено И. Х. Сабитовым, опубликовавшим в 1996 году полное доказательство того, что любой изгибаемый многогранник (даже с самопересечениями) в $\mathbf{R}^3$ сохраняет ограничиваемый им (ориентированный) объём в процессе изгибания [104]. Последнее утверждение несколько десятилетий было известно как «гипотеза кузнечных мехов». Другие его доказательства даны в [36, 105, 106]. С ним можно познакомиться также по обзорной статье [112]. В трёхмерном сферическом пространстве заведомо существуют изгибаемые многогранники (с самопересечениями), не сохраняющие объём в процессе изгибания [11]. Положение дел в трёхмерном пространстве Лобачевского и многомерных евклидовых пространствах остаётся открытой проблемой.

Другое важное свойство изгибаемых многогранников установлено в евклидовых пространствах любой размерности ≥ 3. Оно состоит в том, что при бесконечно малом изгибании ориентируемого многогранника его полная средняя кривизна стационарна, откуда, конечно, вытекает, что в процессе изгибания полная средняя кривизна ориентируемого изгибаемого многогранника остаётся постоянной. (Напомним, что полной средней кривизной многогранника в $\mathbf{R}^n$ называется распространённая на все его $(n-2)$-мерные грани сумма произведений $(n-2)$-мерного объёма этой грани на дополнение до π величины внутреннего двугранного угла при этой грани.) Этот результат тесно связан с формулой Л. Шлефли. Впервые он был установлен Р. Александером [2], а затем передоказан многими авторами, и перенесён на гладкие гиперповерхности евклидовых пространств размерности ≥ 3, см., напр., [15, 113, 117, 118].

Перейдём непосредственно к построению изгибаемых многогранников в $\mathbf{R}^3$.

Лемма 7.2 *Пусть $P : \Sigma \to \mathbf{R}^3$ — строго выпуклый многогранник с треугольными гранями, гомеоморфный сфере и пусть Q — многогранный диск, полученый из P удалением двух смежных граней. Тогда Q — изгибаемый многогранник.*

Доказательство. Фиксируем треугольник $\Delta \subset \Sigma$ такой, что $P(\Delta) \subset Q$. Пусть комплекс Σ имеет v вершин (0-граней) $V_1, V_2, \ldots, V_v$ и пусть $V_{v-2}, V_{v-1}, V_v \in \Delta$. Предположим, что Σ имеет e рёбер (1-граней), причём рёбра, помеченные индексами $e-2$, $e-1$ и e лежат в Δ.

Рассмотрим семейство всех многогранников $\mathcal{P} : \Sigma \to \mathbf{R}^3$ таких, что $\mathcal{P}|_\Delta = P|_\Delta$. Это семейство зависит от $3v-9$ параметров, x_1, y_1, z_1, $\ldots$, x_{v-3}, y_{v-3}, z_{v-3}, где $(x_j, y_j, z_j) = \mathcal{P}(V_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, v-3)$ — координаты j-ой вершины $\mathcal{P}$.

Пусть вершины $\mathcal{P}(V_j)$ и $\mathcal{P}(V_k)$ $(j, k = 1, 2, \ldots, v-3)$ соединены ребром и пусть это ребро помечено индексом m $(m = 1, 2, \ldots, e-3)$. Определеим вспомогательнкю вещественно-значную функцию f_m с помощью формулы

$$f_m(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_{v-3}, y_{v-3}, z_{v-3}) = [(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 - (z_j - z_k)^2]/2.$$

Компоненты вектор-функции $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{e-3})$ представляют собой половины квадратов длин тех рёбер $\mathcal{P}$, которые не принадлежат $\mathcal{P}(\Delta)$.

Согласно формуле Эйлера $3v - e = 6$ и, следовательно, $e - 3 = 3(v-3)$. Это означает, что матрица Якоби отображения f является квадратной. Очевидно, её m-я строка имеет вид:

$$\begin{array}{llllllll} (0 & \ldots & 0 & x_j - x_k & y_j - y_k & z_k - z_j & 0 & \ldots \\ & \ldots & 0 & x_k - x_j & y_k - y_j & z_j - z_k & 0 & \ldots \quad 0). \end{array}$$

Эта матрица уже встречалась нам в предыдущем параграфе как матрица системы (35). Мы обозначали её через M и доказывали, что её определитель D отличен от нуля (см. доказательство теоремы 6.1).

Из того, что якобиан отображения f отличен от нуля в точке, соответствующей многограннику $P : \Sigma \to \mathbf{R}^3$, на основании теоремы 1.1 заключаем, что f гомеоморфно отображает некоторую окрестность U этой точки на ее образ $f(U)$.

Для любого t, достаточно близкого к нулю, существует точка $f^t = (f_1^t, f_2^t, \dots, f_{e-3}^t) \in f(U)$ со следующими свойствами:

α) f_m^t равняется сумме числа t и значения функции f_m в точке, соответствующей многограннику P, если m соответствует именно тому ребру комплекса Σ, которое является общим для тех треугольников, которые были удалены из P при построении Q, и

β) f_m^t равняется значению функции f_m в точке, соответстующей многограннику P, в противном случае.

Поскольку f является локальным гомеоморфизмом, то существует многогранник P_t^* такой, что f отображает точку окрестности U, соответствующую P_t^*, именно в точку f^t. Это означает, что сколь угодно близко к P существует многогранник P_t^*, который не конгруэтен P и все его рёбра, за исключением того, в котором сходятся две грани, удалённые при построении Q, имеют те же самые длины, что и соответствующие рёбра P. Удалив из P_t^* эти две грани, мы получим многогранник Q_t^*, который сколь угодно близок к Q, изометричен Q во внутренних метриках, но не конгруэнтен Q.

В [47] показано, что существование такого семейства многогранников Q_t^* влечёт существование семейства многогранников Q_t, которое аналитично по отношению к параметру t и которое удовлетворяет следующим условиям: i) $Q_0 = Q$; ii) длина каждого ребра многогранника Q_t не зависит от t; iii) существуют две вершины многогранника Q_t не является постоянным по t. Следовательно, семейство $\{Q_t\}$ является нетривиальным изгибанием многогранника Q. Лемма 7.2 доказана.

Пусть α обозначает прямую, а $\mathbf{x}$ — точку в $\mathbf{R}^3$, не лежащую на α. Проведём через $\mathbf{x}$ перпендикуляр $\alpha^\perp$ к α и обозначим точку пересечения прямых α и $\alpha^\perp$ через $\mathbf{y}$. Обозначим через $f_\alpha(\mathbf{x})$ такую точку, что $f_\alpha(\mathbf{x}) \in \alpha^\perp$ и $|f_\alpha(\mathbf{x}) - \mathbf{y}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |f_\alpha(\mathbf{x}) - \mathbf{x}|/2$. Возникающее при этом отображение $f_\alpha : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ называем *отражением* относительно прямой α в пространстве.

Очевидно, отражение относительно прямой α является изометрией пространства.

Ниже нам понадобится следующее утверждение, которое впервые было использовано в нужном нам контексте, по-видимому, Н. Кёйпером [63]:

Лемма 7.3 *Пусть $q_1q_2q_3q_4$ — пространственный четырёхугольник в $\mathbf{R}^3$, обладающий следующими свойствами (см. рис. 1):*

1) противоположные стороны четырёхугольника $q_1q_2q_3q_4$ попарно равны, т. е. $|q_1 - q_2| = |q_3 - q_4|$ и $|q_2 - q_3| = |q_4 - q_1|$;

2) средняя точка q_5 диагонали q_1q_3 не совпадает со средней точкой q_6 диагонали q_2q_4.

Тогда отражение относительно α, проходящей через точки q_5 и q_6, переводит четырёхугольник $q_1q_2q_3q_4$ в себя.

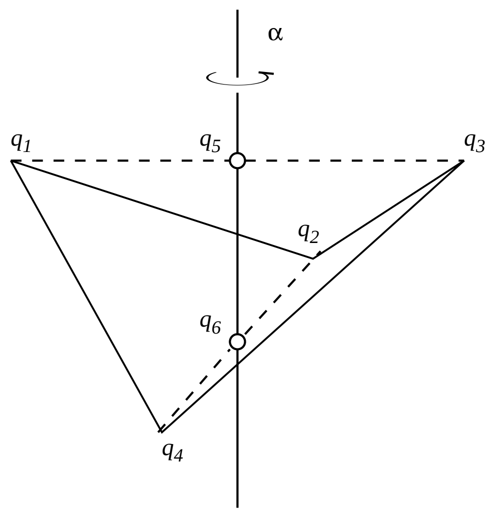

Рис. 1

Доказательство. Из условий леммы следует, что треугольники $q_1q_2q_3$ и $q_1q_3q_4$ имеют попарно равные стороны. Поэтому соответственные медианы треугольников $q_1q_2q_3$ и $q_1q_3q_4$ имеют равные длины: $|q_2 - q_5| = |q_4 - q_5|$. А значит треугольник $q_2q_4q_5$ является равнобедренным и отрезок q_5q_6 является не только медианой, но и высотой. Следовательно, прямая α ортогональна прямой q_2q_4 и отражение относительно α меняет точки q_2 и q_4 местами.

Аналогично, треугольники $q_1q_2q_4$ и $q_2q_3q_4$ имеют попарно равные стороны, их медианы q_1q_6 и q_3q_6 имеют равные длины, прямая α ортогональна прямой q_1q_3, а отражение относительно прямой α меняет местами точки q_1 и q_3.

В итоге мы получаем, что отражение относительно прямой α отображает четырёхугольник $q_1q_2q_3q_4$ на себя, что и завершает доказательство леммы 7.3.

Доказательство теоремы 7.1. Пусть Q — многогранный диск в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$, обладающий следующими свойствами:

A) Q получен из некоторого строго выпуклого многогранника P, гомеоморфного сфере посредством удаления двух смежных треугольных граней;

B) граница ∂Q многогранника Q является четырёхугольником, удовлетворяющим условиям леммы 7.3;

C) Q не симметричен относительно той прямой, относительно которой симметричен четырёхугольник ∂Q.

Из леммы 7.3 вытекает, что многогранник Q является изгибаемым. Пусть $\{Q_t\}$ $(0 \leq t \leq 1)$ обозначает нетривиальное изгибание многогранника Q. Используя лемму 7.3, заключаем, что для каждого t, граница ∂Q_t многогранника Q_t переходит в себя при отражении относительно некоторой прямой линии. Обозначим это отражение через R_t. Тогда $\{Q_t \cup R_t(Q_t)\}$ $(0 \leq t \leq 1)$ является нетривиальным изгибанием многогранника $Q \cup R_0(Q)$, гомеоморфного сфере. Теорема 7.1 доказана.

Приведённое выше доказательство теоремы 7.1, после очевидных изменений, позволяет строить изгибаемые многогранники, гомеоморфные сфере, в трёхмерном сферическом пространстве, а также трёхмерных пространствах Лобачевского и Минковского, см. [14].

Как и было обещано выше, завершим настоящий параграф построением изгибаемого многогранника К. Штеффена, которое мы дадим в виде рекомендаций по склеиванию модели из картона. Ключевую роль при этом будет играть некоторый вспомогательный многогранник, называемый октаэдром Брикара 1-го типа. Описание октаэдров Брикара других типов можно найти, напр., в [102].

Начертим на картоне фигуру, изображённую на рис. 2. Буквы a, b, c и d обозначают длины соответствующих сторон. Хорошо подходят значения $a = 12$, $b = 10$, $c = 5$ и $d = 11$. Вырежем нарисованную фигуру по сплошным линиям и согнём по штриховым. Два левых треугольника, имеющих стороны длины c, отогнём из плоскости рисунка на себя и склеим между собой вдоль стороны длины c. Два правых треугольника со сторонами длины c отогнём из плоскости рисунка от себя и приклеим их друг к другу вдоль стороны длины c. В результате получится невыпуклый незамкнутый многогранник P, изображённый на рис. 3. Сплошными линиями на этом рисунке изображены видимые рёбра многогранника P, а штриховыми — рёбра, заслонённые гранями P. Рёбра AE, ED, DF и AF составляют границу P — к каждому из них прилегает лишь по одной грани многогранника P.

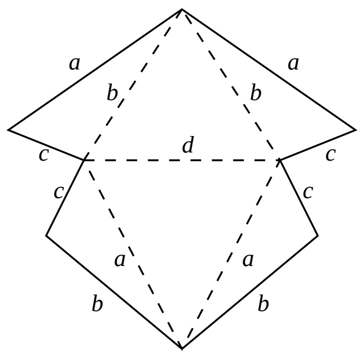

Рис. 2

Очевидно, что что многогранник P является изгибаемым: если треугольник BCE фиксировать в пространстве, то точку F можно двигать «вправо—влево» как показано стрелками на рис. 3. При этом положение точек A и D также будет меняться, но, что особенно важно для нас сейчас, *расстояние между точками A и D будет оставаться постоянным.*

Чтобы убедиться в этом, рассмотим двугранный угол S, одной гранью которого служит полуплоскость s_1, проходящая через точку B и ограниченная прямой EF, а другой гранью — полуплоскость s_2, проходящая через точку C и ограниченная прямой EF. Повернём полуплоскость s_1 вокруг прямой EF так, чтобы новая полуплоскость t_1 проходила через точку A. В соответствии с рис. 3 для этого надо повернуть s_1 «на себя» на величину двугранного угла тетраэдра $ABEF$ при ребре EF. Аналогично повернём полуплоскость s_2 вокруг прямой EF так, чтобы новая полуплоскость t_2 проходила через точку D. Следуя рис. 3, для этого надо повернуть s_2 «от себя» на величину двугранного угла тетраэдра $CDEF$ при ребре EF. Однако при любом положении точки F соответствующие стороны тетраэдров $ABEF$ и $CDEF$ равны между собой. Поэтому тетраэдры $ABEF$ и $CDEF$ конгруэнтны, в частности, равны между собой двугранные уноы этих тетраэдров при ребре EF. Значит, двугранный угол T, образованный полуплоскостями t_1 и t_2, равен двугранному углу S. Таким образом мы получаем, что в тетраэдрах $BCEF$ и $ADEF$ пять сторон попарно равны между собой ($BE = AF$, $BF = AE$, $CF = DE$, $CE = DF$ и EF — общая сторона) и, кроме того, равны между собой двугранные углы T и S, противолежащие шестой стороне, т. е. углы, противолежащие сторонам BC и AD соответственно. Следовательно, тетраэдры $BCEF$ и $ADEF$ равны между собой, а значит, $AD = BC = d$ для любого положения вершины F, как и утверждалось выше.

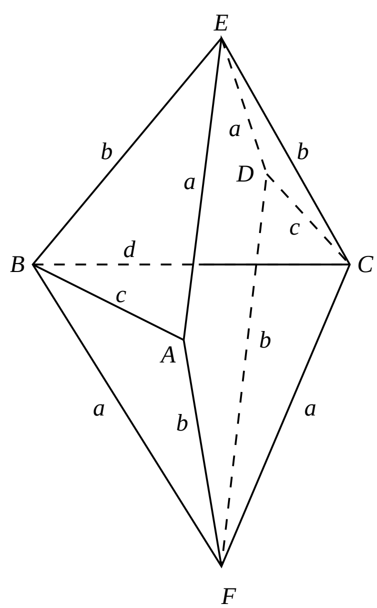

Рис. 3

Поскольку длина отрезка AD постоянна при всевозможных положениях вершины F, то к многограннику P можно мысленно приклеить два картонных треугольника ADE и ADF, причём получившаяся при этом многогранник Q будет по-прежнему изгибаемым. Это приклеивание, конечно, не может быть осуществлено реально: например, грани ADE и BCE пересекутся по линии, не являющейся ребром многогранника Q; при изгибании Q эта линия будет менять своё положение на каждой из граней ADE и BCE, чего невозможно добиться на картонной модели.

Многогранник Q — это и есть октаэдр Брикара 1-го типа. Как и обычный октаэдр, он имеет 6 вершин (A, B, C, D, E и E), 12 рёбер (AB, AD, AE, AF, BC, BE, BF, CD, CE, CF, DE и DF) и 8 граней (ABE, ABF, BCE, BCF, CDE, CDF, ADE и ADF). Понятно, что октаэдр Брикара является невыпуклым, изгибаемым и имеет самопересечения.

Изготовим две одинаковые копии P_1 и P_2 описанного выше многогранника P. Вершины многогранника P_1 обозначим теми же буквами, что и вершины многогранника P, снабжёнными индексом 1. Аналогично будем обозначать вершины P_2.

Начертим на картоне фигуру, состоящую из двух треугольников, как изображено в левой части рис. 4. Как и раньше, буквы a и e обозначают длины соответствующих сторон. К выбранному ранее значению $a = 12$ хорошо подходит $e = 17$. Вырежем нарисованную фигуру по сплошным линиям и согнём по пунктирной. Получившийся незамкнутый многогранник обозначим через R, см. правую часть рис. 4.

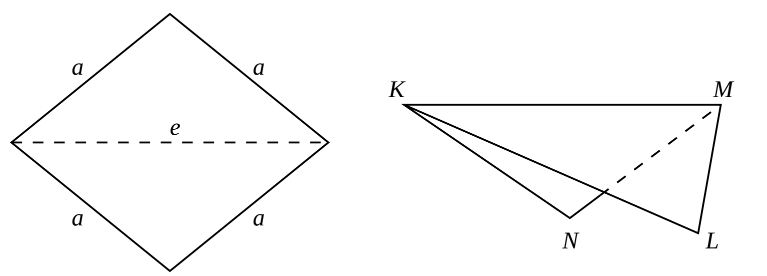

Рис. 4

Теперь всё готово для склеивания многогранника К. Штеффена.

Зафиксируем положение многогранника R а трёхмерном пространстве так, чтобы расстояние между точками L и N было равно d. Другими словами, в дальнейшем не будем менять величину двугранного угла многогранника R при ребре KM.

Совместим точки K и E_1, A_1 и L, D_1 и N и склеим многогранники P_1 и R вдоль рёбер A_1E_1 и KL, а также вдоль E_1D_1 и KN, см. рис. 5. Ясно что после такого приклеивания даже при фиксированной выше форме многогранника R точка F_1 допускает непрерывные движения (ведь фиксация расстояния между точками A и D не мешает изгибаниям октаэдра Брикара, частью которого является P_1). Более точно, точка F_1 может произвольно двигаться по окружности с центром в середине отрезка A_1D_1, лежащей в плоскости, перпендикулярной этому отрезку. При этом форма граней многогранников P_1 и R не изменяется, а меняются только некоторые их двугранные углы.

Аналогично совместим точки E_2 и M, D_2 и L, A_2 и N и склеим многогранники P_2 и Q вдоль рёбер A_2E_2 и MN, а также вдоль D_2E_2 и LM, см. рис. 5. Ясно, что точка F_2 может произвольно двигаться по той же окружности, что и точка F_1. Следовательно, придав произвольную форму многограннику P_1 (а значит, поместив F_1 в произвольную точку указанной выше окружности), можно так изогнуть P_2 (не меняя, конечно, размеров его граней, а изменяя только двугранные углы), чтобы точка F_2 совпала с F_1. Но тогда рёбра A_1F_1 и D_2F_2, а также D_1F_1 и A_2F_2 попарно совместятся друг с другом, и получится замкнутый многогранник, изгибаемость которого гарантируется произволом в выборе точки F_1 (или, что то же самое, совпадающей с ней точки F_2). Этот многогранник и называется *многогранником Штеффена*.

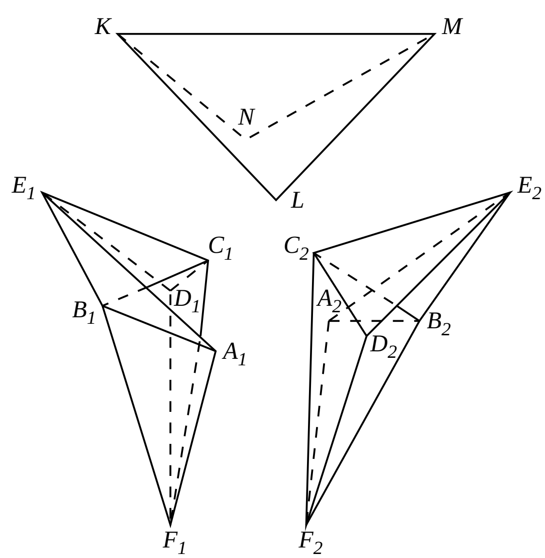

Рис. 5

На рис. 6 приведена удобная для склеивания развёртка вышеописанного многогранника Штеффена. Ей нужно придать такую форму в пространстве, чтобы двугранные углы (измеренные изнутри многогранника) при рёбрах, нарисованных пунктиром, были больше развёрнутого угла, а при рёбрах, нарисованных сплошной линией — меньше развёрнутого угла.

Элегантный пример изгибаемого октаэдра в четырёхмерном евклидовом пространстве построен в [131, Гл. 7]. Там же обсуждается остающаяся актуальной до сих пор проблема отсутствия примеров компактных изгибаемых многогранников без края в евклидовых пространствах размерности ≥ 5.

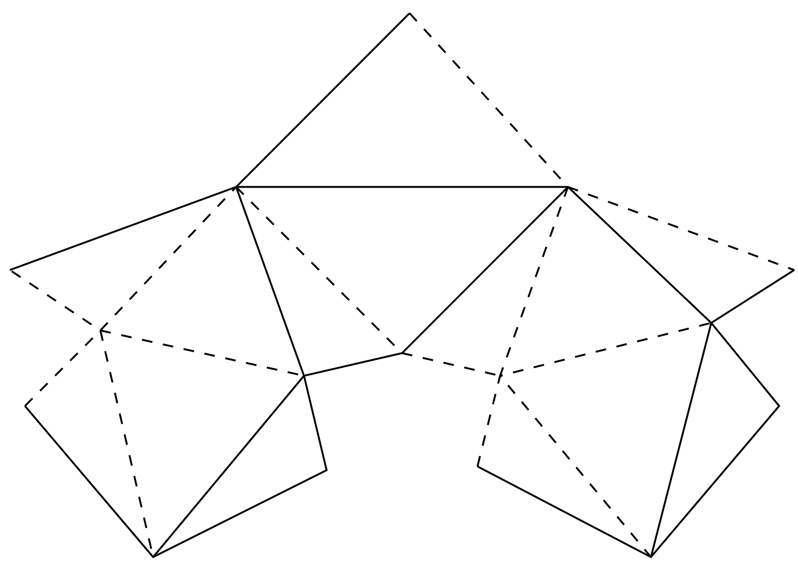

Рис. 6

Пример из [131, Гл. 7] обобщен в статье [121], где построена серия изгибаемых октаэдров в $\mathbf{R}^4$.

Не известно ни одного примера многомерного компактного изгибаемого многогранника без края, не имеющего самопересечений.

8 Единственность выпуклого многогранника с данной развёрткой

В этом параграфе мы наметим доказательство следующей теоремы, которая уже обсуждалась ранее, см. теорему 5.2:

Теорема 8.1 *Выпуклые многогранники, одинаково составленные из равных граней, конгруэнтны, то есть совмещаются движением или движением и отражением всего пространства.*

Обсуждаемое нами доказательство принадлежит А. В. Погорелову [93] и опирается на две леммы 8.2 и 8.3, первая из которых восходит к основополагающей работе О. Л. Коши [30], а вторая, по-видимому, принадлежит А. В. Погорелову, но мы приводим её доказательство, данное Ю. А. Волковым [127].

Лемма 8.2 *Если два выпуклых многогранных угла составлены из соответственно равных плоских углов, следующих друг за другом в одинаковом порядке, то либо эти многогранные углы равны, либо при обходе вокруг вершины разности величин их соответствующих двугранных углов меняют знак не менее четырёх раз.*

Доказательство леммы 8.2 входит практически во все книги, где рассматривается однозначная определённость выпуклых многогранников, см., напр., [6, 22, 68]. Поэтому мы его опустим, отсылая заинтересованного читателя к указанным книгам. Особо обратим внимание читателя на недавнюю статью И. Х. Сабитова [108], в которой дано принципиально новое аналитическое доказательство леммы 8.2 и детально изложена историческая интрига, связанная с этой леммой: в её доказательстве, данном О. Л. Коши, имеется существенный дефект, отмеченный и исправленный Е. Штейницем [122].

Лемма 8.3 *Пусть P и P' — изометричные выпуклые многогранные углы, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — единичные векторы, направленные по рёбрам угла P из его вершины, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — двугранные углы при этих рёбрах, а $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ — соответствующие двугранные углы P'. Пусть $\mathbf{r}$ — любой вектор, направленный из вершины P внутрь этого угла. Тогда*

$$\omega = \mathbf{r} \sum_k (\alpha_k - \alpha'_k)\mathbf{e}_k \geq 0,$$

причём равенство достигается только в том случае, если P и P' равны.

Другими словами лемму 8.3 формулируют так: *Если углы P и P' не равны, то вектор*

$$\mathbf{\Omega} = \sum_k (\alpha_k - \alpha'_k)\mathbf{e}_k$$

отличен от нуля и направлен внутрь сферического изображения угла P.

Заметим, что в лемме 8.3 рёбрами угла P называются не только собственно рёбра P, но и те полупрямые на его гранях, которые по изометрии соответствуют рёбрам угла P'.

Доказательство леммы 8.3 состоит в проверке того, что все векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ образуют с $\mathbf{\Omega}$ тупые углы, т. е.

$$\mathbf{\Omega}\mathbf{e}_k = \sum_j (\alpha'_j - \alpha_j)\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k = \sum_j (\alpha'_j - \alpha_j)\cos\gamma_{jk} < 0, \tag{37}$$

где γ_{jk} — угол между $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_k$. Для этой цели, считая многогранный угол P не конгруэнтным P', явным образом строят деформацию угла P, приближающую его к P и уменьшающую величину

$$\Phi_k = \sum_j (\alpha'_j - \alpha_j)\cos\gamma_{jk}.$$

С учётом непрерывности Φ_k, связности множества всех выпуклых многогранных углов и того, что $\Phi_k = 0$ при $P = P'$, это и означает, что $\Phi_k < 0$ для всех $P \neq P'$. Детали доказательства леммы 8.3 можно найти в [127].

Доказательство теоремы 8.1. Пусть Π и Π' — изометричные во внутренних метриках замкнутые выпуклые многогранники. Обозначим через P — произвольную вершину Π, через a — произвольное ребро (а также его длину) и через α — двугранный угол при этом ребре. Для многогранника Π' будем употреблять те же обозначения со штрихом. Возьмём внутри многогранника Π произвольную точку O и обозначим через $\mathbf{r}_P$ вектор с началом в O и концом в P. Составим выражения $\omega = \omega_P$ для многогранных углов P многогранника Π и векторов $\mathbf{r}_P$ и просуммируем по всем вершинам P. По лемме 8.3 получим

$$\sum_{(P)} \omega_P \geq 0.$$

Перейдём в левой части этого неравенства от суммирования по вершинам (P) к суммированию по рёбрам (a) многогранника Π. Получим

$$\sum_{(P)} \omega_P = -\sum_{(a)} a(\alpha - \alpha') = -\sum_{(a)} a\alpha + \sum_{(a')} a'\alpha' \geq 0.$$

(Здесь учтено, что длины соответствующих рёбер многогранников Π и Π' равны, т. е. что $a' = a$.)

Меняя, если нужно, ролями многогранники Π и Π', можно считать, что

$$\sum_{(a)} a\alpha \geq \sum_{(a')} a'\alpha'.$$

Тогда

$$\sum_{(P)} \omega_P = 0.$$

Однако по лемме 8.3 все слагаемые в последней сумме неотрицательны: $\omega_P \geq 0$. Следовательно, для всех многогранных углов P многогранника Π имеем $\omega_P = 0$. По лемме 8.3 это влечёт за собой равенство многогранных углов P и P'. А отсюда уже с очевидностью вытекает равенство самих многогранников Π и Π'. Теорема 8.1 доказана.

9 Существование выпуклого многогранника с данной развётркой

В этом параграфе мы наметим доказательство следующей теоремы, которая уже обсуждалась ранее, см. теорему 5.3:

Теорема 9.1 *Из всякой развёртки, гомеоморфной двумерной сфере и имеющей суммы углов в вершинах $\leq 2\pi$, можно склеить выпуклый многогранник.*

Обсуждаемое нами доказательство принадлежит А. Д. Александрову [6] и основано на «лемме об отображении» 3.3.

Интуитивное представление о развёртке многогранника имеет каждый, кто клеил многогранники из нарезанных из бумаги многоугольников: набор таких многоугольников с указанием правила склеивания их по сторонам и есть развёртка.

Точнее говоря, развёрткой мы называем совокупность конечного числа выпуклых многоугольников с указанным правилом «склеивания» их по сторонам. Под «склеиванием» двух отрезков понимается задание их взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения одного отрезка на другой, при котором соответственные точки отождествляюися, считаясь уже за одну точку развёртки. При этом считается, что правило склеивания удовлетворяет следующим требованиям:

(1) Если точка A отождествлена с B, а B — с C, то A отождествлена с C.

(2) Любые отождествляемые при склеивании отрезки сторон имеют равные длины.

(3) От каждого многоугольника к другому можно перейти, двигаясь по многоугольникам, имеющим склеенные стороны.

(4) Каждая сторона каждого многоугольника либо не склеивается ни с какой стороной, либо склеивается только с одной стороной.

Последнее условие означает, что при склеивании не должен получиться «ветвящийся многогранник» (рассмотрение последних выходит за рамки настоящей работы и мы ограничимся только одной ссылкой на статью [51], где они изучаются). Граница развёртки состоит из точек тех сторон, которые не склеены ни с какими другими сторонами. Стороны и вершины многоугольников развёртки мы называем рёбрами и вершинами развёртки, считая при этом отождествлённые стороны и вершины за одно ребро и одну вершину развёртки.

Выпуклый многогранник есть частный случай развёртки: он составлен из выпуклых многоугольников — граней, и отождествления в нём уже реализованы реальным склеиванием граней.

Говорят, что развёртка R' получена из развёртки R путём разрезывания и склеивания, если существует третья развёртка Q, которая получается и из R и из R' разрезанием составляющих их многоугольники на более мелкие.

Можно показать, что развёртка R' получена из развёртки R путём разрезывания и склеивания если и только если эти развёртки изометричны во внутренних метриках, т. е. если между точками развёрток R' и R может быть установлено соответствие, при котором внутренние расстояния между парами соответствующих точек равны [6, Гл. I, §6]. При этом за внутреннее расстояние между двумя точками развёртки принимается нижняя граница длин ломаных, соединяющих эти точки.

Говорят, что многогранник P *склеен* из развёртки R, если склеивания (отождествления) только указанные в развёртке, действительно осуществлены на многограннике. Точнее говоря, это означает, что многогранник допускает такое разбиение R' на куски — «многоугольники» Q', ограниченные линиями — «рёбрами», сходящимися в «вершинах» разбиения R', что выполнены два условия:

(1) Развёртка R и разбиение R' имеют одинаковое строение, т. е. каждому многоугольнику, ребру и вершине развёртки R отвечает «многоугольник», «ребро» и «вершина» разбиения R' так что при этом соответствии сохраняется отношение принадлежности (ребра — многоугольнику, вершины — ребру).

(2) Если «многоугольник» Q' из R' соответствует многоугольнику Q из R, то Q' можно развернуть на плоскость так, что он совпадёт с Q, причём его рёбра и вершины совпадут с соответственными рёбрами и вершинами многоугольника Q. Разворачивание на плоскость состоит в том, что те многоугольные куски граней многогранника P, из которых состоит данный «многоугольник» Q', раскладываются на плоскости и прикладываются друг к другу также, как они прилегали на многограннике. Условие, что Q' можно развернуть на плоскость, означает, что такое прикладывание его кусков действительно можно осуществить на плоскости.

Из данного определения склеивания многогранника из развёртки ясно, что многоугольники и рёбра развёртки могут вовсе не соответствовать граням и рёбрам многогранника. На рис. 1 представлены две развёртки правильного тетраэдра, в виде параллелограммов, разбитых на треугольники. Склеиваемые вершины обозначены одинаковыми буквами. В первом случае треугольники развёртки соответствуют граням тетраэдра, а во втором — нет. Обе развёртки имеют одинаковое строение.

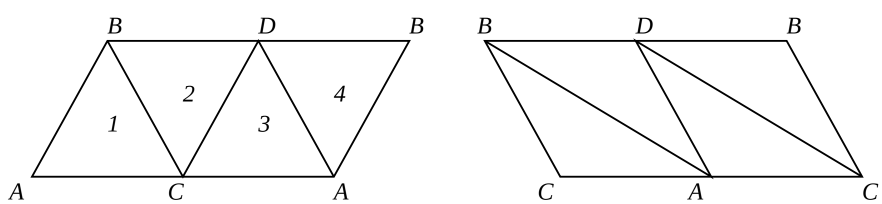

Рис. 1

Теорема 9.1 утверждает, что из всякой развёртки, гомеоморфной сфере и имеющей суммы углов в вершинах $\leq 2\pi$, можно склеить выпуклый многогранник, но она ничего не говорит о том, будут ли многоугольники развёртки соответствовать граням получившегося многогранника. Задача распознавания истинных граней многранника по его развёртке не решена до сих пор и представляется безнадёжно трудной.

Без ограничения общности всегда можно считать, что развёртка составлена из треугольников. Именно так мы и будем поступать в дальнейшем.

Обозначим через $\mathbf{M}$ множество всех (составленных из треугольников) развёрток данного строения K, каждая из которых гомеоморфна двумерной сфере и имеет сумму углов в каждой из своих вершин $< 2\pi$. (Можно показать, что всякую развёртку, гомеоморфную сфере и имеющую суммы углов в вершинах $\leq 2\pi$, т. е. такую, о которой идёт речь в теореме 9.1, можно заменить изометричной ей развёрткой из $\mathbf{M}$, см. [6, Гл. 4, §1, лемма 2].) Снабдим $\mathbf{M}$ структурой многообразия следующим образом.

Пусть развёртка данного строения K имеет k рёбер. Так как плоские треугольники, составляющие развёртку, однозначно определяются длинами своих сторон, то множество всех развёрток данного строения K изобразится в $\mathbf{R}^k$ в виде некоторой области $\mathbf{M}^0$. Единственные условия, которым должны удовлетворять длины рёбер, это «неравенства треугольника»: сумма длин каждых двух сторон треугольника должна быть больше длины третьей его стороны, т. е. $r_i + r_j > r_l$. (Положительность длин уже следует из этих неравенств: сложив неравенства $r_i + r_j > r_l$ и $r_i + r_l > r_j$ получим $2r_i + r_j + r_l > r_j + r_l$, откуда $r_i > 0$.) Эти неравенства — линейные, и поэтому каждое из них определяет некоторое полупространство в $\mathbf{R}^k$. Пересечение этих полупространств и образует область $\mathbf{M}^0$. Ясно, что эта область является внутренностью многогранного угла с вершиной в начале и заведомо не пуста. Чтобы убедиться в последнем достаточно приписать всем рёбрам одну и ту же длину: все неравенства треугольника удовлетворятся.

Совокупность развёрток данного строения K, каждая из которых имеет сумму углов в каждой из её вершин $< 2\pi$, изображается множеством $\mathbf{M}$, являющимся частью области $\mathbf{M}^0$.

Сумма $\sum_j \varphi_{ij}$ углов, сходящихся в вершине (i — номер вершины, j — номер угла при этой вершине), есть непрерывная функция длин рёбер. Множество $\mathbf{M}$ определяется неравенствами $\sum_j \varphi_{ij} < 2\pi$ (i пробегает все вершины) и, следовательно, представляет собой открытое множество в $\mathbf{R}^k$.

Могло бы оказаться, что множество $\mathbf{M}$ пусто. Но тогда теорема 9.1 была бы верна тривиальным образом: она ведь утверждает, что *если* имеется указанная в теореме развёртка, *то* из неё можно склеить выпуклый многогранник. Поэтому мы будем предполагать, что $\mathbf{M}$ не пусто и будем снабжать его структурой многообразия, наследуемой из объемлющего пространства $\mathbf{R}^k$. Очевидно размерность многообразия $\mathbf{M}$ равна k.

Определённая выше операция склеивания выпуклого многогранника из развёртки задаёт некоторое отображение развёртки на многогранник и тем самым — отображение на него комплекса K, задающего комбинаторное строение развёртки. Комплекс треугольников, получающихся при этом на многограннике, называется его *K-триангуляцией*, а сам многогранник при этом называется *K-триангулированным*.

Два K-триангулированных многогранника считаются равными, если существует движение всего пространства $\mathbf{R}^3$ или движение с отражением, приводящие в совпадение эти многогранники вместе с их K-триангуляциями. Таким образом все K-триангулированные многогранники распадаются на классы равных между собой. Множество этих классов превращается в многообразие, называемое «многообразием K-триангулированных многогранников» и обозначаемое через $\mathbf{P}$. Это делается следующим образом.

Фиксируем четыре вершины A, B, C и D комплекса K и, как всегда, будем предполагать, что в арифметическом пространстве $\mathbf{R}^3$ задана каноническая декартова система координат. Будем говорить, что K-триангулированный многогранник P находится в *каноническом расположении*, если точка многогранника P, соответствующая вершине A комплекса K, находится в начале координат; точка, соответствующая вершине B, находится на положительной полуоси первой координатной оси в $\mathbf{R}^3$; точка, соответствующая вершине C, находится на плоскости, проходящей через первую и вторую координатные оси, причём её вторая координата положительна; наконец, если многогранник P не является дважды покрытым выпуклым многоугольником, то у точки, соответствующей вершине D, третья координата положительна.

В каждом классе K-триангулированных многогранников есть в точности один многогранник, находящийся в каноническом расположении. В качестве базы окрестностей класса $\mathcal{P}$ в многообразии K-триангулированных многогранников $\mathbf{P}$ называется совокупность классов $\mathcal{Q} \in \mathbf{P}$, таких, что (a) хаусдорфово расстояние между многогранниками классов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, находящимися в каноническом расположении, не превосходит $\varepsilon > 0$ и (b) хаусдорфово расстояние между K-триангуляциями, «нарисованными» на $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, также не превосходит $\varepsilon > 0$.

Множество $\mathbf{P}$, снабжённое такой системой окрестностей, оказывается многообразием. В доказательстве этого факта существенную роль играет следующее утверждение, доказательство которого читатель может найти в [6, Гл. 4, §2, лемма 1].

Лемма 9.2 *Пусть на выпуклом многограннике P_0 имеется триангуляция K, каждый треугольник которой можно развернуть на плоскость. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что если вершины многогранника P удалены от вершин триангуляции K меньше, чем на ε (причём каждой вершине триангуляции K соответствует одна и только одна вершина многогранка P), то на P можно построить, и притом единственным образом, триангуляцию, близкую к K и имеющую то же строение.*

Пусть у комплекса K имеется v вершин, k рёбер и f граней. Тогда K-триангулированный многогранник P имеет v вершин (хотя некоторые из них могут оказаться ложными в том смысле, что сумма углов сходящихся в них треугольников равна 2π). В трёхмерном пространстве v точек задаются $3v$ координатами. Однако, если многогранник P находится в каноническом расположении, то некоторые из этих координат уже фоксированы, а именно — у вершины A все три координаты равны нулю, у B равны нулю вторая и третья координаты, а у C зануляется третья координата. Поэтому точка в многообразии $\mathbf{P}$ задаётся $(3v-6)$-ю координатами. Другими словами, размерность многообразия $\mathbf{P}$ равна $3v-6$.

Но из формулы Эйлера и того, что все грани комплекса K треугольные следует, что $v-k+f=2$ и $3f=2k$, а значит $3v-6=k$. Таким образом, размерности многообразий $\mathbf{M}$ и $\mathbf{P}$ совпадают!

Определим естественное отображение $f : \mathbf{P} \to \mathbf{M}$ сопоставляя каждому классу K-триангулированных многогранников ту самую развёртку строения K, которая «уже нарисована» на многогранниках из этого класса. Утверждение теоремы 9.1 эквивалентно тому, что f сюръективно. Последнее устанавливается индукцией по числу вершин у триангуляции K.

Базу индукции составляет утверждение теоремы 9.1 для комплексов K, имеющих всего три вершины. Несложные рассуждения показывают, что в этом случае любой K-триангулированный многогранник с необходимостью является дважды покрытым треугольником и любая метрика строения K действительно может быть реализована в виде дважды покрытого треугольника, см. [6, Гл. 4, §3].

Шаг индукции состоит в том, что утверждение теоремы 9.1 предполагается выполненным для всех комплексов, имеющих меньше вершин, чем заданный комплекс K и, с помощью леммы 3.3, при этом предположении доказывается, что отображение f сюръективно.

Взаимная однозначность f немедленно вытекает из теоремы единственности выпуклого многогранника с данной развёрткой 8.1. Тем самым свойство (2) леммы 3.3 выполнено.

Непрерывность отображения f непосредственно вытекает из определения окрестностей в многообразиях $\mathbf{M}$ и $\mathbf{P}$. Тем самым свойство (3) леммы 3.3 выполнено.

Свойство (4) леммы 3.3 составляет содержание следующей леммы, доказательство которой читатель может найти в [6, Гл. 4, §2, лемма 3].

Лемма 9.3 *Пусть последовательность $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n, \dots$ классов K-триангулированных многогранников из $\mathbf{P}$ такова, что последовательность их развёрток $R_1, \dots, R_n, \dots$ сходится к некоторой развёртке $R \in \mathbf{M}$. Тогда из последовательности $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n, \dots$ можно выделить подпоследовательность $\mathcal{P}_{n_1}, \dots, \mathcal{P}_{n_i}, \dots$ классов многогранников, сходящуюся в $\mathbf{P}$ к некоторому классу $\mathcal{P}$, т. е. такую подпоследовательность классов, для которых представляющие их многогранники, находящиеся в каноническом расположении, сходятся в метрике Хаусдорфа к находящемуся в каноническом расположении представителю класса $\mathcal{P}$ вместе с их K-триангуляциями.*

Остаётся проверить свойство (1) леммы 3.3, то есть доказать, что во всякой компоненте связности многообразия $\mathbf{M}$ имеются реализуемые развёртки. Для этого рассмотрим, как и выше, множество $\mathbf{M}^0$ всех развёрток строения K (а не только тех, у которых сумма углов треугольников, сходящихся в каждой вершине $< 2\pi$; именно последние и составляют множество $\mathbf{M}$).

Оказывается, что, поскольку комплекс K имеет более трёх вершин, то многообразие $\mathbf{M}$ имеет граничные точки в $\mathbf{M}^0$, причём эти граничные точки состоят из развёрток R, у которых суммы углов во всех вершинах $\leq 2\pi$ и в некоторых из них $= 2\pi$, см. [6, Гл. 4, §1, лемма 3]. Далее устанавливается, что каждая такая развёртка изометрична некоторой развёртке R_0 с меньшим, чем у R, числом вершин, причём сумма углов в каждой вершине $< 2\pi$, см. [6, Гл. 4, §1, лемма 2]. Более того, можно показать, что для любой компоненты связности $\mathbf{M}'$ многообразия $\mathbf{M}$ существует граничная точка R_0 компоненты связности $\mathbf{M}'$ и столь малая её окрестность U, что в U нет точек других компонент связности многообразия $\mathbf{M}$, см. [6, Гл. 4, §1, лемма 5].

По предположению индукции из развёртки R_0 можно склеить некоторый выпуклый многогранник P_0. Тем самым и из развёртки R удалось склеить выпуклый многогранник. Проблема заключается в том, что не все вершины развёртки R являются вершинами многогранника P_0, потому что при некоторых из них суммы углов равны 2π. Этим вершинам соответствуют на P_0 точки $A_1, \ldots, A_l$, лежащие внутри его рёбер или граней. Выдвинув эти точки наружу на достаточно малое расстояние, построим выпуклую оболочку совокупности этих смещённых точек и вершин многогранника P_0. Граница этой выпуклой оболочки будет выпуклым многогранником P с вершинами, близкими к вершинам развёртки R_0, «нарисованной» на P_0, причём точкам $A_1, \ldots, A_l$ будут соответствовать истинные вершины многогранника P. Согласно лемме 9.3 многогранник P допускает K-триангуляцию, близкую к развёртке R_0. Другими словами, многогранник P допускает развёртку R_1 строения K, близкую к развёртке R. Но теперь уже все вершины этой развёртки R_1 лежат в истинных вершинах многогранника P, а потому суммы углов во всех вершинах развёртки R_1 строго меньше 2π. Следовательно, развёртка R_1 принадлежит многообразию $\mathbf{M}$. А так как она близка к развёртке R и вблизи R нет иных развёрток из $\mathbf{M}$, кроме принадлежащих рассматриваемой связной компоненте $\mathbf{M}'$, то R_1 принадлежит этой связной компоненте. Но развёртка R_1 реализована многогранником P. Следовательно, в любой связной компоненте многообразия $\mathbf{M}$ имеются реализуемые развёртки.

Таким образом доказано, что все условия леммы 3.3 выполнены, и тем самым доказана теорема 9.1 о существовании выпуклого многогранника с данной развёрткой.

Замечание. Многомерные аналоги теоремы 9.1 не известны. Приведённая выше схема доказательства для них совершенно не годится, например, потому, что в многомерном случае многообразие развёрток $\mathbf{M}$ и многообразие многогранников $\mathbf{P}$ имеют разные размерности.

Поясним сказанное на примере четырёхмерных октаэдров.

Стандартным октаэдром в $\mathbf{R}^n$ называется выпуклая оболочка $2n$ точек, у каждой из котрых все координаты, кроме одной, равны нулю, а эта единственная отличная от нуля координата равна ± 1. *Октаэдром* называется всякий многогранник в $\mathbf{R}^n$, имеющий такое же комбинаторное строение, как и стандартный октаэдр.

Как известно, октаэдр в $\mathbf{R}^4$ имеет $f_0 = 8$ вершин, $f_1 = 24$ рёбер, $f_2 = 32$ двумерных граней и $f_3 = 16$ трёхмерных граней. Рассуждая как и выше убеждаемся, что многообразие $\mathbf{P}$ четырёхмерных октаэдров имеет размерность $4f_0 - (4+3+2+1) = 22$, а многообразие развёрток четырёхмерных октаэдров имеет размерность $f_1 = 24$. Несовпадение размерностей налицо.

10 Теоремы типа Г. Минковского и А. Д. Александрова для многогранных ежей

Г. Минковский установил, что (с точностью до параллельного переноса) выпуклый многогранник однозначно определяется заданием площадей граней и векторов единичных внешних нормалей к граням (см., напр., [6, 82]). Более того, Г. Минковский нашёл естественные и легко проверяемые условия, которым должно удовлетворять конечное число единичных векторов и положительных чисел для того, чтобы нашёлся выпуклый многогранник, для которого эти векторы и только они были бы внешними нормалями к граням, а эти числа были площадями граней.

В этом параграфе мы переносим эти результаты (также как и одно обобщение теоремы единственности Г. Минковского, принадлежащее А. Д. Александрову) на некоторый класс невыпуклых многограников. Характерная особенность этих (возможно имеющих даже самопересечения) многогранников в том, что они имеют инъективное сферическое отображение. Они называются многогранными ежами и ранее изучались, напр., в работах Дж. Стокера [123], Л. Родригеса и Г. Розенберга [99], и П. Ройтмана [100]. Родственным результатам посвящены также недавние статьи Г. Ю. Паниной [86, 87].

Теоремы Г. Минковского и А. Д. Александрова для выпуклых многогранников

В этом разделе мы уточняем необходимые нам понятия и приводим в удобной для нас форме классические теоремы Г. Минковского и А. Д. Александрова о существовании и единственности выпуклых многогранников с данными направлениями и площадями граней.

Пусть L —аффинное подпространство в $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$. В частности, допускается, что $L = \mathbf{R}^d$. В этом параграфе выпуклым многогранником в L мы называем выпуклую оболочку конечного числа точек из L при условии, что она имеет *непустую внутренность* в L. Выпуклый многогранник в двумерном пространстве L называем выпуклым многоугольником.

Для данного выпуклого многогранника P в $\mathbf{R}^d$ и данного единичного вектора $n \in \mathbf{R}^d$ найдём наименьшее вещественное число h такое, что для всякого $h' > h$ гиперплоскость $(x, n) = h'$ не пересекается с P. Здесь и далее в этом параграфе (x, n) обозначает скалярое произведение векторов x и n. Пересечение многогранника P и построенной таким образом гиперплоскости $(x, n) = h$ называется *гранью многогранника* P, имеющей внешнюю нормаль n, а сама гиперплоскость $(x, n) = h$ называется *опорной гиперплоскостью* многогранника P к данной грани. *Размерностью грани* называется размерность её линейной оболочки. Отметим, что при нашем понимании грани её размерность может быть любым целым числом от 0 до $d - 1$ включительно.

Пусть P_1 и P_2 — выпуклые многогранники в $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$, и пусть Q_1 — k-мерная грань многогранника P_1, $0 \leq k \leq d - 1$. Обозначим через n единичный вектор внешней нормали к Q_1, а через Q_2 — грань многогранника P_2, имеющую внешнюю нормаль n. При этом грань Q_2 называется *параллельной* грани Q_1.

Пусть L_j — аффинное подпространство в $\mathbf{R}^d$, $j = 1, 2$, и пусть Q_j — выпуклый многогранник в L_j. Говорят, что Q_1 *помещается внутри* Q_2 параллельным перенесением, если существует параллельный перенос $T : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ такой, что $T(Q_1)$ содержится в Q_2, но не совпадает с Q_2.

Следующая теорема доказана А. Д. Александровым в [6, Гл. 7, §3, теорема 1].

Теорема 10.1 *Пусть $d = 3$ и пусть P_1, P_2 — выпуклые многогранники в $\mathbf{R}^d$. Предположим, что каковы бы ни были две параллельные грани многогранников P_1 и P_2 такие, что хотя бы одна из них имеет размерность $d - 1$, ни одна из них не помещается внутри другой параллельным перенесением. Тогда многогранники P_1 и P_2 равны и параллельно расположены (т. е. получаются один из другого сдвигом всего пространства).*

Для $d = 2$ теорема 10.1 тривиальна, а, как отмечено в [6], для $d = 4$ — неверна. Контрпримером может служить куб в $\mathbf{R}^4$ с ребром длины 2 и прямоугольный параллелепипед с рёбрами длины 1, 1, 3 и 3, параллельными рёбрам куба. Ясно, что ни одна трёхмерная грань куба не может быть помещена внутри параллельной ей грани параллелепипеда параллельным перенесением, равно как и ни одна трёхмерная грань параллелепипеда не может быть помещена внутри параллельной ей грани куба параллельным перенесением. Вместе с тем ясно, что указанные куб и параллелепипед не равны между собой.

Для $d > 4$ аналогичным контрпримером в пространстве $\mathbf{R}^d = \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^{d-4}$ будет декартово произведение построенных выше четырёхмерных куба и параллелепипеда на $d - 4$ единичных отрезка.

Отметим, что в теореме 10.1 требуется ответить на вопрос «помещается ли грань одного многогранника с нормалью n внутри параллельной ей грани другого многогранника» лишь для конечного числа векторов n (а именно, лишь для векторов внешней нормали двумерных граней). Следующая теорема показывает, что если мы будем располагать правильным ответом на этот вопрос для всех векторов $n \in \mathbf{R}^d$, то заключение теоремы 10.1 будет верно во всех размерностях. Открытым остаётся вопрос о том, можно ли в теореме 10.2 ограничиться ответом на интересующий нас вопрос лишь для конечного числа векторов и какое наименьшее число векторов должно быть испытано.

Теорема 10.2 *Пусть $d \geq 2$ и пусть P_1, P_2 — выпуклые многогранники в $\mathbf{R}^d$. Предположим, что ни для какого единичного вектора $n \in \mathbf{R}^d$ грань одного из многогранников P_1 или P_2, имеющая внешнюю нормаль n, не помещается внутри параллельной ей грани другого из многогранников P_1 и P_2 параллельным перенесением. Тогда многогранники P_1 и P_2 равны и параллельно расположены.*

Доказательство. Фиксируем 0-мерную грань v многогранника P_1 и пусть n — единичный вектор внешней нормали к одной из опорных гиперплоскостей многогранника P_1, проходящих через v. Если бы грань многогранника P_2, имеющая внешнюю нормаль n, имела ненулевую размерность, то мы, конечно, смогли бы поместить внутри неё грань v (она ведь является точкой!) параллельным перенесением. Поскольку такое невозможно по условиям теоремы, то грань w многогранника P_2, имеющая внешнюю нормаль n, является нульмерной.

Совместим точки v и w параллельным переносом, обозначив образы многогранников P_1 и P_2 через $\widetilde{P_1}$ и $\widetilde{P_2}$ соответственно.

В виду произвола в выборе нормали n в предыдущих рассуждениях, из сказанного выше следует, что многогранники $\widetilde{P_1}$ и $\widetilde{P_2}$ обязаны совпадать в некоторой окрестности точки v. В частности, малый участок любой 1-мерной грани V многогранника $\widetilde{P_1}$, инцидентной v, должен содержаться в некоторой 1-мерной грани W многогранника $\widetilde{P_2}$. Если бы V и W имели разные длины, то мы бы поместили меньшую из них в большую параллельным перенесением. Поскольку по условиям теоремы это невозможно, то 1-мерные грани V и W совпадают, а значит у многогранников $\widetilde{P_1}$ и $\widetilde{P_2}$ есть по меньшей мере ещё одна (помимо v) общая 0-мерная грань. Обозначим её через $\widetilde{v}$.

Рассматривая, как и выше, все опорные гиперплоскости, проходящие через $\widetilde{v}$, убеждаемся, что многогранники $\widetilde{P_1}$ и $\widetilde{P_2}$ локально совпадают в некоторой окрестности точки $\widetilde{v}$, более того, все их 1-мерные грани, инцидентные $\widetilde{v}$, попарно совпадают между собой. Это даёт нам возможность найти ещё одну общую 0-мерную грань многогранников $\widetilde{P_1}$ и $\widetilde{P_2}$.

Продолжая подобным образом путешествовать по 0-мерным граням выпуклых многогранников $\widetilde{P_1}$ и $\widetilde{P_2}$, мы за конечное число шагов убедимся, что у этих многогранников все 0-мерные грани общие. Значит, многогранники $\widetilde{P_1}$ и $\widetilde{P_2}$ совпадают, а многогранники P_1 и P_2 получаются один из другого параллельным переносом. Теорема 10.2 доказана.

Напомним классическую теорему единственности, доказанную Г. Минковским (см., напр., [6, 82]):

Теорема 10.3 *Если $d \geq 2$ и два выпуклых многогранника в $\mathbf{R}^d$ таковы, что для всякой $(d-1)$-мерной грани каждого из них параллельная ей грань другого имеет ту же самую $(d-1)$-мерную меру, то эти многогранники равны и параллельно расположены.*

Теорема 10.3 тривиальна для $d = 2$ и является немедленным следствием теоремы 10.1 при $d = 3$. Однако для теоремы 10.3 известны также доказательства, не зависящие от теоремы 10.1 и справедливые для всех $d \geq 3$.

Следующее утверждение хорошо известно (и несложно доказывается): *если $d \geq 2$, P — выпуклый многогранник в $\mathbf{R}^d$, $n_1, \dots, n_m$ — единичные векторы внешних нормалей к $(d-1)$-мерным граням многогранника P и $f_1, \dots, f_m$ — $(d-1)$-мерные* *объёмы соответствующих граней, то*

$$\sum_{j=1}^{m} f_j n_j = 0. \tag{38}$$

Следующая теорема существования, доказанная Г. Минковским (см., напр., [6, 82]), показывает, что условие (38) является не только необходимым, но и достаточным для существования выпуклого многогранника с данными площадями и направлениями граней.

Теорема 10.4 *Пусть $d \geq 2$ и пусть $n_1, \dots, n_m$ — единичные векторы в $\mathbf{R}^d$, не лежащие в одном замкнутом полупространстве. Пусть ещё $f_1, \dots, f_m$ — положительные вещественные числа такие, что выполнено условие (38). Тогда существует выпуклый многогранник в $\mathbf{R}^d$, для которого векторы $n_1, \dots, n_m$ (и только они) являются единичными векторами внешних нормалей к его $(d-1)$-мерным граням, а $(d-1)$-мерные объёмы этих граней равны $f_1, \dots, f_m$ соответственно.*

В этом параграфе мы покажем, как теоремы 10.1, 10.3 и 10.4 могут быть перенесены на некоторый класс невыпуклых многогранников.

Многогранные ежи

Приступим к определению тех невыпуклых многогранников в $\mathbf{R}^3$, на которые мы распространим теоремы 10.1, 10.3 и 10.4.

В этом параграфе *многогранной поверхностью* в $\mathbf{R}^3$ мы называем образ клеточного комплекса, гомеоморфного двумерной сфере, под действием непрерывного отображения этого комплекса в $\mathbf{R}^3$ такого, что каждая k-мерная клетка этого комплекса отображается в выпуклый k-мерный многогранник в $\mathbf{R}^3$, $k = 0, 1, 2$. При этом образ 2-мерной клетки называем *гранью* многогранной поверхности, образ 1-мерной клетки — её *ребром*, а образ 0-мерной клетки — *вершиной*.

Так понимаемая многогранная поверхность вовсе не обязана быть границей выпуклого многогранника в $\mathbf{R}^3$, может иметь довольно сложные самопересечения, но всегда является ориентируемой.

Многогранным ежом в $\mathbf{R}^3$ называется многогранная поверхность P в $\mathbf{R}^3$, каждая грань Q_j которой оснащена единичным вектором n_j, перпендикулярным к Q_j, таким образом, что если грани Q_j и Q_k имеют общее ребро, то $n_j + n_k \neq 0$, а значит концы векторов n_j и n_k могут быть соединены на единичной сфере $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ единственной кратчайшей. Обозначив эту кратчайшую через l_{jk}, потребуем дополнительно чтобы при любых значениях индексов j и k, соответствующих смежным граням, две дуги вида l_{jk} либо не пересекались, либо имели один общий конец. Потребуем, наконец, чтобы объединение всех дуг l_{jk} образовывало разбиение сферы $\mathbf{S}^2$ на выпуклые многоугольники.

Набор векторов $n_1, \ldots, n_m$, участвующих в данном определении, будем называть *оснащением* данного ежа, а сам многогранный ёж будем обозначать через $(P; n_1, \ldots, n_m)$. Выпуклый сферический многоугольник из построенного в этом определении разбиения сферы $\mathbf{S}^2$ называется *сферическим образом* соответствующей вершины.

Например, граница всякого выпуклого многогранника в $\mathbf{R}^3$, оснащённая, скажем, внешними нормалями к 2-мерным граням, является многогранным ежом.

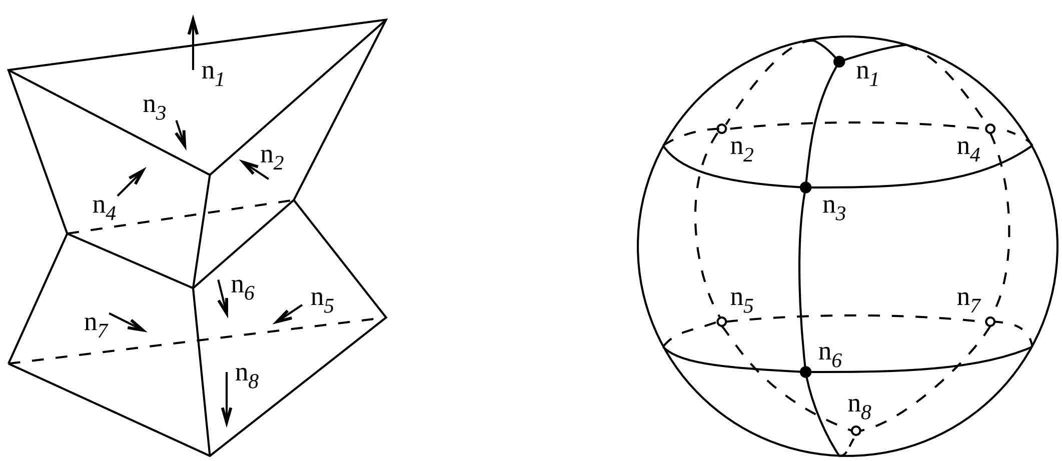

Рис. 1

Более сложный пример ежа может быть получен следующим образом. Рассмотрим правильный тетраэдр Δ в $\mathbf{R}^3$, отсечём от Δ

меньший тетраэдр плоскостью τ, параллельной одной из граней Δ и рассмотрим объединение оставшегося усеченного тетраэдра с его симметричным образом относительно плоскости τ. Невыпуклую многогранную поверхность, являющуюся границей этого объединения, обозначим через P (см. рис. 1). Оснастив грани P, параллельные τ, внешними нормалями, а все остальные грани — внутренними, мы превратим P в многогранного ежа. На рис. 1 изображено также разбиение сферы $\mathbf{S}^2$, соответствующее этому ежу.

Отметим, что несмотря на громоздкость определения, многогранные ежи служат довольно естественным обобщением выпуклых многогранников.

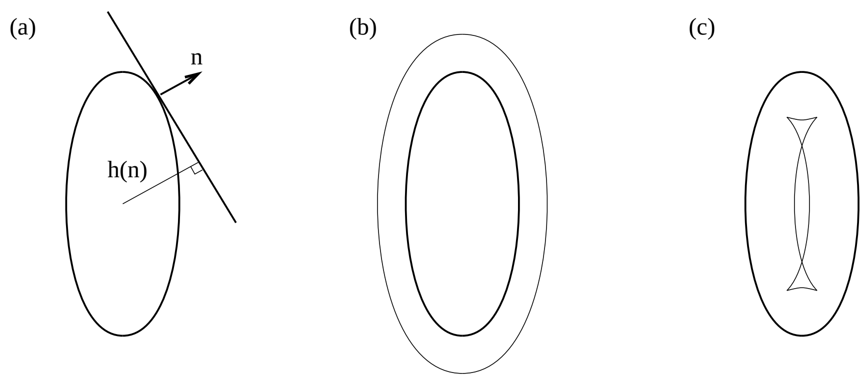

Рис. 2

Чтобы прояснить это обстоятельство, заметим, что всякая C^∞-гладкая выпуклая поверхность S в $\mathbf{R}^d$, гомеоморфная сфере $\mathbf{S}^{d-1}$, может рассматриваться как огибающая своих опорных гиперплоскостей $(x, n) = h(n)$, $n \in \mathbf{S}^{d-1}$ (см. рис. 2a). При этом h является C^∞-гладкой функцией на сфере $\mathbf{S}^{d-1}$. Для постоянного числа t, можно надеяться, что C^∞-функция $\mathbf{S}^{d-1} \ni n \mapsto h(n) + t$ является опорной функцией некоторой поверхности S_t, которую называют *параллельной* поверхности S. Гладкость и строение S_t существенно зависят от знака t, т. е. от того, строим ли мы параллельную поверхность внутри или снаружи от S (см. рис. 2b и 2c). Может случиться и так, что огибающая C^∞-гладкого семейства гиперплоскостей $(x, n) = h(n) + t$, $n \in \mathbf{S}^{d-1}$, не является ни выпуклой, ни регулярной гиперповерхностью.

В [66] начато изучение именно таких не обязательно выпуклых и не обязательно регулярных поверхностей, допускающих C^∞-параметризацию с помощью единичной сферы. В определённом смысле эти поверхности имеют взаимно однозначное гауссово отображение, что и оправдывает их название «ежи»: в каждую сторону торчит иголка, причём ровно одна. В [66] приведены примеры того, как ежи возникают в теории минимальных поверхностей, алгебраических гиперповерхностей, сингулярностей волновых фронтов и т. п. В работах [73]–[80] показано, что понятие ежа оказывается полезным в разнообразных вопросах выпуклой геометрии.

Собственно многогранные ежи появились в статье [99], где установлено несколько теорем, аналогичных классической теореме Коши об однозначной определённости выпуклого многогранника его внутренней метрикой [6], [30]. Г. Ю. Паниной установлено, что многогранный ёж является частным случаем более общего и более алгебраизованного объекта, называемого виртуальным многогранником. Последний можно трактовать как разность Минковского двух выпуклых многогранников и который естественно возник в алгебре политопов (см. [81], [84] и [96]). Другое (более геометрическое) обобщение понятия многогранного ежа дано в диссертации П. Ройтмана [100].

Дадим ещё несколько определений. Пусть $(P; n_1, \ldots, n_m)$ — многогранный ёж в $\mathbf{R}^3$ и пусть набор единичных нормалей $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ к граням многогранной поверхности P задаёт некоторую ориентацию P. Для каждого $j = 1, \ldots, m$, положим $\varepsilon_j = (n_j, \nu_j)$. Будем говорить, что грань G_j *положительна*, если $\varepsilon_j = +1$ и — *отрицательна*, если $\varepsilon_j = -1$. *Ориентированной площадью* грани G_j называем произведение неотрицательного числа, равного площади выпуклого многоугольника G_j, на ε_j.

Пусть теперь нам даны два многогранных ежа в $\mathbf{R}^3$. Их грани, оснащённые одинаковыми нормалями n_j, называются *параллельными.* Сами ежи называются *параллельными и одинаково ориентированными*, если выполнены следующие условия: (i) их оснащения совпадают; (ii) порождённые ими разбиения сферы совпадают; (iii) их параллельные грани положительны или отрицательны одновременно.

Наконец, мы говорим, что два многогранных ежа *равны и па-*

раллельно расположены, если один из них получается (вместе со своим оснащением) из другого параллельным переносом.

Заметим, что в приведённом выше определении условия (i)–(iii) являются независимыми.

В самом деле, выпуклые многогранные поверхности, изображённые на рис. 3 и оснащённые векторами внешних нормалей, дают пример многогранных ежей с одинаковыми оснащениями, но разными разбиениями сферы, порождёнными этими оснащениями. Поэтому из (i) не вытекает (ii).

Если же мы возьмём произвольный многогранный ёж и изменим на противоположную ориентацию соответствующей ему многогранной поверхности (не изменяя при этом оснащения), то полученная пара ежей обладает свойствами (i) и (ii), но не обладает свойством (iii).

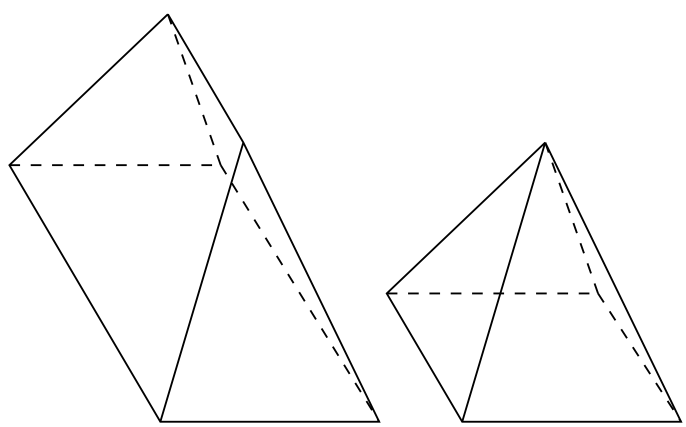

Рис. 3

Теоремы единственности для многогранных ежей

Теорема 10.5 *Пусть два параллельных и одинаково ориентированных многогранных ежа в* $\mathbf{R}^3$ *таковы, что не существует их параллельных граней, одна из которых может быть помещена* *внутри другой параллельным перенесением. Тогда эти ежи равны и параллельно расположены.*

Теорема 10.5 является аналогом теоремы 10.1, хотя и не содержит её в себе как частный случай (там допускается, что одна из параллельных граней имеет размерность меньше двух). Более того, приводимое ниже доказательство теоремы 10.5 аналогично доказательству теоремы 10.1, приведённому в [6]. Оба эти доказательства опираются на леммы 10.6 и 10.7, которые доказаны, соответственно, О. Л. Коши и А. Д. Александровым. Мы приводим их ниже без доказательств, отсылая читателя за последними к соответствующим местам книги [6].

Лемма 10.6 *Пусть нам дан клеточный комплекс, гомеоморфный сфере, и такой, что ни одна его двумерная клетка не ограничена только двумя рёбрами. Пусть каждому ребру произвольным образом приписано число* $+1$, 0 *или* -1, *а с каждой вершиной связан индекс* j, *равный числу перемен знаков ребер от* $+1$ *к* -1 *и от* -1 *к* $+1$, *подсчитанному при одном обходе вокруг этой вершины в некотором направлении (при этом рёбра, отмеченные нулём, просто игнорируются). Утверждается, что либо все рёбра отмечены числом* 0, *либо среди вершин, к которым подходит хоть одно ребро, отмеченное числом* $+1$ *или* -1, *найдётся такая, индекс* j *которой меньше или равен двух.*

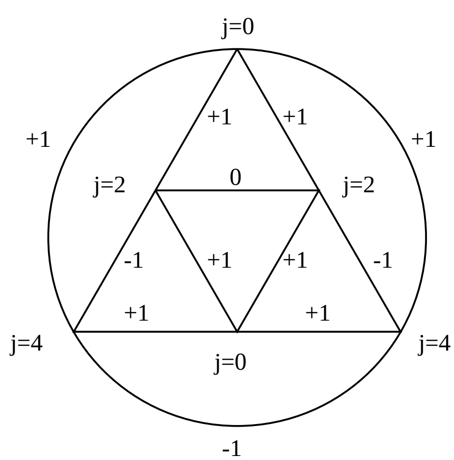

Рис. 4

Для иллюстрации см. рис. 4, где числами $+1$, 0 и -1 размечены рёбра клеточного комплекса, изоморфного поверхности тетраэдра и, для каждой вершины, указан индекс j.

Лемма 10.7 *Пусть два выпуклых многоугольника таковы, что ни один из них нельзя поместить в другом параллельным перенесением. Разметим вершины и рёбра этих многоугольников числами $+1$, 0 или -1 следующим образом: Если вершина одного многоугольника такова, что, при любом выборе внешней нормали к многоугольнику в этой точке, параллельной ей гранью другого многоугольника является вершина, то обеим вершинам сопоставим значение 0. Если вершина одного многоугольника такова, что, при некотором выборе внешней нормали к многоугольнику в этой точке, параллельная ей грань другого многоугольника является ребром, то этой вершине сопоставим значение -1, а этому ребру — значение $+1$. Если ребро многоугольника таково, что параллельной ему гранью другого многоугольника является вершина, то этому ребру сопоставим значение $+1$, а этой вершине — значение -1. Наконец, если ребро многоугольника таково, что параллельной ему гранью другого многоугольника является снова ребро, то более длинному из этих рёбер сопоставим значение $+1$, а более короткому — значение -1; если же рёбра имеют одинаковую длину, то обоим сопоставим значение 0. Сопоставим, далее, каждому многоугольнику индекс i, равный числу перемен знаков рёбер и вершин от $+1$ к -1 и от -1 к $+1$, подсчитанному при однократном обходе вокруг этого многоугольника (при этом вершины и рёбра, отмеченные нулем, просто игнорируются). Утверждается, что либо многоугольники равны и параллельно расположены (а значит их индекс i равен нулю), либо индекс i каждого из этих многоугольников больше или равен 4.*

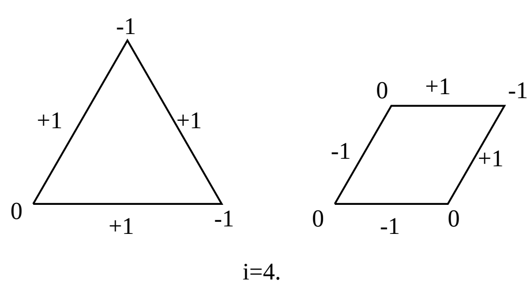

Рис. 5

Для иллюстрации см. рис. 5.

Доказательство теоремы 10.5. Разметим рёбра данных нам параллельных и одинаково ориентированных многогранных ежей числами $+1$, 0 или -1, применяя правило, описанное в лемме 10.7, к каждой паре параллельных граней. Поскольку ежи параллельны и одинаково ориентированы, то параллельные грани имеют, кроме всего прочего, параллельные рёбра. Поэтому в нашем случае вершины всегда будут отмечены числом 0. По лемме 10.7 возможно одно из двух: либо данные параллельные грани равны и, следовательно, все их рёбра отмечены числом 0, либо некоторые из рёбер этих граней отмечены числами $+1$ или -1 и в этом случае индекс i каждой из этих граней больше или равен 4.

Перенесём построенные таким образом распределения чисел $+1$, 0 и -1 с рёбер многогранной поверхности Q одного из ежей на тот клеточный комплекс K, образом которого эта поверхность является. Тогда для каждой 2-мерной клетки комплекса K возможно одно из двух: либо все ограничивающие его 1-мерные клетки отмечены числом 0, либо некоторые из его 1-мерных клеток отмечены числами $+1$ или -1 и в этом случае индекс i этой клетки больше или равен 4.

Клеточный комплекс K по условию гомеоморфен сфере, а значит для него существует двойственный клеточный комплекс C, который можно представлять себе так: выберем в каждой грани Q по точке и соединим две такие точки дугой, если соответствующие грани Q имеют общее ребро в K. Считаем при этом, что дуги могут пересекаться только в своих концевых точках, а некоторый набор 1-мерных клеток C ограничивает 2-мерную клетку если и только если соответствующие 1-мерные клетки комплекса K и только они сходятся в одной вершине K. Впрочем из определения двойственного комплекса для нас важно лишь что 1-мерные клетки двойственных комплексов K и C находятся во взаимно однозначном соответствии. Именно это обстоятельство позволяет нам перенести построенные выше распределения чисел $+1$, 0 и -1 с рёбер комплекса K на рёбра комплекса C.

Заметим также, что ни одна двумерная клетка комплекса C не может быть ограничена всего двумя его 1-мерными клетками. В противном случае в K нашлась бы 0-мерная клетка, инцидентная только двум 1-мерным клеткам K, а значит на многогранной поверхности Q нашлась бы вершина v, инцидентная всего лишь двум рёбрам, а значит — и всего лишь двум граням. Обозначим эти рёбра через e_1 и e_2, а эти грани через f_1 и f_2. Если e_1 и e_2 не лежат на одной прямой, то грани f_1 и f_2 с необходимостью лежат в одной плоскости. Тогда соответствующие им векторы n_1 и n_2 оснащения либо совпадают, либо диаметрально противоположны. Однако и то, и другое противоречит определению многогранного ежа. Если же рёбра e_1 и e_2 лежат на одной прямой, то мы можем изменить комплекс K, исключив из него вершину v и заменив рёбра e_1 и e_2 одним ребром, соединяющим их вершины, отличные от v. Ясно, что Q может рассматриваться как кусочно-аффиный образ такого исправленного комплекса. Но комплекс C, соответсвующий так исправленному комплексу K уже не имеет двумерных клеток, ограниченных всего думя 1-мерными клетками.

Заметим теперь, что индекс j вершины комплекса C равен индексу i соответствующей 2-мерной клетки комплекса K. Сравнивая ограничения на индексы i и j, вытекающие из лемм 10.6 и 10.7, заключаем, что оба индекса всегда равны нулю, более того, что любая пара параллельных граней представляет собой пару равных и параллельно расположенных выпуклых многоугольников.

Теперь всё готово к доказательству того, что многогранные ежи, о которых идёт речь в теореме 10.5, совмещаются (вместе с их оснащениями) параллельным переносом. Для этого совместим параллельным переносом какие-нибудь две параллельные грани наших многогранных ежей. При этом, конечно, совпадут и соответствующие этим граням векторы оснащений. Обозначим эти совпадающие грани через Q_1. Пусть Q_2 обозначает какую-нибудь грань первого ежа, инцидентную Q_1. Вектор оснащения к грани Q_2 задаёт на сфере $\mathbf{S}^2$ некоторую точку, которая соединена кратчайшей с точкой, соответствующей нормали к грани Q_1. Поскольку оснащения ежей порождают одинаковое разбиение сферы $\mathbf{S}^2$, то на втором еже найдётся грань $\widetilde{Q}_2$, параллельная Q_2 и смежная с Q_1. Поскольку двугранный угол между Q_1 и Q_2, очевидно, равен двугранному углу между Q_1 и $\widetilde{Q}_2$, а, по доказанному выше в этом пункте, параллельные грани Q_2 и $\widetilde{Q}_2$ совмещаются движением, несложно заключить, что грани Q_2 и $\widetilde{Q}_2$ совпадают между собой равно как совпадают и соответствующие им векторы оснащения.

Продолжая этот процесс проверки того, что очередные смежные грани сами собой совместились, мы видим, что совместив грани Q_1 наших ежей, мы на самом деле совместили и сами ежи и их оснащения. Теорема 10.5 доказана.

Теорема 10.8 *Пусть два параллельных и одинаково ориентированных многогранных ежа в $\mathbf{R}^3$ таковы, что их параллельные грани имеют одинаковые ориентированные площади. Тогда эти ежи равны и параллельно расположены.*

Заметим, что теорема 10.8 является аналогом теоремы 10.3, справедливым для невыпуклых многогранников.

Теорема 10.8 является очевидным следствием теоремы 10.5.

При доказательстве теоремы 10.5 (а значит и теоремы 10.8) мы не пользовались тем, что оснащение многогранного ежа порождает разбиение сферы $\mathbf{S}^2$ именно на выпуклые многоугольники.

Теорема существования для многогранных ежей

В этом разделе мы докажем основной результат данного параграфа, а именно — аналог теоремы Г. Минковского о существовании выпуклого многогранника с заданными направлениями и площадями граней для многогранных ежей. Но начнём мы со вспомогательных утверждений.

Лемма 10.9 *Пусть $(P; n_1, \ldots, n_m)$ — многогранный ёж в $\mathbf{R}^3$, пусть фиксирована некоторая ориентация $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ многогранной поверхности P и пусть $f_1, \ldots, f_m$ — ориентированные площади граней этого ежа. Тогда выполняется равенство $\sum_{j=1}^m f_j n_j = 0$.*

Доказательство получается прямым вычислением:

$$\sum_{j=1}^{m} f_j n_j = \sum_{j=1}^{m} |f_j| \varepsilon_j n_j = \sum_{j=1}^{m} |f_j| \nu_j = 0,$$

в котором использованы обозначения из определения ориентированной площади грани, а последнее равенство написано в силу соотношения (38).

Лемма 10.10 *Пусть на плоскости дан выпуклый многоугольник P_0, у которого никакие две стороны не параллельны. Рассмотрим семейство $\mathcal{S}$ выпуклых многоугольников P, удовлетворяющих следующим условиям: (a) для любой стороны любого $P \in \mathcal{S}$ найдётся параллельная ей сторона P_0; (b) для любого $P \in \mathcal{S}$ и любой стороны P_0 найдётся параллельная ей сторона P; (c) площади всех многоугольников $P \in \mathcal{S}$ равномерно ограничены. Тогда периметры всех многоугольников $P \in \mathcal{S}$ также равномерно ограничены.*

Заметим, что без предположения о том, что у P_0 нет параллельных сторон, утверждение леммы 10.10 не верно. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять в качестве P_0 квадрат со стороной 1, а в качестве $\mathcal{S}$ — последовательность прямоугольников P_k со сторонами, параллельными сторонам P_0, и имеющими длины k и $1/k$ соответственно, $k \in \mathbf{N}$.

Доказательство леммы 10.10. Допустим противное, т. е. предположим, что периметры многоугольников семейства $\mathcal{S}$ не ограничены. Из условий (a) и (b) следует, что всякий многоугольник $P \in \mathcal{S}$ имеет такое же число сторон, что и P_0. Поэтому в $\mathcal{S}$ найдётся последовательность многоугольников P_k, у которых длина l_k максимальной стороны стремится к бесконечности при $k \to \infty$. Обозначим через α наименьший угол между прямыми, проходящими через две произвольные стороны многоугольника P_0. Поскольку у P_0 отсутствуют параллельные стороны, то $\alpha > 0$. При каждом $k \in \mathbf{N}$ построим равнобедренный треугольник Δ_k так, чтобы его основанием служила сторона многоугольника P_k, имеющая длину l_k; углы при основании Δ_k были равны α; Δ_k и P_k лежали бы по одну сторону от их общей стороны длины l_k (см. рис. 6).

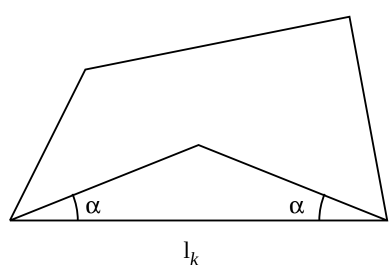

Рис. 6

В силу выбора числа α, треугольник Δ_k содержится в многоугольнике P_k. Последнее, однако, немедленно ведёт к противоречию. В самом деле, с одной стороны площадь треугольника Δ_k равна $\frac{1}{4} l_k^2 \sin^2 \alpha$ и поэтому стремится к бесконечности при $k \to \infty$. С другой стороны она не превосходит площади многоугольника P_k и, следовательно, равномерно отделена от бесконечности. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 10.10.

Будем говорить, что многогранный ёж находится *в общем положении*, если никакие три вектора его оснащения не лежат в одной плоскости.

Теорема 10.11 *Пусть $(P; n_1, \dots, n_m)$ — многогранный ёж в $\mathbf{R}^3$, находящийся в общем положении. Допустим, что на многогранной поверхности P выбрана некоторая ориентация, относительно которой грани ежа $(P; n_1, \dots, n_m)$ имеют ориентированные площади $f_1, \dots, f_m$ (в частности, подразумевается, что ни одно из чисел $f_1, \dots, f_m$ не равно нулю). Пусть числа $g_1, \dots, g_m$ таковы, что*

(1) $f_j \cdot g_j > 0$ для каждого $j = 1, \dots, m$;

(2) $\sum_{j=1}^m g_j n_j = 0$.

Тогда в $\mathbf{R}^3$ существует многогранный ёж, параллельный и одинаково ориентированный с $(P; n_1, \dots, n_m)$, для которого числа $g_1, \dots, g_m$ являются ориентированными площадями граней.

Заметим, что теорема 10.11 является распространением теоремы 10.4 на случай невыпуклых многогранников, но не содержит её в себе как частный случай даже при $d = 3$. Главное их отличие состоит в том, что в теореме 10.4 мы стартуем с абстрактных наборов векторов $n_1, \dots, n_m$ и чисел $f_1, \dots, f_m$, удовлетворяющих некоторому соотношению. В отличие от этого, в теореме 10.11 мы должны с самого начала знать, что наборы векторов $n_1, \dots, n_m$ и чисел $f_1, \dots, f_m$ соответствуют некоторому реально существующему многогранному ежу в $\mathbf{R}^3$. Только после этого теорема 10.11 показывает в каких пределах мы можем варьировать величины площадей граней ежа.

Доказательство теоремы 10.11 проведём примерно теми же методами, которыми теорема 10.4 доказана в [6].

Для каждого $0 \le t \le 1$ и каждого $1 \le j \le m$ положим $g_j(t) = (1-t)f_j + tg_j$. Через T обозначим подмножество отрезка $[0, 1] \subset \mathbf{R}$, состоящее из тех чисел t, для каждого из которых существует многогранный ёж в $\mathbf{R}^3$, параллельный и одинаково ориентированный с ежом $(P; n_1, \dots, n_m)$, для которого числа $g_1(t), \dots, g_m(t)$ являются ориентированными площадями граней.

Покажем, что множество T непусто, открыто и замкнуто. Как известно, в таком случае T совпадает со всем отрезком $[0, 1]$ и, в частности, содержит число $t = 1$. Последнее же утверждение является лишь переформулировкой заключения теоремы 10.11.

Множество T, очевидно, содержит нуль и поэтому не пусто.

Убедимся, что T замкнуто. Предположим, что последовательность чисел $t_1, \dots, t_k, \dots$ содержится в множестве T и сходится к некоторому числу t_0. Достаточно убедиться, что $t_0 \in T$. Поскольку $t_k \in T$, то существует многогранный ёж $(P_k; n_1, \dots, n_m)$ в $\mathbf{R}^3$, параллельный и одинаково ориентированный с ежом $(P; n_1, \dots, n_m)$, для которого числа $g_1(t), \dots, g_m(t)$ являются ориентированными площадями граней.

Выберем произвольно вершину v_1 ежа $(P_1; n_1, \dots, n_m)$. Для каждого $k \in \mathbf{N}$ обозначим через v_k ту вершину ежа $(P_k; n_1, \dots, n_m)$, которая имеет тот же самый сферический образ, что и вершина v_1. С помощью параллельного переноса сдвинем ёж $(P_k; n_1, \dots, n_m)$ так, чтобы точка v_k совпала с точкой v_1. Полученного таким образом ежа обозначим через $(\widetilde{P_k}; n_1, \dots, n_m)$.

Заметим теперь, что числа $g_1(t_k), \dots, g_m(t_k)$ ограничены в совокупности, $k \in \mathbf{N}$. Кроме того, поскольку ёж $(P; n_1, \dots, n_m)$ лежит в общем положении, то ни одна из граней ежа $(P_k; n_1, \dots, n_m)$, $k \in \mathbf{N}$, не имеет параллельных сторон. По лемме лемме 10.10 периметры всех граней всех ежей $(P_k; n_1, \dots, n_m)$, $k \in \mathbf{N}$, равномерно ограничены. Следовательно, все ежи $(\widetilde{P_k}; n_1, \dots, n_m)$, $k \in \mathbf{N}$, содержатся в некотором шаре конечного радиуса в $\mathbf{R}^3$.

Фиксируя поочередно каждый из векторов $n_1, \dots, n_m$ и применяя теорему выбора Бляшке [24] к последовательности граней (т. е. выпуклых многоугольников) ежей $(\widetilde{P_k}; n_1, \dots, n_m)$, $k \in \mathbf{N}$, оснащённых выбранной нормалью, видим, что мы можем выбрать подпоследовательность ежей $(\widetilde{P_{k_j}}; n_1, \dots, n_m)$, $j \in \mathbf{N}$, у которой любая последовательность граней, имеющих общую нормаль, является сходящейся. Ясно, что пределом каждой такой последовательности граней является некоторый выпуклый многоугольник, а пределом последовательности ежей $(\widetilde{P_{k_j}}; n_1, \dots, n_m)$, $j \in \mathbf{N}$, является некоторый ёж $(P_0; n_1, \dots, n_m)$, для которого числа $g_1(t_0), \dots, g_m(t_0)$ являются ориентированными площадями граней. Это и означает, что $t_0 \in T$.

Для доказательства открытости T нам понадобятся следующие вспомогательные конструкции.

Каждый многогранный ёж, параллельный данному ежу $(P; n_1, \dots, n_m)$, определяется заданием своих опорных чисел $h_1, \dots, h_m$. Поэтому совокупность всех многогранных ежей, параллельных данному, можно рассматривать как подмножество m-мерного пространства $\mathbf{R}^m$. Это подмножество открыто, поскольку при малых смещениях плоскостей граней грани не исчезают. Объединим в один класс все равные и параллельно расположенные ежи. Так как параллельный перенос в $\mathbf{R}^3$ определяется тремя параметрами, то каждый класс задаётся $m-3$ переменными. Таким образом, множество этих классов образует $(m-3)$-мерное многообразие, которое мы обозначим через $\mathbf{A}$.

При данных неизменных векторах $n_1, \dots, n_m$ через $\mathbf{B}$ обозначим совокупность m-ок ненулевых чисел $f_1, \dots, f_m$, удовлетворяющих соотношению $\sum_{j=1}^m f_j n_j = 0$. $\mathbf{B}$ можно рассматривать как подмножество m-мерного пространства $\mathbf{R}^m$, а именно — как $(m-3)$-мерную плоскость $\sum_{j=1}^m f_j n_j = 0$, из которой удалены точки, имеющие хоть одну нулевую координату.

На множестве $\mathbf{A}$ зададим отображение φ, сопоставляющее каждому многогранному ежу, параллельному и одинаково ориентированному с ежом $(P; n_1, \dots, n_m)$ (или набору $h_1, \dots, h_m$ его опорных чисел), набор $f_1, \dots, f_m$ его ориентированных площадей граней. В силу леммы 10.9 φ отображает $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$. Выше мы убедились, что многообразия $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$ имеют одинаковые размерности. Непрерывность φ очевидна из непрерывной зависимости площадей граней от положения граней, т. е. от опорных чисел. Инъективность φ следует из теоремы единственности 10.8.

Классическая теорема Брауэра об инвариантности области утверждает, что *если U — открытое множество в $\mathbf{R}^k$, а $\psi : U \to \mathbf{R}^k$ — непрерывное взаимно однозначное отображение, то $\psi(U)$ — открытое множество в $\mathbf{R}^k$.* Применив эту теорему к отображению φ, заключаем, что $\varphi(\mathbf{A})$ — открытое множество в $\mathbf{B}$.

Трактуя набор чисел $g_1(t), \dots, g_m(t)$ как точку в многообразии $\mathbf{B}$, мы видим, что при $t \to t_0$ эти точки сходятся к точке $g_1(t_0), \dots, g_m(t_0)$ множества $\varphi(\mathbf{A})$. Учитывая открытость последнего заключаем, что для всех $t \in [0,1]$, достаточно близких к t_0, набор чисел $g_1(t), \dots, g_m(t)$ лежит в $\varphi(\mathbf{A})$. А это и означает, что все точки $t \in [0,1]$, достаточно близкие к t_0, лежат в T, т. е. что множество T открыто. Теорема 10.11 доказана.

Убедимся, что теорема 10.11 не может быть непосредственно распространена на многогранные ежи, не находящиеся в общем положении.

На рис. 7 изображен невыпуклый 11-гранник, представляющий собой объединение двух правильных тетраэдров и правильной треугольной призмы (все три считаются здесь телами), у которых совмещены некоторые оси и плоскости симметрии. Граница этого 11-гранника является невыпуклой многогранной поверхностью, гомеоморфной сфере. Обозначим её через P. Грани поверхности P, не пересекающиеся с треугольной призмой, назовём *основаниями* поверхности P, а совокупность общих точек P и призмы назовём *талией* P.

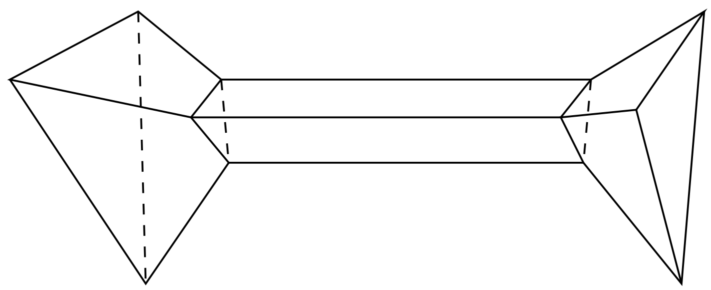

Рис. 7

Превратим P в многогранного ежа $H = (P; n_1, \ldots, n_{11})$, сопоставив основаниям P единичиные векторы n_1 и n_{11} внешних нормалей, а всем остальным граням P — единичные векторы $n_2, \ldots, n_{10}$ внутренних нормалей. Ориентировав P векторами внешних нормалей, видим, что основания P являются положительными гранями, а все остальные её грани — отрицательными.

Для определённости будем считать, что поверхность P построена исходя из правильных тетраэдров со стороной 1 и что площадь талии P равна 1.

Сопоставим имеющемуся у нас набору из одиннадцати векторов $n_1, \ldots, n_{11}$ набор из одиннадцати чисел $g_1, \ldots, g_{11}$ следующим образом: векторам n_1 и n_{11}, отвечающим основаниям P, сопоставим $\sqrt{3}/4$ (т. е. площади правильного треугольника со стороной 1); векторам, отвечающим талии P, сопоставим $-1/3$; всем остальным векторам сопоставим $-\sqrt{3}/4$.

Набор чисел $g_1, \ldots, g_{11}$ можно трактовать как предельные значения ориентированных площадей граней многогранных ежей $H_k = (P_k; n_1, \ldots, n_{11})$, построенных следующим образом. Для данного $k \in \mathbf{N}$ продеформируем поверхность P, не изменяя нормалей к граням, так, чтобы длина поперечного сечения талии полученной поверхности P_k была равна $1/k$, а длина талии была равна k. При этом ориентированные площади всех остальных граней P_k либо равны $\sqrt{3}/4$, либо стремятся к $-\sqrt{3}/4$ при $k \to \infty$. Поэтому для чисел $g_1, \ldots, g_{11}$ выполняются условия (1) и (2) теоремы 10.11.

Убедимся, однако, что не существует многогранного ежа, параллельного и одинаково ориентированного с H, для которого числа $g_1, \ldots, g_{11}$ являются ориентированными площадями граней.

Будем действовать от противного и предположим, что интересующий нас многогранный ёж H_0 все-таки существует. Используя обозначения, введённые при доказательстве теоремы 10.11, обозначим через $H_{\mathbf{A}}$ точку многообразия $\mathbf{A}$, соответствующую ежу H_0 (т. е. набор его опорных чисел) и через $H_{\mathbf{B}}$ — аналогичную точку многообразия $\mathbf{B}$ (т. е. набор площадей ориентированных граней ежа H_0). В многообразии $\mathbf{A}$ выберем окрестность U точки $H_{\mathbf{A}}$ такую, чтобы сумма модулей опорных чисел любого ежа из U не превосходила удвоенной суммы модулей опорных чисел ежа H_0. Выше мы уже доказали, что множество $\varphi(U)$ является открытой окрестностью точки $H_{\mathbf{B}}$. В частности, $\varphi(U)$ содержит бесконечно много многогранных ежей (точнее — наборов ориентированных площадей их граней) из последовательности H_k, $k \in \mathbf{N}$. В силу теоремы единственности 10.8, каждому ежу $H_k \in \mathbf{B}$ соответствует всего одна точка (или класс) многообразия $\mathbf{A}$ и эта единственная точка, конечно, лежит в U. Следовательно, среди ежей H_k, $k \in \mathbf{N}$, есть целая подпоследовательность ежей, у которых сумма модулей опорных чисел равномерно ограничена. Последнее, очевидно противоречит тому, что длина талии H_k равна k. Полученное противоречие доказывает, что многогранного ежа H_0 с указанными выше свойствами не существует. Теорема 10.11 доказана.

Открытые вопросы

В этом разделе мы вкратце наметим возможные направления дальнейших исследований о многогранных ежах, которые, однако выходят за рамки настоящего изложения.

Параллелоэдром называется выпуклый многогранник, параллельными копиями которого можно заполнить всё пространство $\mathbf{R}^3$ так, что любые две копии либо не пересекаются, либо имеют общую вершину, либо имеют общее (целое) ребро, либо имеют общую (целую) грань [6]. Параллелоэдры играют важную роль в таких разных науках, как теория чисел, кристаллография, стохастическая геометрия, теория векторных мер и т.д. Как известно, Г.Минковский пришёл к своей теореме единственности 10.3 в поисках доказательства существования центра симметрии у параллелоэдров.

Известна классификация параллелоэдров в $\mathbf{R}^3$ (см., напр., [6]), равно как и отдельные попытки изучать невыпуклые тела, параллельными копиями которых можно заполнять всё пространство (см., напр., [110]). Но пространство можно заполнять невыпуклыми многогранными ежами.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим равнобочную трапецию (трактуемую как выпуклое тело на плоскости), у которой боковые стороны образуют угол $\pi/4$ с большим основанием, а малое основание в 3 раза короче большого. Обозначим через P невыпуклое тело, являющееся объединением этой трапеции и её образа под действием симметрии относительно её малого основания (см. рис. 8). Через Q обозначим декартово произведение фигуры P на некоторый отрезок, не лежащий в плоскости фигуры P. Легко понять, что граница полученного невыпуклого тела может быть превращена в многогранного ежа, а параллельными копиями этого тела можно заполнить всё пространство.

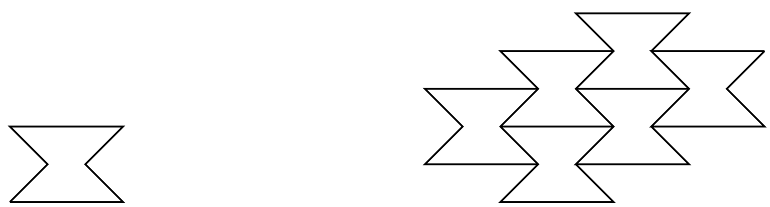

Рис. 8

Возникает вопрос: Возможна ли классификация многогранных ежей, параллельными копиями которых можно заполнить всё $\mathbf{R}^3$?

Как известно, для доказательства своей теоремы единственности 10.3 Г. Минковский развил аппарат, связанный с операцией, которую сейчас называют сложением выпуклых тел по Минковскому и далеко продвинул теорию изопериметрического неравенства, доказав, например, неравенство для смешанных объёмов, которое сейчас называют неравенством Минковского (см., напр., [6, 24, 114]).

Если P и Q — выпуклые многогранники, а R — их сумма Минковского, то, как известно, R — тоже выпуклый многогранник, грань которого с внешней нормалью n может быть найдена (с точностью до параллельного переноса) как сумма Минковского граней (возможно вырождающихся в ребра или вершины) многогранников P и Q с внешней нормалью n.

Это свойство может быть принято за определение суммы Минковского невыпуклых многогранных ежей. В самом деле, грани ежей являются выпуклыми многоугольниками, для которых сложение по Минковскому уже определено. С другой стороны, из определения многогранного ежа следует, что корректно определено понятие грани многогранного ежа с данным направлением внешней нормали.

Возникает вопрос: Верно ли, что для многогранных ежей справедливы неравенства, аналогичные неравенствам для смешанных объёмов выпуклых тел?

Заметим, что определение смешанного объёма виртуальных многогранников, которые, как мы упоминали выше, являются обобщением многогранных ежей, дано в [86], однако неравенств для смешанных объёмов в [86] нет. Некоторые неравенства изопериметрического типа для гладких ежей получены в [76].

11 Применения теорем о неявной функции с вырожденным якобианом к изучению изгибаемых многогранников и каркасов

Уточним терминологию, используемую в настоящем параграфе.

Пусть K — симплициальный комплекс, тело которого является $(n-1)$-мерным связным компактным топологическим многообразием без края. Многогранником в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ называется непрерывное отображение $f: K \to \mathbf{R}^n$, линейное на каждом симплексе. Если тело комплекса K гомеоморфно сфере, то многогранник $f: K \to \mathbf{R}^n$ называют многогранной сферой в $\mathbf{R}^n$.

Говорят, что многогранник не имеет самопересечений, если отображение f глобально инъективно. Вообще говоря, в настоящем параграфе мы работаем с многогранниками, имеющими самопересечения.

Многогранник $P = f(K)$ называется *изгибаемым*, если существует аналитическое по параметру семейство многогранников $P_t = (f_t, K)$, $0 \le t \le 1$, такое что

1) $P = P_0$;

2) для любых 0-мерных симплексов v_j, v_k комплекса K, принадлежащих некоторому его 1-мерному симплексу, равенство $|f(v_j) - f(v_k)| = |f_t(v_j) - f_t(v_k)|$ справедливо для всех $0 \le t \le 1$ (здесь и далее $|y|$ обозначает евклидову норму вектора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, т. е. $|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$);

3) найдутся два 0-мерных симплекса v_j, v_k комплекса K, не принадлежащих никакому его 1-мерному симплексу, для которых выражение $|f_t(v_j) - f_t(v_k)|$ не постоянно по t на отрезке $[0, 1]$.

Семейство P_t, обладающее свойствами 1)–3), называется *нетривиальным изгибанием* многогранника P. Подчеркнём, что в процессе изгибания комплекс K остаётся неизменным.

Другими словами, многогранник называется изгибаемым, если его пространственную форму можно изменять аналитически по параметру (см. условие 3)), не изменяя его внутренней метрики (см. условие 2)). Впрочем, требование аналитической зависимости от параметра можно существенно ослабить. А именно, в [47] показано, что если существует непрерывная по параметру деформация многогранника, обладающая свойствами 1)–3), то существует также и аналитически зависящая от (возможно другого) параметра его деформация, обладающая свойствами 1)–3).

Нас интересует вопрос о том, является ли данный многогранник $f : K \to \mathbf{R}^n$ изгибаемым или нет. Изгибание $f_t : K \to \mathbf{R}^n$ многогранника достаточно задавать на его 0-мерных симплексах v_j $(1 \le j \le N)$: $x_j(t) = f_t(v_j) \in \mathbf{R}^n$. При этом свойства 1)–3) переформулируются следующим образом: 1') векторы $x_j(0)$ принимают заранее заданные значения; 2') если 0-мерные симплексы v_i и v_j соединены 1-мерным симплексом в K, то равенство $|x_i(t) - x_j(t)|^2 = |x_i(0) - x_j(0)|^2$ справедливо для всех $0 \le t \le 1$; 3') найдутся 0-мерные симплексы v_i и v_j, не соединённые 1-мерным симплексом в K, такие, что выражение $|x_i(t) - x_j(t)|^2$ не постоянно по t на отрезке $[0, 1]$.

Другими словами, вопрос об изгибаемости данного многогранника эквивалентен вопросу о том является ли набор векторов $x_j = x_j(0)$, $j = 1, 2, \ldots, N$ изолированным решением алгебраической системы уравнений

$$|x_i - x_j|^2 = |x_i(0) - x_j(0)|^2 \tag{39}$$

или же эта система определяет неявную функцию $x_j = x_j(t)$ в окрестности точки $x_j = x_j(0)$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Правда, при этом мы не интересуемся движениями $f(K)$ как твёрдого тела в $\mathbf{R}^n$, т. е. мы интересуемся лишь решениями, обладающими свойствами 3) или 3'). Это требование легко соблюсти, если, выбрав один $(n-1)$-мерный сиплекс комплекса K и считая что он содержит 0-мерные симплексы v_1, v_2, $\ldots$, v_n, условиться, что вершина $f_t(v_1)$ в процессе деформации многогранника всегда находится в начале координат (а значит всегда имеет только нулевые координаты), вершина $f_t(v_2)$ всегда находится на первой оси в пространстве $\mathbf{R}^n$ (а значит все её координаты, кроме первой, всегда равны нулю), вершина $f_t(v_3)$ всегда лежит в двумерной плоскости, натянутой на первую и вторую оси пространства $\mathbf{R}^n$ (а значит все её координаты, кроме первой и второй, всегда равны нулю) и т. д. Это обстоятельство уменьшает количество независимых переменных в уравнении (39), но не препятствует описанному выше сведéнию задачи об изгибаемости данного многогранника к задаче о том является ли данное решение системы алгебраических уравнений изолированным или же данная система определяет неявную функцию в окрестности этого решения.

Аналогичным образом может быть переформулирована и задача об изгибаемости каркаса в $\mathbf{R}^n$.

Каркасом в $\mathbf{R}^n$ называется связный граф вершинами которого являются точки в $\mathbf{R}^n$, а рёбрами — прямолинейные отрезки, соединяющие некоторые вершины друг с другом. При этом вершины принято называть *шарнирами*, а отрезки, их соединяющие, — *стержнями*. Типичным примером каркаса может служить совокупность 0-мерных и 1-мерных граней некоторого многогранника в $\mathbf{R}^n$.

Каркас в $\mathbf{R}^n$ называется *изгибаемым*, если он допускает нетривиальные аналитические деформации, т. е. если положения его шарниров могут быть аналитическим образом изменяемы в $\mathbf{R}^n$ так, что длины всех стержней будут оставаться постоянными и, вместе с тем, расстояние между некоторыми двумя (не соединёнными стержнем) шарнирами будет изменяться.

Некоторые авторы рассматривают также так называемые *каркасы с закрепленными шарнирами*, т. е. такие каркасы, у которых пространственное положение некоторых шарниров фиксировано и не должно изменяться в процессе деформации.

Как было сказано выше, каждому многограннику может быть сопоставлен некоторый каркас, образованный совокупностью его

0-мерных и 1-мерных граней. Этот каркас иногда называют *одномерным скелетом* многогранника. При этом многогранник является изгибаемым если и только если его одномерный скелет является изгибаемым (всё дело в том, что, согласно нашему определению, все грани многогранника — симплексы). Таким образом, задача о том является данный многогранник изгибаемым или нет представляет собой частный случай задачи о том является данный каркас изгибаемым или нет. Поэтому мы сосредоточим своё внимание на решении последней задачи.

Пространственное положение каркаса задаётся указанием положений его шарниров $x_i(0) \in \mathbf{R}^n$. Вопрос о том является ли данный каркас изгибаемым, очевидно эквивалентен вопросу о том является ли набор векторов $x_i(0)$ изолированным решением системы (39) или эта система определяет неявную функцию $x_i = x_i(t)$ в окрестности набора векторов $x_i(0)$. При этом надо, конечно, позаботиться об исключении тривиальных деформаций, при которых весь каркас движется как твёрдое тело. Это может быть сделано также как это было сделано выше для многогранников. Для каркасов с закреплёнными шарнирами эта проблема зачастую совсем не возникает, поскольку они часто вообще не допускают тривиальных деформаций.

В параграфе 2 мы ввели понятие приближённого порядка q решения алгебраической системы уравнений. Применительно к системе (39), порождённой каркасом, для обозначения этого понятия традиционно используют термин «бесконечно малое изгибание порядка q». Более точно: Пусть нам известно положение шарниров $x_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, N$ некоторого каркаса в $\mathbf{R}^n$. Набор векторов $x_{i,p}$, $i = 1, 2, \dots, N$, $p = 1, 2, \dots, q$ называется *бесконечно малым изгибанием порядка q* этого каркаса, если

$$\left| \sum_{p=1}^{q} x_{i,p} t^p - \sum_{p=1}^{q} x_{j,p} t^p \right| = 0 \pmod{t^q}$$

для всех номеров i и j для которых шарниры $x_i(0)$ и $x_j(0)$ соединены стержнем. Бесконечно малое изгибание называется *тривиальным*, если оно представляет собой начальную часть тейлоровского разложения траекторий векторов $x_i(0)$ под действием некоторой однопараметрической группы изометрий пространства $\mathbf{R}^n$.

Каркас называется *изгибаемым порядка q*, если у него имеется нетривиальное бесконечно малое изгибание порядка q. В противном случае он называется *жёстким порядка q*.

Следующая теорема показывает, что если каракас допускает «правильное» бесконечно малое изгибание достаточно высокого порядка, то он является изгибаемым.

Теорема 11.1 *Пусть каркас P является изгибаемым порядка q, причём $\sum_{p=0}^{q} X_p t^p$ является нетривиальным бесконечно малым изгибанием порядка q. Пусть операторы B и C построены по системе (39), соответствующей каркасу P, как это указано в параграфе 2, причём пусть существует число k $(0 \leq k < q)$ такое, что для всех $i = 1, 2, \ldots, q$ и всех $j = k, k+1, \ldots, q$ уравнение*

$$CX = -B(X_i, X_j) - B(X_j, X_i)$$

имеет решение, лежащее в линейной оболочке векторов X_k, X_{k+1}, $\ldots$, X_q. Тогда каркас P является изгибаемым.

Доказательство теоремы 11.1 непосредственно следует из теоремы 2.1.

Все изгибаемые октаэдры в $\mathbf{R}^3$ были расклассифицированы Р. Брикаром в [27] (см. также [102]). В статье [12] (в несколько иных обозначениях) показано, что условия теоремы 11.1 соблюдаются для одномерного скелета октаэдра Брикара первого типа при $q = 5$ и $k = 1$. Приведём этот результат более детально.

Рассмотрим октаэдр Брикара Q первого типа со следующими координатами вершин: $A_1 = (2, 0, 0)$, $A_2 = (1, \sqrt{3}, 0)$, $A_3 = (-2, 0, 0)$, $A_4 = (-1, \sqrt{3}, 0)$, $A_5 = (0, 0, 1)$, и $A_6 = (0, 0, -1)$. Подразумевается, что вершины A_1, A_2, A_3, и A_4 лежат на экваторе Q именно в указанном порядке, а A_5 и A_6 являются, соответственно, северным и южным полюсами Q (более подробно об октаэдрах Брикара можно прочитать, напр., в [102]).

Перенумеруем рёбра Q в соответствии со следующей таблицей

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	*	1	*	4	5	9
2	1	*	2	*	6	10
3	*	2	*	3	7	11
4	4	*	3	*	8	12
5	5	6	7	8	*	*
6	9	10	11	12	*	*

Здесь число, стоящее на пересечении столбца с верхним элементом i и строки с самым левым элементом j, задаёт номер $e =$

$e(i, j)$ ребра октаэдра Q, соединяющего i-ю и j-ю вершины Q; символ $*$ означает, что соответствующие вершины не соединены никаким ребром Q.

Следующий рисунок даёт представление об изучаемом октаэдре Брикара.

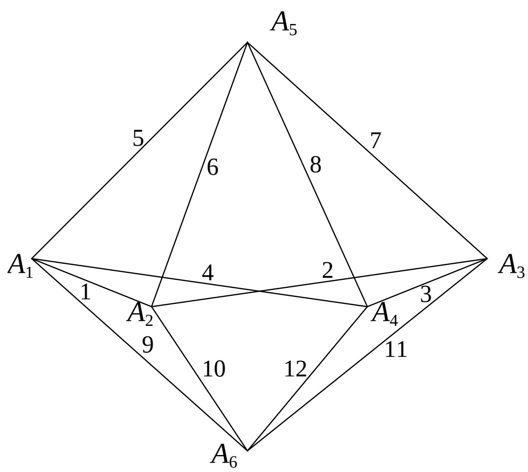

Рис. 1

Числа, указанные рядом с каждым ребром, соответствуют введённой выше нумерации рёбер.

Построим по Q билинейное отображение $B : \mathbf{R}^{18} \times \mathbf{R}^{18} \to \mathbf{R}^{12}$, о котором идёт речь в теореме 11.1. Оно имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned}
&B_1(X,U)\\
&\quad=(x_1-x_2)(u_1-u_2)+(y_1-y_2)(v_1-v_2)+(z_1-z_2)(w_1-w_2),\\
&B_2(X,U)\\
&\quad=(x_2-x_3)(u_2-u_3)+(y_2-y_3)(v_2-v_3)+(z_2-z_3)(w_2-w_3),\\
&B_3(X,U)\\
&\quad=(x_3-x_4)(u_3-u_4)+(y_3-y_4)(v_3-v_4)+(z_3-z_4)(w_3-w_4),\\
&B_4(X,U)\\
&\quad=(x_4-x_1)(u_4-u_1)+(y_4-y_1)(v_4-v_1)+(z_4-z_1)(w_4-w_1),\\
&B_5(X,U)\\
&\quad=(x_5-x_1)(u_5-u_1)+(y_5-y_1)(v_5-v_1)+(z_5-z_1)(w_5-w_1),\\
&B_6(X,U)\\
&\quad=(x_5-x_2)(u_5-u_2)+(y_5-y_2)(v_5-v_2)+(z_5-z_2)(w_5-w_2),\\
&B_7(X,U)\\
&\quad=(x_5-x_3)(u_5-u_3)+(y_5-y_3)(v_5-v_3)+(z_5-z_3)(w_5-w_3),\\
&B_8(X,U)\\
&\quad=(x_5-x_4)(u_5-u_4)+(y_5-y_4)(v_5-v_4)+(z_5-z_4)(w_5-w_4),\\
&B_9(X,U)\\
&\quad=(x_6-x_1)(u_6-u_1)+(y_6-y_1)(v_6-v_1)+(z_6-z_1)(w_6-w_1),\\
&B_{10}(X,U)\\
&\quad=(x_6-x_2)(u_6-u_2)+(y_6-y_2)(v_6-v_2)+(z_6-z_2)(w_6-w_2),\\
&B_{11}(X,U)\\
&\quad=(x_6-x_3)(u_6-u_3)+(y_6-y_3)(v_6-v_3)+(z_6-z_3)(w_6-w_3),\\
&B_{12}(X,U)\\
&\quad=(x_6-x_4)(u_6-u_4)+(y_6-y_4)(v_6-v_4)+(z_6-z_4)(w_6-w_4),
\end{aligned}$$

где

$$X=(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,x_3,y_3,z_3,x_4,y_4,z_4,x_5,y_5,z_5,x_6,y_6,z_6)$$

и

$$U=(u_1,v_1,w_1,u_2,v_2,w_2,u_3,v_3,w_3,u_4,v_4,w_4,u_5,v_5,w_5,u_6,v_6,w_6)$$

— произвольные векторы в $\mathbf{R}^{18}$.

Как известно, октаэдр Брикара является изгибаемым. Для определённости будем считать, что вершины A_5 и A_6 имеют следующие координаты в процессе изгибания: $A_5(t)=(0,0,1-t)$ и $A_6(t)=(0,0,-1+t)$ (переменная t достаточно мала по абсолютной величине). Более того, будем считать, что рёбра A_1A_2 и A_3A_4 симметричны друг другу относительно плоскости, натянутой на векторы $(1,0,0)$ и $(0,0,1)$. При этих предположениях мы получаем следующие уравнения для нахождения координат оставшихся вершин $A_1(t) = (x_1(t), y_1(t), 0)$, $A_2(t) = (x_2(t), y_2(t), 0)$, $A_3(t) = (x_1(t), -y_1(t), 0)$, и $A_4(t) = (x_2(t), -y_2(t), 0)$ как функций переменного t:

$$[x_1(t) - x_2(t)]^2 + [y_1(t) - y_2(t)]^2 = 4,$$

$$[x_1(t) + x_2(t)]^2 + [y_1(t) - y_2(t)]^2 = 12,$$

$$[x_1(t)]^2 + [y_1(t)]^2 + (1-t)^2 = 5,$$

$$[x_2(t)]^2 + [y_2(t)]^2 + (-1+t)^2 = 5.$$

Дифференцируя эти уравнения относительно t как это было сделано в параграфе 2, мы получим следующие коэффициенты приближённых решений $X(t) = X_0 + tX_1 + t^2X_2 + \ldots + t^nX_n$:

$$X_0 = (2, 0, 0, 1, \sqrt{3}, 0, -2, 0, 0, -1, \sqrt{3}, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -1),$$

$$X_1 = \Big(\frac{1}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{4}, \frac{5}{4\sqrt{3}}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1\Big),$$

$$X_2 = \Big(-\frac{31}{48}, -\frac{11}{6\sqrt{3}}, 0, \frac{37}{96}, -\frac{113}{96\sqrt{3}}, 0, \frac{31}{48}, -\frac{11}{6\sqrt{3}}, 0, -\frac{37}{96}, -\frac{113}{96\sqrt{3}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big),$$

$$X_3 = \Big(\frac{445}{576}, \frac{223}{144\sqrt{3}}, 0, -\frac{649}{1152}, \frac{1325}{1152\sqrt{3}}, 0, -\frac{445}{576}, \frac{223}{144\sqrt{3}}, 0, \frac{649}{1152}, \frac{1325}{1152\sqrt{3}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big),$$

$$X_4 = \Big(-\frac{30239}{27648}, -\frac{3683}{1728\sqrt{3}}, 0, \frac{50249}{55296}, -\frac{101413}{55296\sqrt{3}}, 0, \frac{30239}{27648}, -\frac{3683}{1728\sqrt{3}}, 0, -\frac{50249}{55296}, -\frac{101413}{55296\sqrt{3}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big),$$

$$X_5 = \Big(\frac{566191}{331776}, \frac{283771}{82944\sqrt{3}}, 0, -\frac{1027159}{663552}, \frac{2128499}{663552\sqrt{3}}, 0, -\frac{566191}{331776}, \frac{283771}{82944\sqrt{3}}, 0, \frac{1027159}{663552}, \frac{2128499}{663552\sqrt{3}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big),$$

$$
\begin{aligned}
X_6 = \big(&-\frac{7751729}{2654208}, -\frac{225415}{36864\sqrt{3}}, 0, \frac{14770211}{5308416}, -\frac{3512383}{589824\sqrt{3}}, 0, \frac{7751729}{2654208}, \\
&- \frac{225415}{36864\sqrt{3}}, 0, -\frac{14770211}{5308416}, -\frac{3512383}{589824\sqrt{3}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_7 = \big(&\frac{170000039}{31850496}, \frac{92241497}{7962624\sqrt{3}}, 0, -\frac{332342771}{63700992}, \frac{730291327}{63700992\sqrt{3}}, 0, \\
&- \frac{170000039}{31850496}, \frac{92241497}{7962624\sqrt{3}}, 0, \frac{332342771}{63700992}, \frac{730291327}{63700992\sqrt{3}}, \\
&0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_8 = \big(&-\frac{31271000117}{33057647616}, -\frac{2176523761}{95551488\sqrt{3}}, 0, \frac{61898822459}{6115295232}, \\
&- \frac{138739916623}{6115295232\sqrt{3}}, 0, \frac{31271000117}{3057647616}, -\frac{2176523761}{95551488\sqrt{3}}, 0, \\
&- \frac{61898822459}{6115295232}, -\frac{138739916623}{6115295232\sqrt{3}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_9 = \big(&\frac{2230982344027}{110075314176}, \frac{1264655218003}{4194304 \cdot 3^8\sqrt{3}}, 0, -\frac{4441640263531}{220150628352}, \\
&\frac{10101894456215}{220150628352\sqrt{3}}, 0, -\frac{2230982344027}{110075314176}, \frac{1264655218003}{4194304 \cdot 3^8\sqrt{3}}, 0, \\
&\frac{4441640263531}{220150628352}, \frac{10101894456215}{220150628352\sqrt{3}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_{10} = \big(&-\frac{108770280601489}{2641807540224}, -\frac{31215406114457}{16777216 \cdot 3^9\sqrt{3}}, 0, \frac{217110627870619}{5283615080448}, \\
&- \frac{499163140516943}{268435456 \cdot 3^9\sqrt{3}}, 0, \frac{108770280601489}{2641807540224}, -\frac{31215406114457}{16777216 \cdot 3^9\sqrt{3}}, 0, \\
&- \frac{217110627870619}{5283615080448}, -\frac{499163140516943}{268435456 \cdot 3^9\sqrt{3}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_{11} = \big(&\frac{2701985126197979}{31701690482688}, \frac{1564814608325921}{134217728 \cdot 3^{10}\sqrt{3}}, 0, \\
&- \frac{5399405279552831}{63403380965376}, \frac{12515889452241211}{1073741824 \cdot 3^{10}\sqrt{3}}, 0, -\frac{2701985126197979}{31701690482688}, \\
&\frac{1564814608325921}{134217728 \cdot 3^{10}\sqrt{3}}, 0, \frac{5399405279552831}{63403380965376}, \frac{12515889452241211}{1073741824 \cdot 3^{10}\sqrt{3}}, \\
&0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\big).
\end{aligned}
$$

Обозначим через L_n линейную оболочку векторов $X_1, \dots, X_n$. Прямая проверка показывает, что $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset L_4 \subset L_5 = L_6 = L_7 = L_8 = L_9 = L_{10} = L_{11}$. Здесь запись $L_i \subset L_j$ подразумевает, что L_i является собственным подмножеством L_j.

Более того, прямая проверка показывает, что $B(X_i, X_j) \in C(L_5)$ для всех $i, j = 1, \dots, 5$. Следовательно теорема 11.1 может быть применена к изучаемому октаэдру Брикара. Другими словами, мы можем утверждать, что изучаемый первый октаэдр Брикара изгибается в силу теоремы 11.1.

Идея использования жёсткости (какого-то порядка) каркаса для доказательства его неизгибаемости эксплуатируется очень давно и основывается, прежде всего, на следующем хорошо известном утверждении:

Теорема 11.2 *Если каркас в* $\mathbf{R}^n$ *является жёстким первого порядка, то он является неизгибаемым.*

Доказательство теоремы 11.2 немедленно вытекает из теоремы 2.3 и описанного выше свед́ения задачи об изгибаемости каркаса к задаче том определяет ли система уравнений (39) неявную функцию или её решение $x_j = x_j(0)$, $j = 1, \dots, N$, является изолированным.

Теорема 11.2 служит одним из краеугольных камней в вопросах существования и единственности выпуклых многогранников при том способе изложения, который принят в классической книге [6]. Из недавних работ, использующих теорему 11.2, отметим статьи Х. Маехары [70] и [71], в которых доказано что на плоскости и в трёхмерном евклидовом пространстве существуют неизгибаемые каркасы, у которых все стержни имеют длину 1 и которые не содержат ни одного треугольника, образованного стержнями. Другие утверждения о взаимосвязи понятий изгибаемости и наличия нетривиальных бесконечно малых изгибаний см., напр., в [25], [34], [38], [69], [134], [135], [136], [137].

Хорошо известен также следующий аналог теоремы 11.2:

Теорема 11.3 *Если каркас в* $\mathbf{R}^n$ *является жёстким второго порядка, то он является неизгибаемым.*

Доказательство теоремы 11.3 немедленно вытекает из теоремы 2.4.

Докажем следующее обобщение теорем 11.2 и 11.3.

Теорема 11.4 *Пусть каркас K в $\mathbf{R}^n$ имеет одно нетривиальное линейно независимое бесконечно малое изгибание первого порядка и пусть существует число $q \geq 2$ для которого K является жёстким порядка q. Тогда K является неизгибаемым.*

Доказательство. Избавимся от тривиальных изгибаний как это было объяснено выше. Тогда ядро оператора C, построенного по системе (39), имеет размерность 1. Пусть $T = (\ker C)^{\perp}$. Согласно теореме 2.4, система (39) имеет T-стандартное формальное решение $Y(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} Y_p t^p$ такое, что $Y_0 = K$ и $K + Y_1 t$ является нетривиальным бесконечно малым изгибанием первого порядка. При этом выражение $Y(t) = \sum_{p=0}^{q} Y_p t^p$ является нетривиальным бесконечно малым изгибанием порядка q. Это, однако, противоречит условиям теоремы, согласно которым K является жёстким порядка q. Полученное противоречие доказывает теорему 11.4.

Другие утверждения о взаимосвязи бесконечно малых изгибаний высших порядков с изгибаемостью каркасов читатель может найти, напр., в [37], [119] и [120]. Для гладких поверхностей результаты, отчасти аналогичные теореме 11.4, были получены Н. В. Ефимовым [45], Н. Г. Перловой [90], [91] и И. Х. Сабитовым [103].

Следующая теорема означает, что свойство каркаса быть нежёстким первого порядка сохраняется при проективных преобразованиях. Для гладких поверхностей это свойство появляется ещё у Г. Дарбу [41]. После работы Р. Зауера [109] оно стало общеизвестным (см. напр., [94] и [102]). Проективная инвариантность нежёсткостких первого порядка многогранников, по-видимому, впервые была замечена В. Бляшке [23], а затем была многократно (и, кажется, — независимо) переоткрыта многими авторами, см., напр., [132], [133], [137], [141], [142]. Для каркасов это свойство специально не формулировалось несмотря на то, что проективные свойства каркасов в связи с изгибаемостью изучались достаточно подробно (см., напр., [38]). Прежде чем переходить к формулировке теоремы, условимся об обозначениях.

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое проективное преобразование пространства $\mathbf{R}^n$ в себя, т. е. отображение, которое точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ сопоставляет точку $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ по формулам

$$y_i = \frac{a_{i0} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{00} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{0j} x_j}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь a_{ij} — фиксированные числа. Считаем, что отображение $\mathcal{A}$ не определено на векторах x, для которых $a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}x_j \neq 0$.

Пусть каркас P в $\mathbf{R}^n$ имеет шарниры $p_1, p_2, \ldots, p_N$ и пусть все p_i лежат в области определения проективного преобразования $\mathcal{A}$. Через $\mathcal{A}P$ обозначим новый каркас в $\mathbf{R}^n$, шарнирами которого являются точки $\mathcal{A}p_1$, $\mathcal{A}p_2$, $\ldots$, $\mathcal{A}p_N$, причём шарниры $\mathcal{A}p_i$ и $\mathcal{A}p_j$ соединены стержнем в $\mathcal{A}P$ если и только если шарниры p_i и p_j соединены стержнем в P.

Теорема 11.5 *Если каркас P в $\mathbf{R}^n$ является нежёстким первого порядка, то каркас $\mathcal{A}P$ также является нежёстким первого порядка. Более того, каркасы P и $\mathcal{A}P$ имеют одинаковое число линейно независимых бесконечно малых изгибаний первого порядка.*

Доказательство. Как обычно, избавимся от тривиальных изгибаний каркаса P и построим по нему оператор C. Поскольку каркас P является нежёстким первого порядка, то система линейных уравнений $CX = 0$ имеет ненулевое решение. Обозначим компоненты шарнира p_i через $p_{i,1}, p_{i,2}, \ldots, p_{i,n}$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Будем также трактовать X как мультивектор, т. е. как набор из N векторов $x_1, x_2, \ldots, x_N$, причём вектор x_i имеет компоненты $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,n}$. При этом система $CX = 0$ записывается в виде набора уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (p_{i,k} - p_{j,k})(x_{i,k} - x_{j,k}) = 0, \tag{40}$$

где $1 \leq i, j \leq N$ и шарниры p_i и p_j соединены стержнем в P. Используя формулы (40), мы можем дать следующее описание матрицы оператора C, точнее того её столбца, который при вычислении произведения CX умножается на переменную $x_{i,k}$: если этот элемент стоит на пересечении нашего столбца со строкой, соответствующей уравнению (40) (т. е. если индексы i и j таковы, что шарниры p_i и p_j соединены стержнем), то он равен $p_{i,k} - p_{j,k}$, в противном случае он равен нулю.

Аналогичным образом построим оператор ${}_{\mathcal{A}}C$ для каркаса $\mathcal{A}P$. Его матрицу можно получить из матрицы оператора C, заменив каждый элемент вида $p_{i,k} - p_{j,k}$ выражением

$$\frac{a_{k0} + \sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl} p_{i,l}}{a_{00} + \sum\limits_{l=1}^{n} a_{0l} p_{i,l}} - \frac{a_{k0} + \sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl} p_{j,l}}{a_{00} + \sum\limits_{l=1}^{n} a_{0l} p_{j,l}}$$
$$= \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} (a_{k0} a_{0l} + a_{00} a_{kl})(p_{i,l} - p_{j,l})}{\left(a_{00} + \sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl} p_{i,l}\right)\left(a_{00} + \sum\limits_{l=1}^{n} a_{0l} p_{i,l}\right)}.$$

Последнее выражение означает, что при переходе от матрицы C к матрице ${}_{\mathcal{A}}C$ каждый столбец матрицы C, соответствующий переменной $x_{i,k}$, заменяется линейной комбинацией n столбцов, соответствующих переменным $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}$. При этом столбец, соответствующий переменной $x_{i,l}$ умножается на число

$$\frac{a_{k0} a_{0l} + a_{00} a_{kl}}{\left(a_{00} + \sum\limits_{m=1}^{n} a_{km} p_{i,m}\right)\left(a_{00} + \sum\limits_{m=1}^{n} a_{0m} p_{i,m}\right)}.$$

Но при таком преобразовании ранг матрицы не меняется. Значит матрицы операторов C и ${}_{\mathcal{A}}C$ имеют не только одинаковое число строк и столбцов, но и одинаковый ранг. Поэтому из того, что уравнение $CX = 0$ имеет ненулевое решение вытекает, что уравнение ${}_{\mathcal{A}}CX = 0$ также имеет ненулевое решение. Но это и означает, что каркас $\mathcal{A}P$ является нежёстким первого порядка. Теорема 11.5 доказана.

Укажем пару нерешенных проблем, имеющих прямое отношение к изложенному в настоящем параграфе.

Во-первых было бы интересно освободиться в теореме 11.4 от условия, что у многогранника существует всего одно линейно независимое изгибание первого порядка. Примеры показывают, что при наличии нескольких линейно независимых бесконечно малых изгибаний первого порядка можно гарантировать неизгибаемость многогранника только если всякое его бесконечно малое изгибание заведомо непродолжаемо в бесконечно малое изгибание достаточно высокого порядка N. Проблема как раз и состоит в том, чтобы найти (или оценить) это N.

Во-вторых было бы интересно описать все нежёсткие второго порядка октаэдры в терминах операторов B и C. Известно несколько разных описаний нежёстких первого порядка октаэдров. Например, если известны координат вершин октаэдра, то он является нежёстким первого порядка если и только если зануляется определитель его матрицы жёсткости C. Отсюда в частности вытекает, что множество нежёстких первого порядка октаэдров является алгебраическим в пространстве, образованном координатами всех вершин. При этом ясно, что множество нежёстких второго порядка октаэдров заведомо не является алгебраическим, поскольку оно не является замкнутым (в самом деле, взяв какой-нибудь нежёсткий второго порядка октаэдр и применяя к нему гомотетию с коэффициентом $1/n$ при неограниченно возрастающем n получим в пределе вырожденный октаэдр длины всех рёбер которого равны нулю и который, очевидно, является жёстким второго порядка). Тем не менее некоторая надежда на существование разумного описания нежёстких второго порядка октаэдров в терминах операторов B и C остаётся. Она поддерживается известными геметрическими условиями того, что октаэдр является нежёстким второго порядка [119].

12 Заполнение пространства многогранниками

Рассмотрим заполнение многогранниками n-мерного, односвязного, полного пространства R^n постоянной кривизны, т. е. либо евклидова пространства, либо пространства Лобачевского. Наше изложение в основном следует работе А. Д. Александрова [7].

Говоря наглядно, речь идёт о следующем построении. Пусть дано конечное число n-мерных многогранников P_i, вообще говоря не обязательно выпуклых. Берём в R^n многогранник, равный одному из P_i, к нему по всем его целым $(n-1)$-мерным граням прикладываем многогранники, равные каким-то из многогранников P_i, и т. д. На каждом шаге можно некоторые из $(n-1)$-мерных граней просто отождествлять друг с другом, вместо того чтобы прикладывать к ним новые многогранники, если только эти грани целиком налегали друг на друга и принадлежали многогранникам, лежавшим вблизи этих граней по разные стороны от их плоскости.

Не исключается, что многогранники при таком построении пересекаются.

Для дальнейшего представляется необходимым дать следующее строгое определение.

Пусть дан комплекс K^n, образованный n-мерными многогранниками. Предполагается, что каждому многограннику принадлежат все его грани. Комплекс рассматривается абстрактно, т. е. хотя каждый его многогранник есть многогранник из данного пространства R^n (евклидова, сферического или пространства Лобачевского), тем не менее комплекс K^n не считается погруженным в R^n.

Предполагается далее, что комплекс K^n обладает следующими свойствами:

(1) Среди многогранников комплекса есть только конечное число неконгруэнтных.

(2) Каждая $(n-1)$-мерная грань любого многогранника P из комплекса K^n является вместе с тем гранью одного и только одного другого многогранника P' из K^n.

(3) (Условие «сильной связности»). Если P и P' — любые два многогранника из K^n, то существует соединяющая их цепь. При этом под *цепью* понимается конечная последовательность многогранников, в которой каждые два соседних смежны по $(n-1)$-мерной грани. То же, что цепь соединяет многогранники P и P', означает, что первый и последний её многогранники суть как раз P и P'.

(4) Если Q^k есть k-мерная $(0 \le k \le n-2)$ грань многогранника P из R^n, то она считается принадлежащей вместе с тем многограннику P' тогда и только тогда, когда существует соединяющая P и P' цепь, в которой каждые два соседних многогранника смежны по $(n-1)$-мерной грани, содержащей грань Q^k.

Заметим, что комплекс может быть бесконечным и даже локально бесконечным, т. е. отдельные его грани Q^k $(0 \le k \le n-2)$ могут принадлежать бесконечному числу многогранников комплекса.

Кроме того предполагаем заданным непрерывное отображение f тела комплекса K^n в R^n, удовлетворяющее условиям:

(i) Сужение f на каждый многогранник комплекса K^n является изометрией.

(ii) Если многогранники P и P' смежны по грани Q^{n-1}, то их образы $f(P)$ и $f(P')$ лежат в окрестности образа $f(Q^{n-1})$ грани Q^{n-1} по разные стороны от него. (Если многогранники выпуклы, то они вообще лежат по разные стороны от плоскости грани $f(Q^{n-1})$, но если они не выпуклы, то это требуется лишь в окрестности этой грани.)

Целью этого параграфа являются следующие две теоремы.

Теорема 12.1 *Отображение f сюрьективно, т. е. образ тела комплекса K^n в R^n есть всё R^n, или, иными словами, описанный выше процесс прикладывания многогранников по целым граням приводит к заполнению всего пространства. Более того, для любой ограниченной части пространства найдётся конечное число многогранников комплекса K^n, образы которых уже покрывают эту часть пространства.*

Более глубокий вопрос состоит в отыскании условий, при которых это заполнение осуществляется без взаимных налеганий многогранников, т. е. когда отображение f инъективно. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 12.2 *Для того чтобы отображение f было взаимно однозначным, необходимо и достаточно, чтобы оно было взаимно однозначным вокруг каждой $(n-2)$-мерной грани комплекса K^n, т. е. чтобы сходящиеся в такой грани многогранники при отображении f не перекрывались в сколь угодно малой её окрестности. Иными словами, для того чтобы заполнение пространства многогранниками осуществлялось в целом без перекрытий, достаточно чтобы оно осуществлялось без перекрытий «локально» вокруг каждой $(n-2)$-мерной грани.*

Необходимость условия теоремы 12.2 очевидна, и речь будет идти о доказательстве его достаточности.

Значение теоремы 12.2 состоит в том, что она сводит вопрос о возможности однозначного заполнения всего пространства в целом к вопросу о возможности его локального однозначного заполнения вокруг $(n-2)$-мерных граней. В частности, она легко приводит к известному простому геометрическому описанию параллелоэдров, по-видимому, впервые установленному Б. А. Венковым [126].

Напомним, что *параллелоэдром* называется выпуклый многогранник, параллельным перенесением которого можно заполнить всё пространство так, чтобы многогранники не входили друг в друга и не оставляли пустот. Простейшие примеры представляют куб и правильная шестигранная призма. Параллелоэдр называется *нормальным*, если указанное выше заполнение пространства можно осуществить прикладывая параллельные копии многогранника по целым граням и *ненормальным*, если такое заполнение пространства возможно если отказаться от соблюдения условия прилегания по целым граням.

Известно, что каждый n-мерный параллелоэдр (как нормальный, так и ненормальный) обладает следующими свойствами :

(a) он имеет центр симметрии;

(b) каждая его $(n-1)$-мерная грань имеет центр симметрии;

(c) для каждой $(n-2)$-мерной грани параллельные ей $(n-1)$-мерные грани образуют замкнутую шестигранную или четырёхгранную зону.

Из теоремы 12.2 легко вытекает, что *условия (a)–(c) не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы выпуклый многогранник был нормальным параллелоэдром* (откуда, в свою очередь, очевидно вытекает, что *каждый ненормальный параллелоэдр является также нормальным*).

В самом деле, из условий (a)–(c) ясно, что $(n-1)$-мерные грани зоны, отвечающей какой-либо $(n-2)$-мерной грани Q^{n-2}, ограничивают при бесконечном продолжении вдоль Q^{n-2} либо шестигранную, либо четырёхгранную призму с центром симметрии. Эти призмы при параллельном прикладывании, очевидно, однозначно заполняют окрестность грани Q^{n-2}. Таким образом, условие теоремы 12.2 выполнено, и, стало быть, многогранник со свойствами (a)–(c) однозначно заполняет пространство при параллельном прикладывании по целым граням, т. е. является нормальным параллелоэдром.

Из приведённого геометрического описания параллелоэдров вытекает, например, что для того чтобы правильным многогранником можно было однозначно заполнить пространство R^n, прикладывая его по целым граням, необходимо и достаточно, чтобы его двугранные углы, т. е. углы между $(n-1)$-мерными гранями, смежными по $(n-2)$-мерным граням, составляли целую часть 2π. Это, в частности, приложимо к правильному делению n-мерной сферы. Точно так же, очевидно, получается условие однозначного заполнения пространства многогранниками, получаемыми из данного многогранника P последовательными отражениями в $(n-1)$-мерных гранях. Это условие состоит в том, что каждый двугранный угол многогранника P должен составлять целую часть 2π, и если такой угол при грани Q^{n-2} есть нечётная часть 2π, то P должен иметь плоскость симметрии, проходящую через грань Q^{n-2}.

Заметим ещё, что, как можно видеть из последующего изложения, условия прилегания многогранников по целым граням и наличия только конечного числа неравных среди них не являются совершенно необходимыми и могут быть ослаблены. Можно, во-первых, сами куски граней, по которым смежны многогранники, считать гранями, а, во-вторых, вместо условия конечности числа неравных многогранников достаточно требовать, чтобы существовало такое число $a > 0$, что у каждого многогранника каждые две несмежные грани любых измерений удалены не менее, чем на a. Мы, однако, не будем вдаваться в обоснование возможности подобных обобщений, — она представляется достаточно очевидной.

Доказательства теорем 12.1 и 12.2 будем вести индукцией по числу измерений пространства. Однако прежде чем приступать к этим доказательствам, проделаем некоторые вспомогательные построения.

Возьмём на какой-либо грани Q^k $(k \neq 0)$ комплекса K^n внутреннюю по отношению к ней точку A. Если многогранник P из K^n содержит точку A, то построим в нём шаровой сектор V с центром в A, не пересекающий никаких граней кроме самой Q^k и тех граней размерности, бо́льшей k, которые прилегают ко всей грани Q^k. Так как среди многогранников P только конечное число неравных, то можно указать такое $r > 0$, что в каждом многограннике P, содержащем точку A, содержится такого рода сектор V радиуса r. Все эти секторы образуют в сумме окрестность точки A; эту окрестность назовём *шаровой окрестностью* $S(A, r)$ точки A в теле комплекса K^n.

Граница шаровой окрестности $S(A, r)$ состоит из $(n-1)$-мерных сферических многогранников, вырезаемых на сфере секторами V. Эти многогранники образуют некоторый комплекс K^{n-1}. Из условий (1)–(4), которые были наложены выше на комплекс K^n, непосредственно следует, что комплекс K^{n-1} удовлетворяет тем же условиям (конечно с заменой n на $n-1$). В частности, условие (3) сильной связности комплекса вытекает из того, что по условию (4) грань Q^k, а стало быть и точка A, является общей для многогранников P и P' тогда и только тогда, когда существует цепь, соединяющая P и P', в которой каждые два соседних многогранника смежны по $(n-1)$-мерной грани, содержащей Q^k.

Тело комплекса K^{n-1} есть не что иное, как граница окрестности $S(A, r)$.

Далее, непрерывное отображение f тела комплекса K^n в R^n, естественно, определяет непрерывное отображение тела комплекса K^{n-1}, и, так как отображение тела комплекса K^n является изометрией на каждом многограннике, то тело комплекса K^{n-1}

отображается в $(n-1)$-мерную сферу радиуса r вокруг точки $f(A)$. Это отображение, очевидно, удовлетворяет сформулированым выше условиям (i) и (ii).

Таким образом, для комплекса K^{n-1} выполнены условия (1)–(4). А так как размерность комплекса K^{n-1} есть $n-1$, то это даёт основание для проведения индукции.

Заметим ещё, что если точка A лежит внутри какого-либо многогранника P комплекса K^n, то она тем самым имеет шаровую окрестность, лежащую в P. Если же точка A лежит на $(n-1)$-мерной грани, по которой смежны многогранники P и P', то она имеет шаровую окрестность, состоящую из двух полушарий, так что в этом случае комплекс K^{n-1} состоит просто из двух полусфер.

Доказательства следующих лемм читатель может найти в [7].

Лемма 12.3 *Для каждого комплекса K^n существует число $a > 0$ со следующим свойством. У любой точки A из тела комплекса K^n есть окрестность радиуса a, содержащаяся в некоторой шаровой окрестности с центром, вообще говоря, в некоторой другой точке B.*

Лемма 12.4 *Если отображение f тела комплекса K^n в пространство R^n сюръективно и у каждой точки есть шаровая окрестность, сужение f на которую взаимно однозначно, то f инъективно.*

Идея доказательства леммы 12.4 состоит в том, чтобы сначала убедиться, что f является накрытием, а затем, с учётом того, что R^n односвязно, воспользоваться теоремой 3.4.

Доказательство теоремы 12.1 будем вести индукцией по числу измерений n. Начать можно с $n = 1$; в этом случае речь идёт попросту о покрытии окружности или прямой прикладываемыми друг к другу отрезками, и, очевидно, что здесь теорема верна. (Правда, в случае $n = 1$ теорема, строго говоря, отличается от теоремы 12.1, хотя бы потому, что окружность не односвязна. Но это не сказывается на дальнейшем ходе доказательства.)

Итак, мы будем предполагать, что теорема 12.1 верна для $(n-1)$-мерных пространств. На этом основании мы докажем следующее:

Если точка $\overline{A} \in R^n$ покрыта образом тела комплекса K^n, то целый шар радиуса a вокруг неё уже покрывается конечным числом образов некоторых многогранников комплекса K^n, причём a

не зависит от точки $\overline{A}$ и является тем числом a, которое определено в лемме 12.3.

В самом деле, пусть точка A из тела комплекса K^n является прообразом точки $\overline{A}$ (любым из её прообразов, если их несколько). По лемме 12.3, точка A имеет окрестность данного радиуса a, заключённую в шаровой окрестности $S(C,r)$ некоторой точки C. Поверхность окрестности $S(C,r)$ состоит из $(n{-}1)$-мерных сферических многогранников, образующих комплекс K^{n-1}, для которого, как мы убедились выше, выполнены такие же условия, как для комплекса K^n. Тело комплекса K^{n-1} (т. е. граница окрестности $S(C,r)$) отображается в границу $\overline{S}^{n-1}$ шара $\overline{S}(f(C),r)$ вокруг точки $f(C) \in R^n$.

Так как, по предположению, теорема 12.1 верна для $(n-1)$-мерного случая, то образ тела комплекса K^{n-1} покрывает всю сферу $\overline{S}^{n-1}$ и даже некоторое конечное число многогранников из K^{n-1} уже её покрывает.

Но отображение f изометрично на каждом многограннике тела комплекса K^n. Поэтому и шар $\overline{S}(f(C),r)$ покрывается конечным числом образов тех шаровых секторов, которые образуют окрестность $S(C,r)$. Короче, шар $\overline{S}(f(C),r)$ уже покрывается конечным числом многогранников из K^n, что и требовалось доказать.

Докажем теперь первое утверждение теоремы 12.1, а именно, что *образ тела комплекса K^n покрывает всё пространство R^n.*

Пусть $\overline{B}$ — любая точка из R^n. Возьмём какую-либо точку $\overline{A} \in R^n$, покрытую образом тела комплекса K^n, и проведём отрезок $\overline{A}\,\overline{B}$. Отрезок $\overline{A}\,\overline{B}$ покроем конечным числом отрезков длины $\leq a$: $\overline{A}\,\overline{A}_1$, $\overline{A}_1\,\overline{A}_2$, $\ldots$, $\overline{A}_p\,\overline{B}$.

Так как точка $\overline{A}$ покрыта образом тела комплекса K^n, то, по доказанному, шар радиуса a вокруг неё тоже покрыт образом тела комплекса K^n. Следовательно, точка $\overline{A}_1$ покрыта образом тела комплекса K^n. Теперь, точно так же убеждаемся, что точка $\overline{A}_2$ тоже покрыта образом тела K^n, и т. д. Дойдя до точки $\overline{B}$, убеждаемся, что она покрыта образом тела комплекса K^n, а так как она любая, то тем самым доказано, что f сюръективно.

Докажем теперь второе утверждение теоремы 12.1, а именно, что *любая ограниченная часть пространства R^n уже покрывается образами некоторого конечного числа многогранников из комплекса K^n.*

В самом деле, ограниченная часть пространства покрывается конечным числом шаров радиуса a, а, по доказанному, каждый такой шар покрывается образами конечного числа многогранников из K^n. Отсюда и следует доказываемое утверждение. Теорема 12.1 доказана полностью.

Доказательство теоремы 12.2. Теорема верна для $n = 2$. В самом деле, в этом случае условие теоремы означает, что отображение тела комплекса K^2 в R^2 взаимно однозначно вокруг каждой вершины. Кроме того, вокруг каждой внутренней точки многогранника (в данном случае многоугольника комплекса K^2) или вокруг каждой внутренней точки стороны оно взаимно однозначно по самим условиям, наложенным на это отображение.

Таким образом, шаровая (в данном случае круговая) окрестность каждой точки из K^2 отображается в R^2 взаимно однозначно. По лемме 12.4 отсюда следует, что отображение f тела комплекса K^2 на R^2 инъективно.

Допустим теперь, что теорема 12.2 верна для $(n-1)$-мерного случая, и докажем её для n-мерного комплекса K^n.

Пусть A — точка тела комплекса K^n; $S(A,r)$ — её шаровая окрестность, а K^{n-1} — соответствующий комплекс $(n-1)$-мерных многогранников, образующих границу окрестности $S(A,r)$. Тело комплекса K^{n-1} отображается на границу S^{n-1} шара $\overline{S}(f(A),r)$ вокруг точки $f(A) \in R^n$.

Каждая $((n-1)-2)$-мерная грань комплекса K^{n-1} есть не что иное, как пересечение некоторой $(n-2)$-мерной грани комплекса, подходящей к точке A, со сферой с центром в точке A. По условию теоремы, отображение f тела комплекса K^n на R^n взаимно однозначно вокруг каждой $(n-2)$-мерной грани. Поэтому отображение тела комплекса K^{n-1} на S^{n-1} взаимно однозначно вокруг каждой $((n-1)-2)$-мерной грани. Это значит, что для комплекса K^{n-1} выполнено условие теоремы; и так как мы считаем её для $(n-1)$-мерных комплексов верной, то отображение тела комплекса K^{n-1} на сферу S^{n-1} инъективно. Вместе с этим очевидным образом оказывается инъективным и отображение шаровой окрестности $S(A,r)$ на шар $\overline{S}(f(A),r)$.

Этим доказано, что отображение всякой шаровой окрестности взаимно однозначно, а тогда, в силу леммы 12.4, оказывается взаимно однозначным отображение f, и теорема 12.2 доказана.

Список литературы

[1] *Aigner M., Ziegler G. M.* Proofs from THE BOOK. Berlin: Springer, 1998.

[2] *Alexander R.* Lipschitzian mappings and total mean curvature of polyhedral surfaces. I. Trans. Am. Math. Soc. 1985. V. 288. P. 661–678.

[3] *Александров А. Д.* Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой. Докл. АН СССР. 1941. Т. 30, № 2. С. 103–106. [Имеется англ. перевод: *Alexandrov A. D.* Existence of a convex polyhedron and a convex surface with given metric. In the book: *Alexandrov A. D.* Selected Works. Part 1: Selected scientific papers. Amsterdam: Gordon and Breach Publishers, 1996.]

[4] *Александров А. Д.* Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой. Мат. сб. 1942. Т. 11, вып. 1–2. С. 15–61.

[5] *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. [Имеется англ. перевод: *Alexandrov A. D.* Selected Works. Part 2: Intrinsic Geometry of Convex Surfaces. Boca etc.: CRC Press, 2005.]

[6] *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1950. [Имеется англ. перевод: *Alexandrov A. D.* Convex Polyhedra. Berlin etc.: Springer, 2005.]

[7] *Александров А. Д.* О заполнении пространства многогранниками. Вестн. ЛГУ. 1954. №2. Сер. математики, физики и химии. Вып. 1. С. 33–43. [Имеется англ. перевод: *Alexandrov A. D.* On tiling a space with polyhedra. In the book: *Alexandrov A. D.* Selected Works. Part 1: Selected scientific papers. Amsterdam: Gordon and Breach Publishers, 1996.]

[8] *Александров В. А.* К теореме Ефимова о дифференциальных признаках гомеоморфизма. Матем. сб. 1990. Т. 181, №2. С. 183–188. [Имеется англ. перевод: *Aleksandrov V. A.* On Efimov's theorem on differential tests for a homeomorphism. Math. USSR, Sb. 1991. V. 69, No.1. P. 197–202.]

[9] *Александров В. А.* Вложение локально-евклидовых и конформно-евклидовых метрик. Матем. сб. 1991. Т. 182, №8. С. 1105–1117. [Имеется англ. перевод: *Aleksandrov V. A.* Imbedding locally Euclidean and conformally Euclidean metrics. Math. USSR, Sb. 1992. V. 73, No.2. P. 467–478.]

[10] *Alexandrov V. A.* Remarks on Efimov's theorem about differential tests of homeomorphism. Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 1991. V. 36, No.3–4. P. 101–105.

[11] *Alexandrov V.* An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space. Beitr. Algebra Geom. 1997. V. 38, no.1. P. 11–18.

[12] *Alexandrov V.* Sufficient conditions for the extendibility of an n-th order flex of polyhedra. Beitr. Algebra Geom. 1998. V. 39, no.2. P. 367–378.

[13] *Александров В. А.* Изгибаемые многогранные поверхности. В кн.: Современное естествознание: Энциклопедия. В 10 т. Т. 3. Математика. Механика. М.: Флинта; Наука, 2000. С. 66–69. [Имеется англ. перевод: *Alexandrov V. A.* Flexible polyhedral surfaces. Quantum. 1998. September/October. P. 4–6.]

[14] *Alexandrov V.* Flexible polyhedra in Minkowski 3-space. Manuscr. Math. 2003. V. 111, No.3. P. 341–356.

[15] *Almgren F. J., Rivin I.* The mean curvature integral is invariant under bending. The Epstein Birthday Schrift. Warwick: University of Warwick, 1998. P. 1–21.

[16] *Андреев Е. М.* О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского. Мат. сб. 1970. Т. 81. С. 445–478. [Имеется англ. перевод: *Andreev E. M.* On convex polyhedra in Lobachevskij spaces. Math. USSR, Sb. 1970. V. 10. P. 413–440.]

[17] *Андреев Е. М.* О выпуклых многогранниках конечного объёма в пространствах Лобачевского. Мат. сб. 1970. Т. 83. С. 256–260. [Имеется англ. перевод: *Andreev E. M.* On convex polyhedra in Lobachevskij spaces. Math. USSR, Sb. 1970. V. 12. P. 255–259.]

[18] *Apostol T. M.* Mathematical Analysis. 2nd ed. Reading, Mass. etc.: Addison–Wesley Publishing Company, 1974.

[19] *Artin M.* On the solutions of analytic equations. Invent. Math. 1968. V. 5. P. 277–291.

[20] *Artin M.* Algebraic approximation of structures over complete local rings. Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 1969. V. 36. P. 23–58.

[21] *Bao X., Bonahon F.* Hyperideal polyhedra in hyperbolic 3-space. Bull. Soc. Math. Fr. 2002. T. 130, No.3. P. 457–491.

[22] *Berger M.* Geometry. I, II. Transl. from the French. Berlin etc.: Springer, 1987. [Имеется русский перевод: *Берже М.* Геометрия. Т. 1. М. Мир, 1984.]

[23] *Blaschke W.* Über affine Geometrie XXVI: Wackelige Achtflache. Math. Zeitschr. 1920. Bd. 6. S. 85–93.

[24] *Blaschke W.* Kreis und Kugel. Berlin: Walter de Gruyter, 1956. [Имеется русский перевод: *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.]

[25] *Bolker E. D., Roth B.* When is a bipartite graph a rigid framework? Pac. J. Math. 1980. V. 90. P. 27–44.

[26] *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer, 1934. [Имеется русский перевод: *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.]

[27] *Bricard R.* Memoire sur la théorie de l'octaèdre articulé. J. Math. Pures Appl. 1897. T. 3. P. 113–148.

[28] *Browder F. E.* Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces. Proceedings of symposia in pure math. 1968. V. 18, part 2. Amer. Math. Soc.: Providence, 1976.

[29] *Browder F. E.* (ed.) Nonlinear and Global Analysis. Providence, RI: American Mathematical Society, 1992.

[30] *Cauchy A.* Sur le polygones et polyèdres, Second mémoire. J. Ecole Polytéchnique. 1813. T. 9. P. 87–98.

[31] *Кон-Фоссен С. Э.* Изгибаемость поверхностей в целом. Успехи мат. наук. 1936. Вып.1. С. 33–76.

[32] *Connelly R.* An immersed polyhedral surface which flexes. Indiana University Math. J. 1976. V. 25, no.10. P. 965–972.

[33] *Connelly R.* A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra. Publ. math. IHES. 1977. T. 47. P. 333–338.

[34] *Connelly R.* Conjectures and open questions in rigidity. Proc. Int. Congr. Math., Helsinki 1978. 1980. V. 1. P. 407–414. [Имеется русский перевод: *Коннелли Р.* Некоторые предположения и нерешенные вопросы в теории изгибаний. Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980.— С. 228–238.]

[35] *Connelly R.* Rigidity. In the book: *Gruber P. M.* (ed.) et al. Handbook of convex geometry. Vol. A. Amsterdam: North-Holland, 1993. P. 223–271.

[36] *Connelly R., Sabitov I., Walz, A.* The Bellows conjecture. Beitr. Algebra Geom. 1997. V. 38, no.1. P. 1–10.

[37] *Connelly R., Whiteley W.* Second-order rigidity and prestress stability for tensegrity frameworks. SIAM J. Discrete Math. 1996. V. 9, No.3. P. 453–491.

[38] *Crapo H., Whiteley W.* Statics of frameworks and motions of panel structures, a projective geometric introduction. Structural Topology. 1982. V. 6. P. 43–82.

[39] *Crapo H., Whiteley W.* Spaces of stresses, projections and parallel drawings for spherical polyhedra. Beitr. Algebra Geom. 1994. V. 35, No.2. P. 259–281.

[40] *Craven B. D., Nashed M. Z.* Generalized implicit function theorems when the derivative has no bounded inverse. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 1982. V. 6, No.4. P. 375–387.

[41] *Darboux G.* Leçons sur la thórie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. T. IV: Déformation infiniment petite et représentation sphérique. Fasc. 2. Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1896.

[42] *Dehn M.* Über die Starrheit konvexer Polyeder. Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 466–473. [Имеется русский перевод: *Ден М.* О жёсткости выпуклых многогранников. Успехи мат. наук. 1936. Вып. 2. С. 72–79.]

[43] *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1979. [Имеется англ. перевод: *Dubrovin B. A., Fomenko A. T., Novikov S. P.* Modern Geometry — Methods and Applications. Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields. New York etc.: Springer, 1984.]

[44] *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформации поверхностей. Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, вып. 2. С. 47–158. [Имеется немецкий перевод: *Efimow N. W.* Flächenverbiegung im Großen. Mit einem Nachtrag von E. Rembs und K. P. Grotemeyer. Berlin: Akademie–Verlag GmbH, 1957.]

[45] *Ефимов Н. В.* Некоторые предложения о жёсткости и неизгибаемости. Успехи мат. наук. 1951. Т. 7, №5. С. 215–224.

[46] *Franzblau D. S.* Generic rigidity of molecular graphs via ear decomposition. Discrete Appl. Math. 2000. V. 101, No.1-3. P. 131–155.

[47] *Gluck H.* Almost all simply connected closed surfaces are rigid. In the book: Lect. Notes Math. 1975. V. 438. P. 225–239. [Имеется русский перевод в кн.: Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980.]

[48] *Graver J., Servatius B., Servatius H.* Combinatorial Rigidity. Providence: American Mathematical Society, 1993.

[49] *Gromoll D., Klingenberg W., Meyer W.* Riemannsche Geometrie im Großen. 2nd ed. Berlin etc.: Springer, 1975. [Имеется русский перевод 1-го издания: *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1975.]

[50] *Grünbaum B.* Convex Polytopes. 2nd ed. New York etc.: Springer, 2003.

[51] *Grünbaum B.* (1-2-3)-complexes. Geombinatorics. 2003. V. 13, No.2. P. 65–72.

[52] *Hadamard J.* Sur les transformations ponctuelles. Bull. Soc. Math. France. 1906. T. 34. P. 71–84.

[53] *Hodgson C. D., Rivin I., Smith W. D.* A characterization of convex hyperbolic polyhedra and of convex polyhedra inscribed in the sphere. Bull. Am. Math. Soc. 1992. V. 27, No.2. P. 246–251.

[54] *Hodgson C. D., Rivin I.* A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space. Invent. Math. 1993. V. 111, No.1. P. 77–111.

[55] *Ильхамов У., Соколов Д. Д.* Реализуемость линзо-подобных многогранников в псевдо-евклидовом пространстве. Вестн. Моск. ун-та, сер 1. 1990, №2. С. 3–6. [Имеется англ. перевод: *Il'khamov U., Sokolov D. D.* Imbedding of lens-shaped polyhedra in pseudo-Euclidean space. Mosc. Univ. Math. Bull. 1990. V. 45, No.2. P. 5–8.]

[56] *Jacobs D. J.* Generic rigidity in three-dimensional bond-bending networks. J. Phys. A, Math. Gen. 1998. V. 31, No.31. P. 6653–6668.

[57] *John F.* On quasi-isometric mappings. I. Comm. pure appl. math. 1968. V. 21, No.1. P. 77–110.

[58] *Hadamard J.* Leçons de géométrie élémentaire. Partie II: Géométrie dans l'espace. Paris: Colin, 1901. [Имеется русский перевод: *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Ч. 2. М.: Учпедгиз, 1958.]

[59] *Hamilton R. S.* The inverse function theorem of Nash and Moser. Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 1982. V. 7. P. 65-222.

[60] *Kapovich M.* Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups. Progress in Mathematics. V. 183. Boston: Birkhäuser, 2001.

[61] *Krantz S. G., Parks H. R.* The Implicit Function Theorem. History, Theory, and Applications. Boston: Birkhäuser, 2002.

[62] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. 3е изд. М.: ГИТТЛ, 1953.

[63] *Kuiper N.* Spheres polyedriques flexibles dans E^3, d'apres Robert Connelly. In the book: Lect. Notes Math. 1979. V. 710. P. 147–168. [Имеется русский перевод в кн.: Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980.]

[64] *Ladopoulos P.* Sur la mobilitè des polyèdres. Atti Accad. Pontaniana. 1999. T. 48. P. 345–354.

[65] *Laman G.* On graphs and rigidity of plane skeletal structures. J. Engin. Math. 1970. V. 4. P. 331–340.

[66] *Langevin, R., Levitt, G., Rosenberg, H.* Hérissons et multihérissons (enveloppes parametreés par leur application de Gauss). Singularities, Banach Center publ. 1988. V. 20. P. 245–253.

[67] *Legendre A.-M.* Eléments de géométrie. Premièr edition. Paris, 1794.

[68] *Люстерник Л. А.* Выпуклые фигуры и многогранники. М.: ГИТТЛ, 1956. [Имеется англ. перевод: *Lyusternik L. A.* Convex figures and polyhedra. New York: Dover Publications, 1963.]

[69] *Maehara H.* Vector fields and quadratic surfaces. Ryukyu Math. J. 1998. V. 11. P. 53–63.

[70] *Maehara H., Chinen K.* An infinitesimally rigid unit-bar-framework in the plane which contains no triangle. Ryukyu Math. J. 1995. V. 8. P. 37–41.

[71] *Maehara H., Norihide T.* A spatial unit-bar-framework which is rigid and triangle-free. Graphs Comb. 1996. V. 12, no.4. P. 341–344.

[72] *Максимов И. Г.* Погруженные изгибаемые многогранники. Принята к публикации в журнале «Фундам. прикл. мат.».

[73] *Martinez-Maure Y.* Sur les hérissons projectifs (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss). Bull. Sci. Math. 1997. T. 121, No.8. P. 585–601.

[74] *Martinez-Maure Y.* Hedgehogs of constant width and equichordal points. Ann. Pol. Math. 1997. V. 67, No.3. P. 285–288.

[75] *Martinez-Maure Y.* Geometric inequalities for plane hedgehogs. Demonstr. Math. 1999. V. 32, No.1. P. 177–183.

[76] *Martinez-Maure Y.* De nouvelles inégalités géométriques pour les hérissons. Arch. Math. 1999. V. 72, No.6. P. 444–453.

[77] *Martinez-Maure Y.* Indice d'un hérisson: Étude et applications. Publ. Mat., Barc. 2000. V. 44, No.1. P. 237–255.

[78] *Martinez-Maure Y.* Hedgehogs and zonoids. Adv. Math. 2001. V. 158, No.1. P. 1–17.

[79] *Martinez-Maure Y.* A fractal projective hedgehog. Demonstr. Math. 2001. V. 34, No.1. P. 59–63.

[80] *Martinez-Maure Y.* Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. 2001. T. 332, No.1. P. 41–44.

[81] *McMullen P.* The polytope algebra. Adv. Math. 1989. V. 78, No.1. P. 76–130.

[82] *Minkowski H.* Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder. Gött. Nachr. 1897. S. 198–219.

[83] *Милка А. Д.* Что такое геометрия «в целом». М.: Знание, 1986.

[84] *Morelli R.* A theory of polyhedra. Adv. Math. 1993. V. 97, No.1. P. 1–73.

[85] *Nashed M. Z.* Generalized inverse mapping theorems and related applications of generalized inverses in nonlinear analysis. In the book: Nonlinear equations in abstract spaces, Proc. int. Symp., Arlington 1977. 1978. P. 217–252.

[86] *Panina G. Yu.* Virtual polytopes and classical problems of geometry. St. Petersbg. Math. J. 2003. V. 14, No.5. P. 823–834.

[87] *Panina G. Yu.* Rigidity and flexibility of virtual polytopes. Cent. Eur. J. Math. 2003. V. 1, No.2. P. 157–168 (electronic only).

[88] *Penne R.* Isostatic bar and joint frameworks in the plane with irreducible pure conditions. Discr. Appl. Math. 1994. V. 55. P. 37–57.

[89] *Peterson K.* The stress spaces of bipartite frameworks. Pac. J. Math. 2001. V. 197, No.1. P. 173–182.

[90] *Перлова Н. Г.* О соотношении между жёсткостью n-го порядка и аналитической неизгибаемостью. Укр. геом. сб. 1991. Т. 34. С. 98–104. [Имеется англ. перевод: *Perlova N. G.* The relation between k-th order rigidity and analytic nondeformability of surfaces. J. Math. Sci., New York. 1994. V. 69, No.1. P. 900–904.]

[91] *Перлова Н. Г.* О связи между жёсткостью порядка $k > 3$ и аналитической неизгибаемостью поверхностей класса C^1. Мат. физика, анализ и геом. 1995. Т. 2, №3/4. С. 456–461.

[92] *Plastock R.* Homeomorphisms between Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 200. P. 169–183.

[93] *Погорелов А. В.* Новое доказательство неизгибаемости выпуклых многогранников. Успехи мат наук. 1956. Т. 11, вып. 5. С. 207–208.

[94] *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969. [Имеется англ. перевод: *Pogorelov A. V.* Extrinsic geometry of convex surfaces. Providence: American Mathematical Society, 1973.]

[95] *Pourciau B. H.* Global invertibility of nonsmooth mappings. J. math. anal. appl. 1988. V. 131. P. 170–179.

[96] *Pukhlikov A. V.; Khovanskij A. G.* Finitely additive measures of virtual polytopes. St. Petersbg. Math. J. 1993. V. 4, No.2. P. 337–356.

[97] *Rivin I.* A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space. Ann. Math. 1996. V. 143, No.1. P. 51–70.

[98] *Rivin I., Hodgson C. D.* Corrigendum: A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space. Invent. Math. 1994. V. 117, No.2. P. 359.

[99] *Rodrigues L.; Rosenberg H.* Rigidity of certain polyhedra in $\mathbf{R}^3$. Comment. Math. Helv. 2000. V. 75, No.3. P. 478–503.

[100] *Roitman P.* One periodic Bryant surfaces and rigidity for generalized polyhedra. Ph.D. Thesis. Université Pris 7, Paris. 2001.

[101] *Rousset M.* Sur la rigidité de polyèdres hyperboliques en dimension 3: cas de volume fini, cas hyperidéal, cas fuchsien. Bull. Soc. Math. Fr. 2004. T. 132, No.2. P. 233–261.

[102] *Сабитов И. Х.* Локальная теория изгибания поверхностей. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 48. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 196–270. [Имеется англ. перевод: *Sabitov I. Kh.* Local theory on bendings of surfaces. Geometry III. Theory of surfaces. Encycl. Math. Sci. 1992. V. 48. P. 179–250.]

[103] *Сабитов И. Х.* О связях между бесконечно малыми изгибаниями разных порядков. Укр. геометр. сб. 1992. Т. 35. С. 118–124. [Имеется англ. перевод: *Sabitov I. Kh.* On the relations between infinitesimal bendings of different orders. J. Math. Sci., New York. 1994. V. 72, No.4. P. 3237–3241.]

[104] *Сабитов И. Х.* Объём многогранника как функция его метрики. Фундам. прикл. матем. 1996. Т. 2, №4. С. 1235–1246.

[105] *Сабитов И. Х.* Обобщённая формула Герона-Тарталья и некоторые её следствия. Матем. сб. 1998. Т. 189, №10. С. 105–134. [Имеется англ. перевод: *Sabitov I. Kh.* A generalized Heron-Tartaglia formula and some of its consequences. Sb. Math. 1998. V. 189, No.10. P. 1533–1561.]

[106] *Sabitov I. Kh.* The volume as a metric invariant of polyhedra. Discrete Comput. Geom. 1998. V. 20, no.4. P. 405–425.

[107] *Сабитов И. Х.* Объёмы многогранников. М.: МЦНМО, 2002.

[108] *Сабитов И. Х.* Вокруг доказательства леммы Лежандра-Коши. Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, №5. С. 892–919. [Имеется англ. перевод: *Sabitov I. Kh.* Around the proof of the Legendre-Cauchy lemma on convex polygons. Sib. Math. J. 2004. V. 45, No.4. P. 740–762.]

[109] *Sauer R.* Infinitesimale Verbiegungen zueinander projektiver Flächen. Math. Ann. 1935. Bd. 111. S. 71–82.

[110] *Schattschneider D.; Senechal M.* Tilings. In the book: J.Goodman (ed.), Handbook of discrete and computational geometry. Boca Raton, FL: CRC Press, 1997. P. 43–62.

[111] *Schlenker J.-M.* Convex polyhedra in Lorentzian space-forms. Asian J. Math. 2001. V. 5, No.2. P. 327–363.

[112] *Schlenker J.-M.* La conjecture des soufflets. Bourbaki seminar 2002/2003. Exposes 909-923. Paris: Société Mathématique de France. Astérisque. 2004. T. 294. P. 77–95.

[113] *Schlenker J.-M., Souam R.* Higher Schläfli formulas and applications. Compos. Math. 2003. V. 135, No.1. P. 1–24.

[114] *Schneider R.* Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[115] *Schoenberg I. J., Zaremba S. K.* On Cauchy's lemma concerning convex polygons. Can. J. Math. 1967. V. 19. P. 1062–1071.

[116] *Сенькин Е. П.* Однозначная определённость выпуклого многогранника. Успехи мат наук. 1956. Т. 11, вып. 5. С. 211–213.

[117] *Souam R.* Bending invariants for hypersurfaces. Séminaire de théorie spectrale et géomἤtrie. Année 1998–1999. St. Martin D'Hères: Université de Grenoble I, Institut Fourier, Sémin. Théor. Spectrale Géom., Chambéry–Grenoble. 1999. T. 17. P. 105–109.

[118] *Souam R.* The Schläfli formula for polyhedra and piecewise smooth hypersurfaces. Differ. Geom. Appl. 2004. V. 20, No.1. P. 31–45.

[119] *Stachel H.* Higher order flexibility of octahedra. Period. Math. Hung. 1999. V. 39, no.1–3. P. 225–240.

[120] *Stachel H.* Infinitesimal flexibility of higher order for a planar parallel manipulator. In the book: Karáné, G. (ed.) et al. Topics in algebra, analysis and geometry. Proceedings of the Gyula Strommer national memorial conference, Balatonfüred, Hungary, May 1–5, 1999. Budapest: BPR Kiady, 2000. P. 343–353.

[121] *Stachel H.* Flexible cross-polytopes in the Euclidean 4-space. J. Geom. Graph. 2000. V. 4, No.2. P. 159–167.

[122] *Steinitz E.* Polyeder und Raumeneinteilungen. In the book: Encyklopädie der math. Wiss. Bd. 3. Leipzig, 1916. S. 1–139.

[123] *Stoker J. J.* Geometrical problems concerning polyhedra in the large. Comm. Pure and Appl. Math. 1968. V. 21. P. 119–168.

[124] *Tay T.-S., White N., Whiteley W.* Skeletal rigidity of simplicial complexes. I. Eur. J. Comb. 1995. V. 16, No.4. P. 381–403.

[125] *Tay T.-S., White N., Whiteley W.* Skeletal rigidity of simplicial complexes. II. Eur. J. Comb. 1995. V. 16, No.5. P. 503–523.

[126] *Венков Б. А.* Об одном классе эвклидовых многогранников. Вестн. ЛГУ. 1954. №2. Сер. математики, физики и химии. Вып. 1. С. 11–31.

[127] *Волков Ю. А.* О деформациях выпуклого многогранного угла. Успехи мат наук. 1956. Т. 11, вып. 5. С. 209–210.

[128] *Волков Ю. А.* Существование выпуклого многогранника с данной развёрткой. Вестник ЛГУ. 1960. №19. Сер. матем. Вып. 1. С. 33–43. [Имеется англ. перевод: *Volkov Yu. A.* Existence of convex polyhedra with prescribed development. P. 492–505. In the book: *Alexandrov A. D.* Selected Works. Part 2: Intrinsic Geometry of Convex Surfaces. Boca etc.: CRC Press, 2005.]

[129] *Волков Ю. А., Подгорнова Е. Г.* Существование выпуклого многогранника с данной развёрткой. Учёные записки Ташкентского гос. пед. ин-та. 1971. Т. 85.

[130] *Wallace A. H.* Algebraic approximation of curves. Can. J. Math. 1958. V. 10. P. 242–278.

[131] *Walz A. B.* On the Bellows Conjecture. Ph.D. dissertation. Cornell Univ., Ithaca. 2000. 110 p.

[132] *Wegner B.* On the projective invariance of shaky structures in Euclidean space. Acta Mech. 1984. V. 53. P. 163–171.

[133] *Wegner B.* Infinitesimal rigidity of cone-like and cylinder-like frameworks. Acta Mech. 1985. V. 57. P. 253–259.

[134] *Whiteley W.* Infinitesimally rigid polyhedra. I: Statics of frameworks. Trans. Am. Math. Soc. 1984. V. 285. P. 431–465.

[135] *Whiteley W.* Infinitesimal motions of a bipartite framework. Pac. J. Math. 1984. V. 110. P. 233–255.

[136] *Whiteley W.* The projective geometry of rigid frameworks'. In the book: L. Batten (ed.) and C. Baker (ed). Finite Geometries. New York: Marcel Dekker, 1985. P. 353–370.

[137] *Whiteley W.* Rigidity and polarity. I: Statics of sheet structures. Geom. Dedicata. 1987. V. 22. P. 329–362.

[138] *Whiteley W.* Infinitesimally rigid polyhedra. II: Modified spherical frameworks. Trans. Am. Math. Soc. 1988. V. 306, No.1. P. 115–139.

[139] *Whiteley W.* Rigidity and polarity. II: Weaving lines and tensegrity frameworks. Geom. Dedicata. 1989. V. 30, No.3. P. 255–279.

[140] *Whiteley W.* Some matroids from discrete applied geometry. In the book: Bonin J. E. (ed.) et al., Matroid theory. Providence: American Mathematical Society, 1996. Contemp. Math. V. 197. P. 171–311.

[141] *Wunderlich W.* Zur projecttiven Invarianz von Wackelstrukturen. Z. Angew. Math. Mech. 1980. Bd. 60. S. 703–708.

[142] *Wunderlich W.* Projective invariance of shaky structures. Acta Mech. 1982. V. 42. P. 171–181.

[143] *Залгаллер В. А.* О деформациях сферических многоугольников. Успехи мат наук. 1956. Т. 11, вып. 5. С. 177–178.

[144] *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть 2. М.: Наука, 1984. [Имеется англ. перевод: *Zorich V. A.* Mathematical Analysis II. Berlin etc.: Springer, 2004.]

Статья поступила 30 апреля 2005 г.

Александров Виктор Алексеевич
Институт математики им. С.Л.Соболева
Новосибирск–90, 630090, Россия
E-mail: alex@math.nsc.ru