Предисловие

Тема "Геометрия пространств со скалярным произведением" излагается на физическом факультете Новосибирского государственного университета в рамках курса "Основы функционального анализа и теории функций" в конце третьего семестра.

В этой теме систематически развивается геометрическая точка зрения в, казалось бы, чисто аналитических ситуациях. Наличие такой точки зрения позволяет работать интуиции и аналогии, чем, видимо, и объясняется широкое использование такой геометрической точки зрения в самых разнообразных разделах математики и физики.

Автор надеется, что изучая эту тему, студенты увидят аналогии, а порой — и явные повторы, с некоторыми изучавшимися ранее темами. Нам остаётся лишь расставлять акценты.

Например, конечномерные линейные пространства и такие связанные с ними понятия, как линейная зависимость векторов, размерность пространства, подпространство подробно изучались в курсе "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" в первом семестре. В отличие от этого, наше изложение годится и для бесконечномерных пространств.

Понятия нормы, открытого и замкнутого множеств, фундаментальной последовательности и полноты пространства $\mathbb{R}^n$ знакомы слушателям по курсу математического анализа (второй семестр). Мы вводим эти понятия в бесконечномерной ситуации.

Неравенство Коши—Буняковского, задача о наилучшем приближении или о проектировании на конечномерные подпространства, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля, замкнутость ортонормированной системы на другом языке и в более частной ситуации были рассмотрены в рамках темы "Ряды Фурье" настоящего курса в начале третьего семестра.

Материал, вошедший в данное пособие, традиционно входит в учебники по функциональному анализу. Появление этого пособия вызвано стремлением автора облегчить работу студентов, выделить из обилия учебников ту (в общем-то небольшую) минимально необходимую цепочку логически связанных между собой фактов, которые, с одной стороны, реально излагаются на лекциях (и, тем самым, требуются на экзамене), а с другой — составляют фундамент, без наличия которого невозможно эффективное освоение базовых физических дисциплин.

Коротко прокомментируем книги, использованные при написании настоящего пособия и рекомендуемые для более глубокого ознакомления с предметом.

Наше изложение наиболее близко к принятому в следующем учебнике, давно ставшем классическим:

1. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. — Изд. 6-е, испр. — М.: Наука, 1989.

Следующий прекрасный современный учебник, охватывает все разделы данного пособия. Изложение очень сжатое. Местами требует более высого уровня абстракции, чем принят в настоящем курсе. Может использоваться как задачник.

2. А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. Теоремы и задачи функционального анализа. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1988.

Изложение, ориентированное на физиков, и снабжённое физическими примерами, читатель найдёт в книгах:

3. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ: Пер. с англ. — М.: Мир, 1978.

4. Р. Рихтмайер. Принципы современной математической физики: Пер. с англ. — М.: Мир, 1982.

Следующая книга, написанная для студентов, обучающихся по специальности “Прикладная математика”, содержит изложение как основ функционального анализа, так и тех его разделов, которые непосредственно примыкают к прикладным исследованиям. Содержит задачи для самостоятельного решения.

5. В. А. Треногин. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.

В качестве источника задач использовались в основном следующие книги:

6. А. Б. Антоневич, П. Н. Князев, Я. В. Радыно. Задачи и упражнения по функциональному анализу. — Минск: Вышейшая школа, 1978.

7. Задания к лабораторным работам по курсу “Функциональный анализ и интегральные уравнения” для студентов специальности “математика” /А. Я. Дороговцев, С. Д. Ивасишен, Ю. Г. Кондратьев, А. Ю. Константинов. Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1986.

§ 1. Линейные пространства

Непустое множество L элементов $x, y, z, \ldots$ произвольной природы называется *линейным* или *векторным пространством*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

I. Для любых двух элементов $x, y \in L$ однозначно определён третий элемент $z \in L$, называемый их *суммой* и обозначаемый $x + y$, причем выполняются следующие свойства

1) $x + y = y + x$ [коммутативность];

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ [ассоциативность];

3) в L существует такой элемент 0, что $x + 0 = x$ для всех $x \in L$ [существование нуля];

4) для каждого $x \in L$ существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = 0$ [существование противоположного элемента].

[Эти четыре свойства можно было высказать короче: в L введена операция сложения, превращающая L в абелеву группу.]

II. Для любого числа α и любого элемента $x \in L$ определён элемент $\alpha x \in L$, называемый *произведением* элемента x на число α, причём выполняются следующие свойства

5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

6) $1 \cdot x = x$;

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

В зависимости от того, какой запас чисел используется (все комплексные или только действительные), различают комплексные или действительные пространства.

Примеры линейных пространств.

1). Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, состоящие из всевозможных (упорядоченных) наборов из n чисел (соответственно — действительных или комплексных). Сложение и умножение определяются формулами

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

С этими пространствами вы достаточно хорошо знакомы по курсам алгебры и анализа.

2). Непрерывные (действительные или комплексные) функции на некотором отрезке $[a, b]$ с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа образуют линейное пространство $C[a, b]$, являющееся одним из важнейших в анализе и уже встречавшееся вам, например, при изучении функциональных рядов.

3). Пространство быстроубывающих функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, с которым вы работали, изучая преобразование Фурье.

4). Пространство l_2, в котором элементами служат последовательности чисел (действительных или комплексных)

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, \tag{1}$$

с операциями

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) + (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = \\ = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots).$$

является линейным пространством. Тот факт, что сумма двух последовательностей, удовлетворяющих условию (1), также удовлетворяет этому условию, вытекает из элементарного неравенства

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2.$$

Конечный набор элементов $x, y, \dots, z$ линейного пространства L называется *линейно зависимым*, а сами элементы — *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, не все равные нулю, что

$$\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z = 0.$$

В противном случае эти элементы называются *линейно независимыми.* Иными словами, элементы $x, y, \dots, z$ называются линейно независимыми, если из равенства

$$\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z = 0$$

вытекает, что $\alpha = \beta = \dots = \gamma = 0$.

Бесконечная система элементов пространства L называется *линейно независимой*, если любая её конечная подсистема линейно независима.

Если в пространстве L можно найти n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов этого пространства линейно зависимы, то говорят, что L имеет *размерность* n. Если же в L можно указать систему из произвольного конечного числи линейно независимых элементов, то говорят, что пространство L *бесконечномерно*.

Легко понять, что в приведённых выше примерах 2)–4) пространства бесконечномерны, а в примере 1) — имеют размерность n.

Непустое подмножество L' линейного пространства L называется *подпространством*, если оно само образует линейное пространство по отношению к опрелелённым в L операциям сложения и умножения на число.

Иначе говоря, $L' \subset L$ есть подпространство, если из $x' \in L'$, $y' \in L'$ следует, что $\alpha x' + \beta y' \in L'$ при любых числах α, β.

Примеры подпространств.

1). В любом линейном пространстве L есть два “тривиальных” подпространства: первое состоит из одного нулевого вектора (и поэтому называется нулевым подпространством), второе совпадает со всем L.

2). Множество всех многочленов на $[a, b]$ есть подпространство в $C[a, b]$.

3). Пространство быстроубывающих функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ является подпространством в $\mathrm{C}(\mathbb{R})$.

Задачи

1. Используя только аксиомы линейного пространства доказать, что в любом линейном пространстве L

а) нулевой элемент единственен;

б) для любого $x \in L$ противоположный элемент $-x$ единственен;

в) для любого $x \in L$ выполняется равенство $-x = (-1) \cdot x$, т. е. противоположный элемент получается из исходного умножением на минус единицу.

2. Найти размерность линейного пространства M_{mn} прямоугольных матриц размера $m \times n$.

3. Во множестве $\mathbb{R}^+$ положительных чисел (элементов) введем операции следующим способом. Под "суммой" элементов $x, y \in \mathbb{R}^+$ будем понимать их произведение, а под "произведением" элемента $x \in \mathbb{R}^+$ на вещественное число α будем понимать элемент x^α. Покажите, что при таком определении операций $\mathbb{R}^+$ превратилось в линейное пространство. Найдите его размерность. Как выглядят в $\mathbb{R}^+$ "нулевой" и "противоположный" элементы ?

4. *Кубом* в пространстве l_2 будем называть совокупность таких векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_2$, каждая координата x_n которых удовлетворяет неравенству $|x_n| < 1$. Доказать, что любой выпуклый многоугольник может быть получен в результате пересечения этого куба с подходящим образом подобранной двумерной плоскостью в l_2. Можно ли таким же образом получить круг ?

§ 2. Нормированные линейные пространства

Нормой в линейном пространстве L называется функционал [т.е. отображение $\|\cdot\| : L \to [0, +\infty)$], удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\|x\| \geq 0$, причём $\|x\| = 0$, только при $x = 0$ [положительная определённость нормы];

2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in L$ [неравенство треугольника];

3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ для любого $x \in L$ и любого числа α [положительная однородность нормы].

Примеры норм.

1). В пространстве $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ любая из следующих формул определяет норму

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2};$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|;$$

$$\|x\|_0 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

2). Формула

$$\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)|$$

задаёт норму в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$.

3). В пространстве быстроубывающих функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ норму можно задать с помощью равенства

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 \, dt}.$$

4). В l_2 норму зададим с помощью равенства

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Говорят, что последовательность точек x_n нормированного линейного пространства L *сходится* к точке x, если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Обозначение используется обычное: $x_n \to x$.

Точка $x \in L$ называется *предельной точкой* множества M, если существует последовательность точек множества M, отличных от x, сходящаяся к x.

Замыканием множества M называется объединение множества M и всех его предельных точек.

Множество называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием. Другими словами, множество M замкнуто, если из того, что последовательность точек x_n множества M сходится к точке x следует, что x принадлежит M.

Множество называется *плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством.

Пространство называется *сепарабельным*, если в нём существует плотное счётное подмножество. [Напомним, что множество называется *счётным*, если оно допускает взаимно однозначное отображение на множество натуральных чисел (и в этом смысле не очень обширно). Из курса анализа вы знаете, что множество рациональных чисел счётно, а множество вещественных чисел — не счётно.]

До сих пор наше изложение следовало девизу “всё это вы и так знаете, обратите лишь внимание на то, что те же понятия работают и в бесконечномерном случае”. Сейчас мы в первый раз столкнёмся с ситуацией, которая не имеет аналогов в конечномерном случае. Другой пример такого рода приведён в задаче 8.

Пример незамкнутого подпространства. Подпространство пространства $C[0,2\pi]$, состоящее из всех многочленов, незамкнуто.

В самом деле, пусть $f(x)=\sin x$. Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа можем записать

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $\xi\in[0,2\pi]$. Обозначим через $P_n(x)$ сумму первых $n+1$ членов в правой части этой формулы. Тогда $P_n(x)$ есть многочлен степени n, причём

$$\|f-P_n\|=\sup_{x\in[0,2\pi]}|\sin x-P_n(x)|\le$$

$$\le\sup_{x,\xi\in[0,2\pi]}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}\sin\xi\right|\le\frac{(2\pi)^{(n+1)}}{(n+1)!}\to 0$$

при $n\to\infty$, т. к. $a^n/n!\to 0$ при $n\to\infty$, для любого $a>0$.

Окончательно получаем, что последовательность P_n лежит в подпространстве многочленов, сходится (к функции $\sin x$), но предельная функция не лежит в пространстве многочленов. Следовательно, рассматриваемое подпространство незамкнуто.

Последовательность точек x_n нормированного линейного пространства L называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер n_0 такой, что для всех $m,n>n_0$ выполняется неравенство $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$.

Несложно показать, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Обратное не всегда верно. В приведённом выше примере последовательность P_n фундаментальна (хотя бы потому, что сходится). Но если бы мы работали в линейном пространстве многочленов, забыв о существовании объемлющего пространства $C[0,2\pi]$, то она не была бы сходящейся: иначе у неё было бы два предела — синус и некоторый многочлен, что невозможно. Причина этого обстоятельства в том, что мы из “хорошего” пространства $C[0,2\pi]$ выбросили часть функций, так что в оставшейся части образовались “дырки” одной из которых и является синус. Ещё более наглядное представление о пространствах, в которых не всякая фундаментальная последовательность сходится даёт множество рациональных чисел, рассматриваемое как подмножество $\mathbb{R}^1$.

“Недырявые” пространства наиболее удобны в работе. Поэтому для них придуман специальный термин: линейное нормированное пространство L называют *полным*, если всякая его фундаментальная последовательность сходится.

Задачи

5. Докажите, что в линейном нормированном пространстве всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

6. Докажите, что в линейном нормированном пространстве всякая последовательность имеет не более одного предела.

7. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. [*Ограниченным* называется множество, содержащееся в шаре некоторого конечного радиуса.]

8. Докажите, что шар единичного радиуса в l_2 содержит бесконечно много попарно непересекающихся открытых шаров радиуса $\sqrt{2}/4$. [*Открытым шаром* радиуса r с центром в точке x линейного нормированного пространства L называется совокупность тех точек $y \in L$, для которых справедливо неравенство $\|x - y\| < r$.]

9. Рассмотрим пространство всех ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ действительных чисел с операциями

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

и нормой

$$\|x\| = \sup_n |x_n|.$$

Докажите, что оно не является сепарабельным.

§ 3. Лебеговские функциональные пространства

Пусть $X \in \mathbb{R}^n$, $1 \le p < +\infty$. *Лебеговским функциональным пространством* $L_p(X)$ называется совокупность всех вещественно-значных (соответственно — комплексно-значных) измеримых по Лебегу функций $f : X \to \mathbb{R}$ (соответственно — $f : X \to \mathbb{C}$), таких, что

$|f|^p$ интегрируема на X, т.е.

$$\int_X |f(x)|^p\,dx < +\infty.$$

Число

$$\|f\|_{L_p(X)} = \left\{\int_X |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \tag{2}$$

называется *нормой* функции f в пространстве $L_p(X)$.

Обсудим наиболее важные для последующего изложения свойства лебеговских пространств.

1). **(Неравенство Гёльдера)**. *Пусть* $p > 1$, $q > 1$, $1/p+1/q = 1$ *и* $f \in L_p(X)$, $g \in L_q(X)$. *Тогда* $fg \in L_1(X)$ *и выполнено неравенство* $\|fg\|_{L_1(X)} \le \|f\|_{L_p(X)}\|g\|_{L_q(X)}$, *т. е.*

$$\int_X |f(x)g(x)|\,dx \le \left\{\int_X |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \left\{\int_X |g(x)|^q\,dx\right\}^{1/q}.$$

Доказательство неравенства Гёльдера будет дано в следующем параграфе, а здесь мы продолжим перечисление свойств лебеговских пространств.

2). **(Неравенство Минковского)**. *Если* $p \ge 1$ *и* $f, g \in L_p(X)$, *то* $f+g \in L_p(X)$, *и имеет место неравенство* $\|f+g\|_{L_p(X)} \le \|f\|_{L_p(X)} + \|g\|_{L_p(X)}$, *т. е.*

$$\left\{\int_X |f(x)+g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \le \left\{\int_X |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_X |g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

Приступая к доказательству неравенства Минковского, заметим, что при $p = 1$ оно очевидно. Если $p > 1$, то можем написать

$$\int_X |f(x)+g(x)|^p\,dx \le$$
$$\le \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,dx + \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\,dx.$$

Найдём положительное число q из условия $1/p + 1/q = 1$ и применим неравенство Гёльдера к каждому из интегралов, стоящих в правой части последней формулы. Тогда

$$\int_X |f(x)+g(x)|^p\,dx \le$$

$$\le \left\{\int_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right\}^{1/q} \left\{\int_X |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{\int_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right\}^{1/q} \left\{\int_X |g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{\int_X |f(x)+g(x)|^p\,dx\right\}^{1/q} \left[\|f\|_{L_p(X)} + \|g\|_{L_p(X)}\right].$$

Последнее равенство здесь написано в силу того, что $q(p-1)=p$.

Разделив начальный и конечный члены полученного неравенства на

$$\left\{\int_X |f(x)+g(x)|^p\,dx\right\}^{1/q}$$

и учтя, что $1-1/q=1/p$, получим

$$\left\{\int_X |f(x)+g(x)|^p\,dx\right\}^{1-1/q} = \|f+g\|_{L_p(X)} \le \|f\|_{L_p(X)} + \|g\|_{L_p(X)},$$

что и завершает доказательство неравенства Минковского.

Следующее свойство лебеговских функциональных пространств существенно опирается на неравенство Минковского:

3). *Для любого $p\ge 1$ пространство $L_p(X)$ с введённой выше нормой $\|\cdot\|_{L_p(X)}$ является линейным нормированным пространством.*

Для доказательства заметим, что если $f,g\in L_p(X)$, то для любого числа α функция αf лежит в $L_p(X)$ (что очевидно), и $f+g$ лежит в $L_p(X)$ (в соответствии с неравенством Минковского). Неотрицательность нормы $\|\cdot\|_{L_p(X)}$ очевидна. Условие " $\|f\|_{L_p(X)}=0$ только при $f=0$" выполняется в силу принятого в теории интеграла Лебега соглашения, что функция f равна нулю на множестве X если и только если $f(x)=0$ для почти всех $x\in X$. Неравенство треугольника для нормы $\|\cdot\|_{L_p(X)}$ выполняется в силу неравенства Минковского. Положительная однородность нормы $\|\cdot\|_{L_p(X)}$ видна непосредственно из определения (2).

Конструкция интеграла Лебега ценна не столько тем, что она позволяет расширить класс интегрируемых функций по сравнению с интегралом Римана (известны ещё более общие конструкции интеграла), сколько тем, что интеграл Лебега обладает наиболее естественными и удобными свойствами. Одно из них, принимаемое нами без доказательства, таково:

4). **(Полнота лебеговских пространств)**. *Для любого* $p \geq 1$ *линейное нормированное пространство* $L_p(X)$ *является полным*, другими словами — всякая фундаментальная последовательность функций из $L_p(X)$ сходится к некоторой функции из $L_p(X)$ или — , ещё более подробно, если $f_k \in L_p(X)$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер n_o такой, что для всех $k, l \geq n_0$ выполняется неравенство $\|f_k - f_l\|_{L_p(X)} < \varepsilon$, то существует функция $f \in L_p(X)$ такая, что $\|f_k - f\|_{L_p(X)} \to 0$ при $k \to \infty$.

В случае, когда X совпадает с отрезком во множестве вещественных чисел, мы неоднократно пользовались следующим свойством при изучении рядов Фурье. Сейчас мы сформулируем его в общем виде без доказательства.

5). **(Плотность бесконечно дифференцируемых функций в $L_p(X)$)**. *Для любого* $p \geq 1$ *множество бесконечно дифференцируемых функций плотно в* $L_p(X)$, иными словами — для любой функции $f \in L_p(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся функция $f_\varepsilon \in C^\infty \cap L_p(X)$ такая, что $\|f - f_\varepsilon\|_{L_p(X)} < \varepsilon$.

К свойству 5) тесно примыкает последнее из интересующих нас свойств лебеговских пространств, которое мы также приведём без доказательства:

6). **(Сепарабельность лебеговских пространств)**. *Для любого* $p \geq 1$ *пространство* $L_p(X)$ *сепарабельно*, иначе говоря, в $L_p(X)$ существует счётное плотное множество функций.

Задачи

10. Бесконечно дифференцируемую функцию $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называют *усредняющим ядром Соболева*, если она обладает следующими свойствами:

а). $\omega(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$;

б). $\omega(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x| \geq 1$;

в). $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x)\, dx = 1$.

Для функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и положительного числа ε определим новую функцию $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с помощью равенства

$$f_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \omega\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) f(y)\,dy.$$

Докажите, что функция f_ε бесконечно дифференцируема и $\|f_\varepsilon - f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Обратите внимание, что тем самым вы доказали плотность бесконечно дифференцируемых функций в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)$.

11. Используя плотность бесконечно дифференцируемых функций в пространстве $L_1([a,b])$ и теорему Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами, докажите, что множество алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами плотно в $L_1([a,b])$. Докажите, что множество алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами счётно. Обратите внимание, что тем самым вы доказали сепарабельность пространства $L_1([a,b])$.

§ 4. Доказательство неравенства Гёльдера

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $p > 1$, $q > 1$ и $1/p + 1/q = 1$. Тогда для любых неотрицательных вещественных чисел a и b справедливо неравенство*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} - x,$$

определённую для положительных вещественных значений x. Поскольку $f'(x) = x^{p-1} - 1$, то f' зануляется в единственной точке — $x = 1$. Учитывая, что

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \frac{1}{q} > 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

а $f(1) = 1/p + 1/q - 1 = 0$, находим, что $f(x) \ge 0$ для всех $x \ge 0$. Полагая в последнем неравенстве $x = ab^{-q/p}$, получим

$$f(ab^{-q/p}) = \frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q} - ab^{-q/p} \ge 0$$

или

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab^{q-q/p} = ab.$$

Последняя формула, написанная с учётом того, что $q - q/p = q - q(1 - 1/q) = 1$ и завершает доказательство леммы.

Приступая к доказательству неравенства Гёльдера, введём обозначения

$$A = \left\{ \int_X |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}, \quad B = \left\{ \int_X |g(x)|^q \, dx \right\}^{1/q}.$$

Как известно, интеграл Лебега от неотрицательной функции равен нулю если и только если эта функция почти всюду равна нулю. Поэтому если $A = 0$, то функция $|f|^p$ (а значит — и f) равняется нулю почти всюду в X. Но тогда и функция fg равняется нулю почти всюду в X, а значит —

$$\int_X f(x)g(x)\, dx = 0.$$

Таким образом, в случае $A = 0$ обе части неравенства Гёльдера обращаются в ноль и поэтому оно справедливо.

Случай $B = 0$ рассматривается аналогично.

Если же $A \neq 0$ и $B \neq 0$, то подставив в неравенство $a^p/p + b^q/q \geq ab$ значения $a = |f(x)|/A$, $b = |g(x)|/B$ и проинтегрировав по X, получим

$$\frac{\int_X |f(x)g(x)|\, dx}{AB} \leq \frac{\int_X |f(x)|^p \, dx}{pA^p} + \frac{\int_X |g(x)|^q \, dx}{qB^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

что с точностью до обозначений совпадает с неравенством Гёльдера.

Задача

12. Пусть $p > 1$, $q > 1$ и $1/p + 1/q = 1$. Докажите, что для любых комплексных чисел $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ справедливы следующие *неравенство Гёльдера для сумм*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right\}^{1/q}$$

и *неравенство Минковского для сумм*

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right\}^{1/p} \le \left\{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right\}^{1/p} + \left\{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right\}^{1/p}.$$

§ 5. Линейные пространства со скалярным произведением: евклидовы и унитарные

Скалярным произведением в линейном пространстве L называется функция (x, y), принимающая числовые значения, определённая для каждой пары элементов $x, y \in L$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) для любых трёх элементов x_1, x_2 и y пространства L и любых чисел α_1, α_2 справедливо равенство $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y)$ [линейность скалярного произведения по первому аргументу];

2) для любых $x, y \in L$ справедливо равенство $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где черта означает комплексное сопряжение [эрмитова симметричность];

3) для любого $x \in L$ имеем $(x, x) \geq 0$, причём $(x, x) = 0$ только при $x = 0$ [положительная определённость скалярного произведения].

Действительное линейное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым*, комплексное — *унитарным.*

Примеры пространств со скалярным произведением.

1). Формула

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

задаёт скалярное произведение в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

2). Формула

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y_k}$$

задаёт скалярное произведение в пространстве l_2.

3). В пространстве $L_2(X)$ скалярное произведение может быть задано по формуле

$$(f, g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Следующая лемма выражает одно из важнейших свойств скалярного произведения.

Лемма (неравенство Коши—Буняковского). *Для любых элементов x и y линейного пространства со скалярным произведением выполняется неравенство*

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y).$$

Доказательство. Допустим сначала, что x и y таковы, что (x,y) является вещественным числом. Тогда для любого вещественного α получим

$$0 \leq (x+\alpha y, x+\alpha y) = (x,x) + 2\alpha(x,y) + \alpha^2(y,y).$$

Следовательно, квадратный трёхчлен от переменной α, стоящий в правой части последней формулы, имеет не более одного вещественного корня. Значит его дискриминант неположителен, т. е. $(x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leq 0$, что и доказывает неравенство Коши—Буняковского в рассматриваемом случае.

Пусть теперь (x,y) является комплексным числом. Запишем его в тригонометрическом виде $(x,y) = re^{i\varphi}$ и введём в рассмотрение вспомогательный вектор $\tilde{x} = e^{-i\varphi}x$. Тогда $(\tilde{x},y) = e^{-i\varphi}(x,y) = e^{-i\varphi}e^{i\varphi}r = r$, а значит $(\tilde{x},y)$ является вещественным числом. Поэтому, используя доказанный выше частный случай неравенства Коши—Буняковского и пользуясь тем, что $(\tilde{x},\tilde{x}) = e^{-i\varphi}(x,\tilde{x}) = e^{-i\varphi}\overline{(\tilde{x},x)} = e^{-i\varphi}e^{i\varphi}\overline{(x,x)} = (x,x)$, будем иметь

$$|(x,y)|^2 = r^2 = (\tilde{x},y)^2 \leq (\tilde{x},\tilde{x})(y,y) = (x,x)(y,y).$$

Лемма доказана.

Следующая лемма показывает, что всякое линейное пространство со скалярным произведением может быть превращено в нормированное.

Лемма. *Величина $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ обладает свойствами нормы.*

Доказательство. Неотрицательность и положительная однородность функционала $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ очевидны. Следующие вычисления, существенно использующие неравенство Коши-Буняковского, показывают, что для него выполнено также и неравенство треугольника:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (y,x) + (x,y) + (y,y) =$$
$$= (x,x) + 2\operatorname{Re}(x,y) + (y,y) \leq$$
$$\leq (x,x) + 2\sqrt{(x,x)(y,y)} + (y,y) = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Замечание. *Скалярное произведение является функцией непрерывной по первому аргументу, а именно: если $x_n \to x$, то $(x_n, y) \to (x, y)$ для любого вектора y.*

Доказательство немедленно вытекает из неравенства Коши-Буняковского: $|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| \leq \|x_n - x\| \|y\| \to 0$.

Следующая лемма выражает ещё одно полезное свойство пространств со скалярным произведением.

Лемма (равенство параллелограмма). *Если норма в линейном пространстве L порождена скалярным произведением, то для любых $x, y \in L$ выполняется равенство*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \tag{3}$$

называемое равенством параллелограмма.

Доказательство проводится прямым вычислением:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$
$$= (x, x+y) + (y, x+y) + (x, x-y) - (y, x-y) =$$
$$= \overline{(x+y, x)} + \overline{(x+y, y)} + \overline{(x-y, x)} - \overline{(x-y, y)} =$$
$$= \overline{(x,x)} + \overline{(y,x)} + \overline{(x,y)} + \overline{(y,y)} + \overline{(x,x)} - \overline{(y,x)} - \overline{(x,y)} + \overline{(y,y)} =$$
$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Заметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $x, y \in L$, диагонали задаются векторами $x+y$ и $x-y$. Поэтому равенство (3) является бесконечномерным обобщением следующего известного из школьного курса планиметрии факта: *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.*

Можно показать, что и наоборот, если в нормированном линейном пространстве выполняется равенство параллелограмма, то в нём можно ввести такое скалярное произведение, что будет справедливо равенство $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, т. е. можно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой. Интересующиеся могут найти доказательство этого факта, например, в учебнике А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина.

Пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым*, если оно полно относительно нормы $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Задачи

13. Докажите, что в унитарном пространстве справедливо равенство

$$(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \|x + e^{2\pi ik/N}y\|^2 e^{2\pi ik/N} \quad \text{при} \quad N \geq 3.$$

14. Докажите, что в унитарном пространстве справедливо равенство

$$(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|x + e^{i\theta}y\|^2 e^{i\theta}\, d\theta.$$

15. Докажите, что в унитарном пространстве справедливо так называемое *поляризационное тождество*

$$(x,y) = \frac{1}{4}[(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)].$$

16. Докажите, что в пространстве $C[a,b]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства.

17. Докажите, что в пространстве $L_p[a,b]$ можно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства, если и только если $p = 2$.

§ 6. Процесс ортогонализации Грама—Шмидта

Векторы x и y пространства со скалярным произведением L называются *ортогональными*, если $(x,y) = 0$. В этом случае пишут $x \perp y$.

Процесс ортогонализации Грама—Шмидта позволяет превратить линейно независимую систему векторов в ортонормированную. Вы уже встречались с ним в курсе линейной алгебры. Это обстоятельство позволяет нам сразу перейти к формальному изложению сути дела.

Теорема. *Если* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *— счётная система линейно независимых векторов в линейном пространстве со скалярным произведением* L*, то новые последовательности*

$$
\begin{array}{ll}
y_1 = x_1 & z_1 = y_1/\|y_1\| \\
y_2 = x_2 - (x_2, z_1)z_1 & z_2 = y_2/\|y_2\| \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
y_n = x_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(x_n, z_k)z_k & z_n = y_n/\|y_n\| \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

обладают следующими свойствами:

1) система $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *ортонормирована, т. е. любые два её вектора ортогональны и каждый вектор имеет единичную длину;*

2) для любого $n \in \mathbb{N}$ *линейная оболочка векторов* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *совпадает с линейной оболочкой векторов* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*.*

Доказательство. Поскольку норма каждого из векторов z_n, очевидно, равна единице, то для доказательства первого утверждения достаточно убедиться, что $(z_m, z_n) = 0$ при любых $m \neq n$. Для этого достаточно проверить, что $(y_m, z_n) = 0$ при любых $n < m$.

Так как $(y_2, z_1) = (x_2 - (x_2, z_1)z_1, z_1) = (x_2, z_1) - (x_2, z_1)(z_1, z_1) = (x_2, z_1) - (x_2, z_1) = 0$, то наше утверждение верно для $n = 1$, $m = 2$. Допустим, что оно верно для всех $n < m \leq k$, где k — некоторое натуральное число. Убедимся, что оно верно и для всех $n < k + 1$:

$$
(y_{k+1}, z_n) = (x_{k+1} - \sum_{p=1}^{k}(x_{k+1}, z_p)z_p, z_n) =
$$

$$
= (x_{k+1}, z_n) - \sum_{p=1}^{k}(x_{k+1}, z_p)(z_p, z_n) = (x_{k+1}, z_n) - (x_{k+1}, z_n) = 0.
$$

В силу метода математической индукции, первое утверждение теоремы доказано.

Приступая к доказательству второго утверждения теоремы, обозначим через $L[w_1, w_2, \ldots, w_k]$, линейную оболочку векторов w_1, $w_2, \ldots, w_k$. Поскольку каждый из векторов z_1, z_2, $\ldots$, z_n является линейной комбинацией векторов x_1, x_2, $\ldots$, x_n, то, очевидно, $L[z_1, z_2, \ldots, z_n] \subset L[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Противоположное включение докажем с помощью индукции. Базой индукции будет очевидное включение $L[z_1] \supset L[x_1]$. Чтобы сделать шаг индукции, допустим, что для некоторого k справедливо включение $L[z_1, \ldots, z_k] \supset L[x_1, \ldots, x_k]$ и убедимся, что оно же имеет место и для номера $k+1$. Для этого достаточно проверить, что $x_{k+1} \in L[z_1, \ldots, z_{k+1}]$. Но это непосредственно вытекает из следующей формулы, написанной с учётом предположения индукции:

$$x_{k+1} = y_{k+1} + \sum_{p=1}^{k}(x_{k+1}, z_p)z_p =$$

$$= \|z_{k+1}\|z_{k+1} + \sum_{p=1}^{k}(x_{k+1}, z_p)z_p \in L[z_1, \ldots, z_{k+1}].$$

Теорема доказана.

Для ненулевых векторов x и y евклидова пространства введём понятие *угла*, как такого числа φ из интервала $[0, \pi]$, для которого выполняется равенство

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}.$$

Ясно, что x и y ортогональны если и только если $\varphi = \pi/2$.

Задачи

18. Применяя процесс ортогонализации Грама — Шмидта, ортогонализуйте мономы 1,x,x^2 и x^3 в следующих пространствах:

а) пространстве функций $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}\,dx;$$

б) пространстве функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx.$$

19. Примените процесс ортогонализации Грама — Шмидта к последовательности мономов $1, z, z^2, \ldots$ в пространствах со следую-

щими скалярными произведениями:

$$\text{а)} \qquad (f,g) = \iint\limits_{|z|\le R} f(z)\overline{g(z)}\,dxdy;$$

$$\text{б)} \qquad (f,g) = \iint\limits_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)}e^{-|z|^2}\,dxdy.$$

Здесь подразумевается, что x и y являются соответственно вещественной и мнимой частями комплексного числа z.

20. Предполагая, что $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < 1$, ортонормируйте n кусочно—постоянных функций

$$x_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le t \le t_k; \\ 0, & \text{если } t_k < t \le 1, \end{cases}$$

(k=1,2,...,n) в евклидовом пространстве $L_2[0,1]$.

21. Найдите углы треугольника, образованного элементами $x_1(t) \equiv 0, x_2(t) \equiv \sin \pi t, x_3(t) \equiv \cos \pi t$ в евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$.

22. Найдите углы треугольника, образованного векторами $x_1(t) \equiv 0, x_2(t) \equiv t, x_3(t) \equiv t^2$ в евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$.

23. Следуя Н. Винеру, определим в пространстве $L_2[0,+\infty)$ кривую $\mathbb{R} \ni \alpha \mapsto f_\alpha \in L_2[0,+\infty)$, где

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le t \le \alpha; \\ 0, & \text{если} \quad t > \alpha, \end{cases}$$

возникающую при изучении броуновского движения. Найдите углы между двумя хордами кривой f_α, если:

а) хорды имеют общий конец и направлены в разные стороны;

б) хорды имеют общий конец и направлены в одну сторону.

§ 7. Приближение векторами подпространства и ортогональное проектирование

Если S — подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением L, то вектор $x \in S$ называется *вектором наилучшего приближения* для вектора $y \in L$ посредством векторов подпространства S, или *ближайшим* к y вектором подпростарнства S, если для любого вектора $z \in S$ выполнено неравенство $\|y - x\| \leq \|y - z\|$. Другими словами, $x \in S$ называется ближайшим к y вектором, если

$$\|y - x\| = \inf_{z \in S} \|y - z\|.$$

Лемма. *Пусть H — гильбертово пространство, S — его замкнутое подпространство, и пусть $y \in H$. Тогда в S существует единственный вектор x, ближайший к y.*

Доказательство. Пусть

$$d = \inf_{x \in S} \|y - x\|.$$

Выберем последовательность $x_1, x_2, \ldots$ векторов из S, такую, что $\|y - x_n\| \to d$.

Применив равенство параллелограмма к векторам $y - x_m$ и $y - x_n$, получим

$$\begin{gathered} \|x_n - x_m\|^2 = \|(y - x_m) - (y - x_n)\|^2 = \\ = 2\|y - x_m\|^2 + 2\|y - x_n\|^2 - \|2y - x_m - x_n\|^2. \end{gathered} \tag{4}$$

Так как S является подпространством, то $\frac{1}{2}(x_m + x_n) \in S$, а значит

$$\|2y - x_m - x_n\|^2 = 4\|y - \frac{x_m + x_n}{2}\|^2 \geq 4d^2.$$

С другой стороны, если m и n достаточно велики, то $\|y - x_m\|^2 \leq d^2 + \varepsilon$ и $\|y - x_n\|^2 \leq d^2 + \varepsilon$. С учётом трёх последних неравенств, из (4) получаем $\|x_n - x_m\|^2 \leq 4(d^2 + \varepsilon) - 4d^2 = 4\varepsilon$.

Таким образом, последовательность $x_1, x_2, \ldots$ фундаментальна. В силу полноты пространства H она сходится к некоторому вектору $x \in H$. Но так как S замкнуто, то x содержится в S. Воспользовавшись известной нам непрерывностью скалярного произведения (а значит и нормы), получим $\|y - x\| = d$. Тем самым существование ближайшего элемента доказано.

Единственность вытекает опять же из равенства параллелограмма. В самом деле, если $x \in S$ и $\widetilde{x} \in S$ таковы, что $d = \|y-x\| = \|y-\widetilde{x}\|$, то $\|x-\widetilde{x}\|^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|\widetilde{x}-y\|^2 - \|2y-x-\widetilde{x}\|^2 \le 4d^2 - 4d^2 = 0$. Лемма доказана.

Отметим, что из доказательства очевидно, что утверждение леммы вообще говоря перестаёт быть верным для неполных пространств H и незамкнутых подпространств S.

Если S — подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением L, то вектор $x \in S$ называется *ортогональной проекцией* вектора $y \in L$ на подпространство S, если вектор $y - x$ ортогонален S, т.е. если $y - x \perp z$ для любого $z \in S$.

Следующее утверждение показывает, что ортогональная проекция и вектор наилучшего приближения — это одно и то же.

Лемма. *Если S — подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением L и $y \in L$, то следующие утверждения эквивалетны:*

а) вектор $x \in S$ является ортогональной проекцией вектора y на подпространство S;

б) $x \in S$ является ближайшим к y вектором подпространства S.

Доказательство основано на вычислении

$$\begin{aligned} \|y-z\|^2 &= (y-z, y-z) = (y-x+(x-z), y-x+(x-z)) = \\ &= (y-x, y-x) + (y-x, x-z) + (x-z, y-x) + (x-z, x-z) = \\ &= \|y-x\|^2 + 2\operatorname{Re}(y-x, x-z) + \|x-z\|^2, \end{aligned} \tag{5}$$

справедливом для любых $x, y, z \in L$.

В самом деле, если $x \in S$ является ортогональной проекцией вектора y на S, то средний член в последней строке равенства (5) равен нулю для всех $z \in S$ и мы получаем $\|y-z\|^2 = \|y-x\|^2 + \|x-z\|^2 \ge \|y-x\|^2$ для всех $z \in S$, т. е. $x \in S$ является ближайшим к y вектором подпространства S.

И наоборот, если $x \in S$ является ближайшим к y вектором подпространства S, то мы знаем, что для любого $z \in S$ функция вещественного переменного t, определённая формулой $f(t) = \|y-x+tz\|^2$, имеет минимум при $t = 0$. Значит, $f'(0) = 0$. Но, согласно (5),

$$f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\|y-x+tz\|^2 - \|y-x\|^2}{t} = 2\operatorname{Re}(y-x, z).$$

Поэтому $\mathrm{Re}(y-x,z)=0$. Заменяя z на iz, получаем $\mathrm{Im}(y-x,z)=0$. Итак, $(y-x,z)=0$ для всех $z\in S$, т. е. $x\in S$ является ортогональной проекцией вектора y на подпространство S. Лемма доказана.

Если S — подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением L, то совокупность всех векторов $x\in L$, ортогональных к каждому вектору $y\in S$ обозначают символом $S^{\perp}$ и называют *ортогональным дополнением* к S.

Говорят, что линейное пространство L является *прямой суммой* своих подпространств S и T, если любой вектор $x\in L$ может быть, и к тому же единственным образом, представлен в виде суммы векторов $y\in S$ и $z\in T$: $x=y+z$.

Лемма. *Пусть H — гильбертово пространство, S — его замкнутое подпространство. Тогда H есть прямая сумма S и $S^{\perp}$.*

Доказательство. Пусть $y\in H$. Обозначим через x ближайшую к y точку подпространства S. Согласно предыдущей лемме, вектор $z=y-x$ лежит в $S^{\perp}$, что и доказывает возможность представить произвольный вектор из H в виде суммы векторов из S и $S^{\perp}$: $y=x+z$.

Чтобы убедиться в единственности такого разложения, допустим, что $x+z=y=\tilde{x}+\tilde{z}$, где $x,\tilde{x}\in S$, $z,\tilde{z}\in S^{\perp}$. Тогда левая часть равенства $x-\tilde{x}=z-\tilde{z}$ есть вектор из S, а правая — из $S^{\perp}$. Значит, $(x-\tilde{x},x-\tilde{x})=(x-\tilde{x},z-\tilde{z})=0$ и $x=\tilde{x}$. Аналогично убеждаемся, что $z=\tilde{z}$. Единственность разложения доказана.

Задачи

24. В пространстве $L_2[-1,1]$ найдите ортогональную проекцию функции e^{-x} на подпространство, состоящее из всех симметричных функций.

25. В пространстве $L_2[0,1]$ найдите ортогональные дополнения к следующим подпространствам:

а) многочленов от x;

б) многочленов от x^2;

в) многочленов с нулевым свободным членом;

г) многочленов с нулевой суммой коэффициентов;

д) функций, равных нулю при $x\le 1/2$;

е) функций, равных нулю при $x=1/2$.

26. Пусть L — линейное пространство со скалярным произведением и S — его подпространство. Докажите, что

а) $S^{\perp}$ является замкнутым подпространством в L;

б) $(S^{\perp})^{\perp}$ совпадает с замыканием S.

§ 8. Проектирование на конечномерное подпространство. Неравенство Бесселя

Вопросы существования и единственности ортогональной проекции вектора на подпространство исчерпывающим образом рассмотрены в предыдущем параграфе. Однако, если это подпространство конечномерно, то о проекции можно получить дополнительную информацию, что мы и сделаем в этом параграфе.

Пусть S — конечномерное подпространство в линейном пространстве со скалярным произведением L. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ортонормированный базис в S.

Теорема. *Для любого вектора $y \in L$ вектор*

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \tag{6}$$

с коэффициентами, вычисленными по формуле $\lambda_k = (y, x_k)$, является ортогональной проекцией вектора y на подпространство S. При этом $\|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y - x\|^2$.

Доказательство. Любой вектор $z \in S$ может быть разложен по базису $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k.$$

Умножая каждую часть последней формулы на x_m и пользуясь ортонормированностью базиса $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получим: $(z, x_m) = \alpha_m$.

Кроме того,

$$\|z\|^2 = (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x_j, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, x_j)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left[\sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \overline{(x_k, x_j)} \right] = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2.$$

Значит

$$\|y - z\|^2 = (y - z, y - z) = (y, y) - (z, y) - (y, z) + (z, z) =$$

$$= \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_k, y) - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} (y, x_k) + \|z\|^2 =$$

$$= \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_k} - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \alpha_k + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \pm \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \lambda_k|^2 + \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2.$$

Последнее выражение будет минимально если и только если первая сумма в нём равна нулю, т. е. если и только если $\alpha_k = \lambda_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Тем самым разложение (6) доказано. Но тогда

$$\|y - x\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 = \|y\|^2 - \|x\|^2.$$

Теорема доказана.

Пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — ортонормированная система в линейном пространстве со скалярным произведением L и $x \in L$. Числа

$$\lambda_k = (x, x_k)$$

называются *коэффициентами Фурье* вектора x относительно ортонормированной системы $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$$

— *рядом Фурье* вектора x.

Теорема (неравенство Бесселя). *Если x — некоторый вектор линейного пространства со скалярным произведением L и λ_k — его коэффициенты Фурье относительно некоторой ортонормированной системы, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2.$$

Доказательство. Введя обозначение

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

видим, что на основании предыдущей теоремы S_n является ближайшим к x вектором подпространства, натянутого на векторы $x_1, \ldots, x_n$, причём $\|x - S_n\|^2 + \|S_n\|^2 = \|x\|^2$. Следовательно, $\|S_n\|^2 \leq \|x\|^2$. Используя ортонормированность векторов $x_1, \ldots, x_n$, вычислим норму вектора S_n и перепишем последнее неравенство в виде

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$, получим требуемое.

Задача

27. Среди всех функций подпространства, натянутого на мономы 1, x и x^2, найдите ближайшую к функции $f(x) = e^x$

а) в пространстве $L_2[-1, 1]$;

б) в пространстве $C[-1, 1]$.

§ 9. Полнота ортонормированной системы. Равенство Парсеваля. Замкнутые системы

Говорят, что ортонормированная система векторов x, x_1, …, x_n, … является *пополнением* последовательности x_1, …, x_n, … . В свою очередь ортонормированная последовательность x_1, …, x_n, … векторов гильбертова пространства H называется *полной*, если её уже нельзя пополнить, т.е. если её ортогональное дополнение состоит из нуля.

Теорема (равенство Парсеваля). *Пусть* $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — *полная ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве* H. *Тогда для любых векторов* x *и* y *из* H *справедливо равенство*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k},$$

где $\lambda_k = (x, x_k)$ *и* $\mu_k = (y, x_k)$ *являются коэффициентами Фурье векторов* x *и* y *соответственно. В частности*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Поскольку последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ ортонормирована, то

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{p} |\lambda_{n+k}|^2.$$

С другой стороны, из неравенства Бесселя следует, что числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

сходится. Согласно критерию Коши сходимости числовых рядов это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для всех $n \geq n_0$ и всех p будет выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{p} |\lambda_{n+k}|^2 < \varepsilon.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для всех $n \geq n_0$ и всех p будет выполнено неравенство

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 < \varepsilon.$$

Но это означает, что последовательность S_n фундаментальна в гильбертовом пространстве H, а следовательно — сходится в силу полноты последнего.

Обозначая предел последовательности S_n через z и используя непрерывность и линейность скалярного произведения, можем для любого k записать

$$(x - z, x_k) = \lim_{n\to\infty} (x - S_n, x_k) = \lambda_k - \lambda_k = 0.$$

Тем самым вектор $x - z$ ортогонален всем x_k, а значит равен нулю в силу полноты системы $x_1, \ldots, x_n, \ldots$. Таким образом, $x = z$ или

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k. \tag{7}$$

Аналогично может быть доказано равенство

$$y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k,$$

что с учётом непрерывности скалярного произведения и ортонормированности $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ даёт

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} (S_n, y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{\mu_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k}.$$

Равенство Парсеваля доказано.

Ортонормированные системы, для которых выполнено равенство Парсеваля, столь важны, что для них введено специальное название. А именно, ортонормированная система векторов $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ линейного пространства со скалярным произведением L называется *замкнутой*, если для любого вектора $x \in L$ справедливо равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2,$$

где $\lambda_k = (x, x_k)$ являются коэффициентами Фурье вектора x.

Задача

28. Пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ является замкнутой ортонормированной системой векторов в пространстве со скалярным произведением L. Докажите, что для любых векторов $x \in L$ и $y \in L$ справедливо равенство

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k},$$

где $\lambda_k = (x, x_k)$ и $\mu_k = (y, x_k)$ являются коэффициентами Фурье векторов x и y соответственно.

§ 10. Гильбертов базис. Теорема о существовании гильбертова базиса

Соотношение (7), доказанное нами в предыдущем параграфе в процессе вывода равенства Парсеваля, имеет очень простой и важный смысл: оно означает, что элемент x представляется своим рядом Фурье. Для формулировки этого (уже доказанного в § 9) утверждения удобно использовать следующее определение.

Ортонормированная система векторов $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ линейного пространства L со скалярным произведением называется *гильбертовым базисом*, если любой вектор $x \in L$ может быть записан в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \quad \lambda_k = (x, x_k).$$

Отметим отличие понятия гильбертова базиса от понятия базиса в конечномерном линейном пространстве: сейчас допускаются бесконечные линейные комбинации, не имеющие смысла с чисто алгебраической точки зрения.

Теорема (о представлении элемента его рядом Фурье). *Всякая полная ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве является гильбертовым базисом в нём.*

Теорема (о существовании гильбертова базиса). *Во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве существует гильбертов базис, состоящий из конечного или счётного множества векторов.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — счётное плотное подмножество сепарабельного гильбертова пространства H. Вычеркнем из этого списка вектор x_n если он является линейной комбинацией предыдущих векторов $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Оставшиеся векторы перенумеруем заново: $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ [Отметим, что их может быть и конечное число. В таком случае в доказательство потребуется внести очевидные изменения.] Последовательность векторов $y_1, \ldots, y_n, \ldots$, очевидно, линейно независима. Применив к ней процесс ортогонализации Грама — Шмидта, получим ортонормированную последовательность $z_1, \ldots, z_n, \ldots$.

Выберем произвольный вектор $x \in H$. Поскольку последовательность векторов $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ плотна в H, то найдётся некоторая её подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к x, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер k_0 такой, что для всех $k \geq k_0$ выполняется неравенство $\|x - x_{n_k}\| < \varepsilon$. Однако каждый из векторов x_n является линейной комбинацией векторов $y_1, \ldots, y_n$, а значит, найдутся (вообще говоря — не единственным образом) такие числа $\alpha_1(n_k), \ldots, \alpha_{n_k}(n_k)$, что

$$x_{n_k} = \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j(n_k) y_j.$$

Кроме того, каждый из векторов y_n является линейной комбинацией $z_1, \ldots, z_n$. Следовательно, найдутся (и опять же — не единственным образом) некоторые числа $\beta_1(n_k), \ldots, \beta_{n_k}(n_k)$ такие, что

$$x_{n_k} = \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j(n_k) y_j = \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j(n_k) z_j.$$

Полагая $\lambda_j = (x, z_j)$, на основании теоремы о проектировании на конечномерное подпространство, будем иметь

$$\|x - \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j z_j\| \leq \|x - \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j(n_k) z_j\| = \|x - x_{n_k}\| < \varepsilon.$$

Значит,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j z_j$$

и $z_1, \ldots, z_n, \ldots$ является гильбертовым базисом. Теорема доказана.

Задача

29. Проверьте, что разложение вектора по гильбертову базису единственно.

§ 11. Теорема Рисса — Фишера. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств

Из неравенства Бесселя следует, что для того, чтобы числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ служили коэффициентами Фурье какого-либо элемента необходимо, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \tag{8}$$

сходился. Оказывается, что в полном пространстве это условие не только необходимо, но и достаточно. Именно, справедлива следующая

Теорема (Рисса — Фишера). *Пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — произвольная ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве H, и пусть числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ таковы, что ряд (8) сходится. Тогда существует такой вектор $x \in H$, что $\lambda_n = (x, x_n)$ и*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2,$$

т. е. такой x, для которого λ_n являются коэффициентами Фурье, а норма вычисляется в соответствии с равенством Парсеваля.

Доказательство. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Поскольку последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ ортонормирована, то

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{p} |\lambda_{n+k}|^2.$$

С другой стороны, так как числовой ряд (8) сходится, то, согласно критерию Коши сходимости числовых рядов, для любого $\varepsilon > 0$

найдётся номер n_0 такой, что для всех $n \geq n_0$ и всех p будет выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{p} |\lambda_{n+k}|^2 < \varepsilon.$$

Значит для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для всех $n \geq n_0$ и всех p будет выполнено неравенство

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 < \varepsilon.$$

Но это означает, что последовательность S_n фундаментальна в гильбертовом пространстве H, а следовательно сходится в силу полноты последнего.

Обозначая предел последовательности S_n через x и используя непрерывность и линейность скалярного произведения, можем для любого k записать

$$(x, x_k) = \lim_{n\to\infty} (S_n, x_k) = \lambda_k,$$

а значит коэффициенты Фурье вектора x равны λ_k, что и требовалось.

Кроме того, по определению x имеем $\|x - S_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, в то время как с другой стороны

$$\|x - S_n\|^2 = (x - S_n, x - S_n) = (x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) =$$
$$= (x, x) - \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2,$$

а значит

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$

Теорема доказана.

Обратите внимание, что центральная часть теоремы Рисса — Фишера, связанная с существованием вектора x, по сути дела была доказана нами ранее в § 9 при выводе формулы (7).

Два пространства L и K со скалярным произведением называются *изоморфными*, если существуют взаимно-обратные линейные отображения $A : L \to K$ и $B : K \to L$, сохраняющие скалярное произведение, т. е. такие отображения, что для любых чисел α, β и любых векторов $x, y \in L$ и $u, v \in K$ справедливы равенства

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \tag{9}$$

$$(x, y) = (Ax, Ay), \tag{10}$$

$$B(\alpha u + \beta v) = \alpha Bu + \beta Bv, \tag{11}$$

$$(u, v) = (Bu, Bv), \tag{12}$$

$$ABu = u, \quad BAx = x. \tag{13}$$

При этом отображения A и B называются *изорфизмами* пространств L и K.

Соотношения (9) и (11) выражают тот факт, что отбражения A и B сохраняют операции сложения векторов и умножения вектора на число, равенства (10) и (12) — что они сохраняют скалярное произведение, а формулы (13) — что A и B являются обратными друг к другу.

Обратите внимание, что в левой части формулы $(x, y) = (Ax, Ay)$ из (10) стоит скалярное произведение векторов пространства L, а в правой — пространства K. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы иногда будем записывать скалярное произведение в L в виде $(x, y)_L$, так что последняя формула будет выглядеть так: $(x, y)_L = (Ax, Ay)_K$.

С интуитивной точки зрения два пространства изоморфны, если одно получается из другого переобозначением: вместо вектора $x \in L$ уславливаются писать вектор $u = Ax \in K$. Равенства (9)–(12) показывают, что при таком переобозначении сохраняются операции сложения векторов, умножения вектора на число и скалярного произведения. Эта процедура напоминает дословный перевод с одного языка на другой. При этом никакая информация не теряется: с помощью отображения B всегда можно сделать “обратный перевод”. Поэтому иногда говорят, что изоморфные пространства неразличимы. Тем удивительнее выглядит следующая теорема.

Теорема (об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств). *Любое бесконечномерное комплексное (соответственно — вещественное) сепарабельное гильбертово пространство изоморфно комплексному (соотв. — вещественному) пространству l_2.*

Доказательство. Пусть H — бесконечномерное комплексное сепарабельное гильбертово пространство. Поскольку H сепарбельно и гильбертово, то в нём существует гильбертов базис, состоящий из конечного или счётного множества векторов. Ввиду бесконечномерности H, этот базис содержит именно счётное множество векторов. Обозначим его через $x_1, \dots, x_n, \dots$.

В пространстве H зададим отображение A по формуле

$$Ax = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots),$$

где $\lambda_n = (x, x_n) \in \mathbb{C}$, т. е. отображение, сопоставляющее каждому вектору $x \in H$ последовательность его коэффициентов Фурье. В силу неравенства Бесселя, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$$

сходится, а значит A отображает H в l_2.

Линейность отображения A очевидна. Полагая $Ay = (\mu_1, \dots, \mu_n, \dots)$, будем иметь

$$(x, y)_H = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{\mu_n} = (Ax, Ay)_{l_2},$$

где левое равенство представляет из себя равенство Парсеваля, а правое — определение скалярного произведения в l_2. Таким образом, A сохраняет скалярное произведение.

Отображение $B : l_2 \to H$ построим с помощью теоремы Рисса — Фишера: если $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$ принадлежит l_2, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$$

сходится, а значит в H найдётся вектор x для которого числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ являются коэффициентами Фурье относительно базиса $x_1, \dots, x_n, \dots$. Его и сопоставим последовательности чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$. Короче говоря, мы полагаем

$$B(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n.$$

Линейность отображения B, сохранение им скалярного произведения, а также свойства $AB(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$, $BAx = x$ очевидны.

В случае комплексных пространств теорема доказана. Чтобы рассмотреть случай вещественных пространств, в доказательство нужно внести очевидные изменения. Сделать это предоставляем читателю.

Задача

30. Проверьте, что в гильбертовом пространстве сумма внутренних углов любого треугольника равна π.

§ 12. Критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве

Следующая теорема в определённом смысле подводит итог предпринятому нами изучению полных ортонормированных последовательностей.

Теорема (критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве). *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — ортонормированная система векторов в нём. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) система $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ полна;

2) система $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ замкнута;

3) для любого вектора $x \in H$ справедливо разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n, \tag{14}$$

где $\lambda_n = (x, x_n)$ — коэффициенты Фурье вектора x относительно ортонормированной системы $x_1, \ldots, x_n, \ldots$.

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует непосредственно из равенства Парсеваля.

Импликацию 2) $\Rightarrow$ 3) докажем рассуждая от противного,т. е. допустим, что система $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ замкнута, но существует вектор $x \in H$, для которого разложение (14) неверно. Из неравенства Бесселя следует, что если $\lambda_n = (x, x_n)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty,$$

а значит, в силу теоремы Рисса—Фишера, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$$

сходится в H к некоторому вектору, который мы обозначим через y. Тогда, с одной стороны, $\|x-y\| \neq 0$, т.к. мы предположили, что равенство (14) неверно. С другой стороны, все коэффициенты Фурье (обозначаемые далее через μ_n) вектора $x-y$ равны нулю:

$$\mu_n = (x-y, x_n) = \left(x - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, x_n \right) =$$

$$= \lambda_n - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x_k, x_n) = \lambda_n - \lambda_n = 0.$$

Пришли к противоречию с замкнутостью системы $x_1, \ldots, x_n, \ldots$:

$$0 \neq \|x-y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 = 0,$$

которое и доказывает, что условие 2) влечёт 3).

Импликацию 3) $\Rightarrow$ 1) также будем доказывать от противного, т. е. допустим, что разложение (14) имеет место для всех $x \in H$, но система $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ неполна, т. е. существует ненулевой вектор $z \in H$, ортогональный каждому вектору x_n. Тогда все коэффициенты Фурье вектора z равны нулю, и равенство (14) приводит к противоречию:

$$0 \neq z = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot x_n = 0.$$

Теорема доказана.

§ 13. Тригонометрическая система функций как пример полной ортонормированной системы в $L_2([-\pi, \pi])$

Как известно, в вещественном пространстве $L_2([-\pi, \pi])$, состоящем из вещественно-значных функций, интегрируемых с квадратом, скалярное произведение вводится с помощью равенства

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)\, dt.$$

При этом последовательность функций

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t, \dots \\
\dots \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \dots
\end{gathered} \tag{15}
$$

ортонормирована в пространстве $L_2([-\pi,\pi])$, а коэффициенты Фурье функции f из $L_2([-\pi,\pi])$ вычисляются по формулам

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad n = 0,1,2,\dots, \\
\beta_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt, \quad n = 1,2,\dots.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Равенство Парсеваля, записанное в стиле § 9, выглядит так:

$$
\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = {\alpha_0}^2 + \sum_{n=1}^{\infty}({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2),
$$

что лишь обозначениями отличается от равенства Ляпунова

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2),
$$

известного вам из темы “Ряды Фурье”.

Далее, поскольку для системы (15) выполняется равенство Парсеваля, то она полна, а значит любая функция $f \in L_2([-\pi,\pi])$ разлагается в ряд Фурье по ортонормированной последовательности (15):

$$
f(t) = \frac{\alpha_0}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nt + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin nt,
$$

что, в совокупности с (16), лишь расстановкой множителей $1/\sqrt{\pi}$ отличается от формул Эйлера и разложения функции в ряд Фурье, знакомого вам по теме “Ряды Фурье”:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Аналогично можно проверить, что система функций

$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int},$$

где n проберает все целые числа, ортонормированна и полна в комплексном пространстве $L_2([-\pi,\pi])$ со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt,$$

а известные по теме “Ряды Фурье” формулы

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2,$$

являются частным случаем рассмотренных в этом пособии. [Напомним, что “двусторонний” ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_n \tag{17}$$

называется сходящимся, если сходятся оба ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_{-n}.$$

При этом суммой ряда (17) называют число

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_{-n},$$

обозначаемое через

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_n.]$$

Отметим особо, что вышеизложенное не даёт оснований сожалеть о времени, потраченном на изучение темы “Ряды Фурье”. Из общей теории гильбертовых пространств, изложенной в данном пособии, ничего не вытекает о поточечной сходимости рядов Фурье, связи между гладкостью функции и скоростью сходимости её ряда Фурье, явлении Гиббса и тому подобных вещах, рассмотренных в теме “Ряды Фурье”.