

## FLEXIBLE POLYHEDRAL SURFACES

V. A. ALEXANDROV

*A part of the theory of closed flexible polyhedral surfaces that does not require additional knowledge and skills with respect to the secondary school course in stereometry is considered. The article can be used at optional subjects in geometry.*

**Излагается та часть теории замкнутых изгибаемых многогранных поверхностей, которая не требует для своего понимания сведений и навыков, выходящих за рамки школьного курса стереометрии. Может быть использована на факультативных занятиях по геометрии.**

## ИЗГИБАЕМЫЕ МНОГОГРАННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

В. А. АЛЕКСАНДРОВ

Новосибирский государственный университет

Посвящаю Валентине Константиновне Веприк – моему школьному учителю математики, Соросовскому Учителю, которая, как и прежде, работает в школе № 88 г. Омска

### ВВЕДЕНИЕ

Многогранники, равно как и ограничивающие их многогранные поверхности, традиционно занимают почетное место в школьном курсе стереометрии. Более того, углубленное изучение многогранников представляет собой прекрасный материал для факультативных занятий по геометрии. Начать можно, например, со следующих вопросов:

1) найти длины ребер правильных многогранников (то есть тетраэдра, куба, октаэдра, икосаэдра и додекаэдра), описанных около сферы данного радиуса (или вписанных в сферу данного радиуса);

2) изготовить и раскрасить картонные модели правильных многогранников с длинами ребер, найденными в п. 1);

3) доказать теорему Эйлера, согласно которой у всякого выпуклого многогранника число вершин  $B$ , ребер  $P$  и граней  $\Gamma$  связаны соотношением

$$B - P + \Gamma = 2;$$

4) используя теорему Эйлера, доказать, что других правильных многогранников, кроме перечисленных в п. 1, нет;

5) доказать теорему Коши о том, что замкнутые выпуклые многогранные поверхности, одинаково составленные из равных граней, равны, то есть совмещаются движением всего пространства.

Указания по изготовлению картонных моделей многогранников приведены в [1]. Вопросы 3 и 4 вполне посильны для школьников, порой их даже включают в школьные учебники, хотя и в виде материала со звездочкой. Их изложение можно найти также, например, в [2]. Теорема Коши является самой сложной из этого списка, но и ее доказательство, приведенное в [3], доступно старшекласникам.

Даже беглый просмотр книги [3] убеждает, что в зависимости от вкусов учителя и школьников круг изучаемых на факультативе вопросов можно легко расширить. Укажем лишь один вопрос, не вошедший пока в стандартные учебники, — описать все выпуклые многогранники, у каждого из которых две грани равны и расположены в параллельных плоскостях, а все остальные являются параллело-

граммами. Подчеркнем, что этим свойством обладают не только призмы. Решение можно найти в [4].

Цель статьи – показать, что в факультатив по многогранникам может быть включен новый раздел, касающийся изгибаемых многогранных поверхностей. В последние 20 лет теория таких поверхностей привлекает пристальное внимание профессиональных геометров. В статье излагается та часть теории, которая не требует для своего понимания сведений и навыков, выходящих за рамки школьного курса стереометрии.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

*Многогранной поверхностью* в трехмерном пространстве будем называть поверхность, составленную из конечного числа многоугольников. Эти многоугольники назовем *гранями* многогранной поверхности, а стороны граней – ее *ребрами*. Предположим, что каждое ребро принадлежит не более чем двум граням многогранной поверхности. Если же каждое ребро многогранной поверхности принадлежит ровно двум ее граням, то такую поверхность назовем *замкнутой* или *поверхностью без границы*. Например, поверхность куба является замкнутой многогранной поверхностью, но если из нее удалить одну грань, то оставшаяся часть будет незамкнутой многогранной поверхностью. Особо подчеркнем, что удобно не исключать из рассмотрения так называемые *многогранные поверхности с самопересечениями*, то есть такие, у которых грани могут иметь общие точки, не являющиеся вершинами данной многогранной поверхности и не принадлежащие ее ребрам.

Будем считать, что форму и размеры каждой грани многогранной поверхности изменять запрещено, то есть грани будем рассматривать как пластинки, сделанные из твердого материала. Напротив, двугранные углы при ребрах разрешим изменять, то есть будем считать, что вдоль ребер грани закреплены на шарнирах наподобие того, как дверь крепится к косяку. Многогранная поверхность называется *изгибаемой*, если непрерывным изменением двугранных углов при ее ребрах можно изменить пространственную форму поверхности. Очевидно, что (незамкнутая) многогранная поверхность, составленная из двух треугольников, соединенных вдоль одного ребра, является изгибаемой.

Нас будет интересовать вопрос о том, существуют ли замкнутые изгибаемые многогранные поверхности.

Первый опыт популярного изложения этого вопроса на русском языке был предпринят В.А. Залгаллером в 1978 году [5]. Прекрасное изложение теории изгибаемых многогранников содержится в капитальном обзоре И.Х. Сабитова [6], где заинтересованный читатель найдет массу подробностей и ссылок.

Многогранную поверхность называют *выпуклой*, если она лежит на границе некоторого выпуклого тела в трехмерном пространстве. Из теоремы Коши вытекает, что никакая выпуклая замкнутая многогранная поверхность не является изгибаемой.

## ОКТАЭДР БРИКАРА

В 1897 году Р. Брикар описал все изгибаемые октаэдры. Из теоремы Коши вытекает, что ни один из них не может быть выпуклым. Согласно установившейся традиции, изгибаемые октаэдры, называемые также октаэдрами Брикара, классифицируют, относя каждый из них к одному из трех типов. Нам потребуется октаэдр Брикара лишь одного типа. Его построение будем объяснять в виде рекомендаций по склеиванию модели из картона. Описание октаэдров Брикара других типов можно найти в [6].

Нарисуйте на картоне фигуру, изображенную на рис. 1 и состоящую из шести треугольников. Буквы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  обозначают длины соответствующих сторон. Хорошо подходят значения  $a = 12$ ,  $b = 10$ ,  $c = 5$  и  $d = 11$ . Вырежьте нарисованную фигуру по сплошным линиям и согните по штриховым. Два левых треугольника, имеющие стороны длины  $c$ , отогните из плоскости рисунка на себя и склейте между собой вдоль стороны длины  $c$ . Два правых треугольника со сторонами длины  $c$  отогните из плоскости рисунка от себя и приклейте их друг к другу вдоль стороны длины  $c$ . В результате получится невыпуклая незамкнутая многогранная поверхность  $P$ , изображенная на рис. 2. Сплошными линиями на нем изображены видимые ребра многогранной поверхности  $P$ , штриховыми – ребра, заслоненные гранями поверхности  $P$ . Ребра  $AE$ ,  $ED$ ,  $DF$  и  $AF$  составляют границу  $P$ , к каждому из них прилегает лишь одна грань поверхности  $P$ .

Очевидно, многогранная поверхность  $P$  является изгибаемой: если треугольник  $BCE$  фиксировать в пространстве, то точку  $F$  можно двигать так, как показано стрелками на рис. 2. При этом положение точек  $A$  и  $D$  в пространстве также будет меняться,

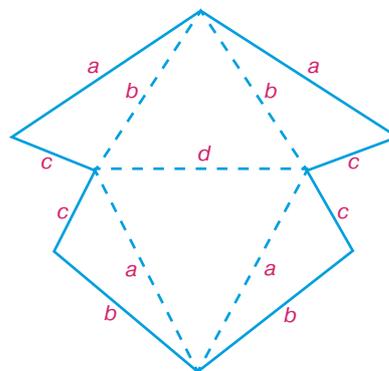


Рис. 1

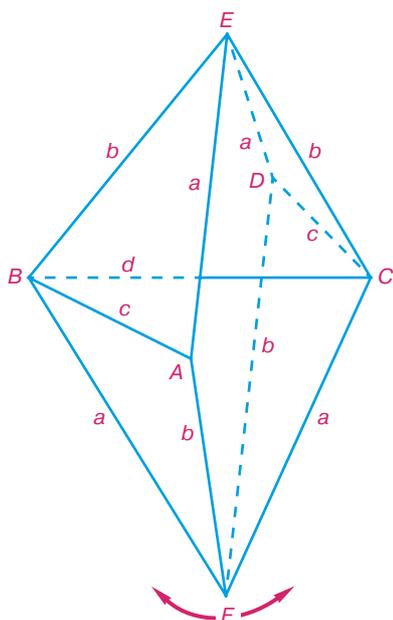


Рис. 2

но, что особенно важно для нас, расстояние между точками  $A$  и  $D$  будет оставаться постоянным.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим двугранный угол  $S$ , одной гранью которого служит полуплоскость  $s_1$ , проходящая через точку  $B$  и ограниченная прямой  $EF$ , проходящей через точки  $E$  и  $F$ , а другой гранью — полуплоскость  $s_2$ , проходящая через точку  $C$  и ограниченная прямой  $EF$ . Повернем полуплоскость  $s_1$  вокруг прямой  $EF$  так, чтобы новая полуплоскость  $t_1$  проходила через точку  $A$ . В соответствии с рис. 2 для этого надо повернуть  $s_1$  “на себя” на величину двугранного угла тетраэдра  $ABEF$  при ребре  $EF$ . Аналогично повернем полуплоскость  $s_2$  вокруг прямой  $EF$  так, чтобы новая полуплоскость  $t_2$  проходила через точку  $D$ . Следуя рис. 2, для этого надо повернуть  $s_2$  “от себя” на величину двугранного угла тетраэдра  $CDEF$  при ребре  $EF$ . Однако при любом положении точки  $F$  тетраэдры  $ABEF$  и  $CDEF$  имеют соответственно равные стороны. Поэтому тетраэдры  $ABEF$  и  $CDEF$  равны, в частности равны между собой двугранные углы этих тетраэдров при ребре  $EF$ . Значит, двугранный угол  $T$ , образованный полуплоскостями  $t_1$  и  $t_2$ , равен двугранному углу  $S$ . Таким образом, мы получаем, что в тетраэдрах  $BCEF$  и  $ADEF$  пять сторон попарно равны между собой ( $BE = AF$ ,  $BF = AE$ ,  $CF = DE$ ,  $CE = DF$  и  $EF$  — общая сторона) и, кроме того, равны между собой двугранные углы  $T$  и  $S$ , противолежащие шестой стороне (то есть  $BC$  и  $AD$  соответственно). Следовательно, тетраэдры  $BCEF$  и  $ADEF$  равны между собой, а значит,  $AD = BC = d$  для любого положения вершины  $F$ , что и утверждалось выше.

Поскольку длина отрезка  $AD$  постоянна при всевозможных положениях вершины  $F$ , то к многогран-

ной поверхности  $P$  можно приклеить два картонных треугольника  $ADE$  и  $ADF$ , причем получившаяся при этом поверхность  $Q$  будет по-прежнему изгибаемой. Это приклеивание, конечно, не может быть осуществлено реально: например, грани  $ADE$  и  $BCE$  при этом пересекутся по линии, не являющейся ребром многогранной поверхности  $Q$ ; при изгибании поверхности  $Q$  эта линия будет менять свое положение на каждой из граней  $ADE$  и  $BCE$ , что не поддается изображению на картонной модели.

Многогранная поверхность  $Q$  называется *октаэдром Брикара*. Как и обычный октаэдр, она имеет 6 вершин ( $A, B, C, D, E$  и  $F$ ), 12 ребер ( $AB, AD, AE, AF, BC, BE, BF, CD, CE, CF, DE$  и  $DF$ ) и 8 граней ( $ABE, ABF, BCE, BCF, CDE, CDF, ADE$  и  $ADF$ ). Вместе с тем октаэдр Брикара является невыпуклым, изгибаемым и имеет самопересечения. В следующем разделе будет рассказано, как следует модифицировать октаэдр Брикара, чтобы избавиться от самопересечений.

## МНОГОГРАННАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ШТЕФФЕНА

Изготовьте две одинаковые копии  $P_1$  и  $P_2$  многогранной поверхности  $P$ , описанной в предыдущем разделе. Вершины многогранной поверхности  $P_1$  будем обозначать теми же буквами, что и вершины поверхности  $P$ , но снабженными индексом 1. Аналогично будем обозначать вершины поверхности  $P_2$ .

Далее нарисуйте на картоне фигуру, изображенную на рис. 3 и состоящую из двух треугольников. Как и раньше, буквы  $a$  и  $e$  обозначают длины соответствующих сторон. К выбранному ранее значению  $a = 12$  хорошо подходит  $e = 17$ . Вырежьте нарисованную фигуру по сплошным линиям и согните по пунктирной. Получившуюся незамкнутую многогранную поверхность обозначим через  $R$  (рис. 3).

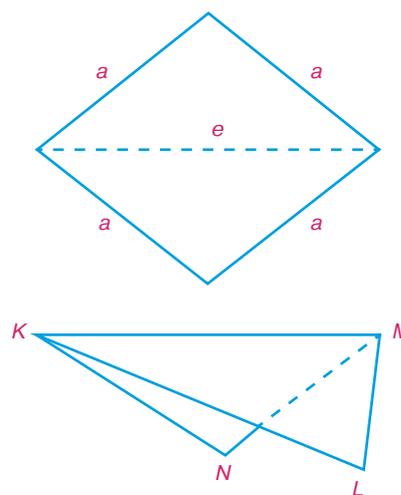


Рис. 3

Теперь все готово для склеивания многогранной поверхности Штеффена.

Зафиксируем положение многогранной поверхности  $R$  в трехмерном пространстве так, чтобы расстояние между точками  $L$  и  $N$  было равно  $d$ . Другими словами, в последующем не будем менять величину двугранного угла многогранной поверхности  $R$  при ребре  $KM$ .

Совместите точки  $K$  и  $E_1$ ,  $A_1$  и  $L$ ,  $D_1$  и  $N$  и склейте многогранные поверхности  $P_1$  и  $R$  вдоль ребер  $A_1E_1$  и  $KL$ , а также  $E_1D_1$  и  $KN$  (рис. 4). Ясно, что после такого приклеивания даже при фиксированном выше положении поверхности  $R$  точка  $F_1$  допускает непрерывные движения (ведь фиксация расстояния между точками  $A$  и  $D$  не мешает изгибаниям октаэдра Брикара, частью которого является  $P_1$ ). Более точно, точка  $F_1$  может произвольно двигаться по окружности, с центром в середине отрезка  $A_1D_1$ , лежащей в плоскости, перпендикулярной этому отрезку. При этом форма граней поверхностей  $P_1$  и  $R$  не будет изменяться, а будут изменяться только некоторые двугранные углы.

Аналогично совместите точки  $E_2$  и  $M$ ,  $D_2$  и  $L$ ,  $A_2$  и  $N$  и склейте многогранные поверхности  $P_2$  и  $Q$  вдоль ребер  $A_2E_2$  и  $MN$ , а также  $D_2E_2$  и  $LM$  (см. рис. 4). Ясно, что точка  $F_2$  может произвольно двигаться по той же окружности, что и точка  $F_1$ . Следовательно, придав произвольную форму многогранной поверхности  $P_1$  (а значит, задав произвольное положение точки  $F_1$  на указанной выше окружности), мы можем так изогнуть поверхность  $P_2$  (не меняя, конечно, формы ее граней), чтобы точка  $F_2$  совпала с  $F_1$ . Но тогда ребра  $A_1F_1$  и  $D_2F_2$ , а также  $D_1F_1$  и  $A_2F_2$  попарно совместятся друг с другом, и мы получим замкну-

тую многогранную поверхность, изгибаемость которой гарантируется произволом в выборе точки  $F_1$  (или, что то же самое, совпадающей с ней точки  $F_2$ ). Эта многогранная поверхность и называется *многогранной поверхностью Штеффена*. Она имеет всего девять вершин — лишь на одну больше, чем у куба.

При изготовлении модели многогранной поверхности Штеффена целесообразно сделать треугольник  $KML$  из прозрачного материала. Это позволит вам не только непосредственно убедиться в отсутствии самопересечений, но и разглядеть, что происходит внутри многогранной поверхности Штеффена при ее изгибаниях.

### ГИПОТЕЗА КУЗНЕЧНЫХ МЕХОВ

Всякая замкнутая многогранная поверхность, не имеющая самопересечений, ограничивает в трехмерном пространстве некоторое тело конечного объема. Гипотеза кузнечных мехов состоит в том, что если мы имеем дело с изгибаемой замкнутой многогранной поверхностью, то объем этого тела остается постоянным в процессе изгибания. Эта гипотеза возникла около 1978 года из рассмотрения конкретных примеров первых замкнутых изгибаемых многогранных поверхностей без самопересечений, придуманных Р. Коннелли (помимо [5] интересующиеся могут обратиться за дополнительной информацией к [6]). Ее справедливость в общем случае была анонсирована московским математиком И.Х. Сабитовым лишь в 1995 году.

Только представьте себе: многогранная поверхность Штеффена будет изгибаться, даже если, сделав ее герметичной, вы заполните ее несжимаемой жидкостью! Из гипотезы кузнечных мехов, в частности, следует, что мехи аккордеона или баяна, заставляя эти инструменты звучать за счет хотя и малых, но все же реальных растяжений и сжатий материала мехов.

Возникает естественный вопрос: имеются ли другие количественные характеристики многогранной поверхности, которые сохраняются в процессе изгибания? Тривиальный пример такой количественной характеристики — площадь поверхности. Значительно менее тривиальный пример строится так. *Внутренним двугранным углом* при данном ребре замкнутой многогранной поверхности назовем величину двугранного угла при этом ребре, измеренную со стороны тела конечного объема, ограниченного данной поверхностью. Умножим длину ребра многогранной поверхности на величину внутреннего двугранного угла при нем и просуммируем результат по всем ребрам данной замкнутой многогранной поверхности. Полученное число называется *средней кривизной* многогранной поверхности. В 1985 году американский математик Р. Александер установил, что любая замкнутая изгибаемая многогранная поверхность сохраняет свою среднюю кривизну в процессе изгибания.

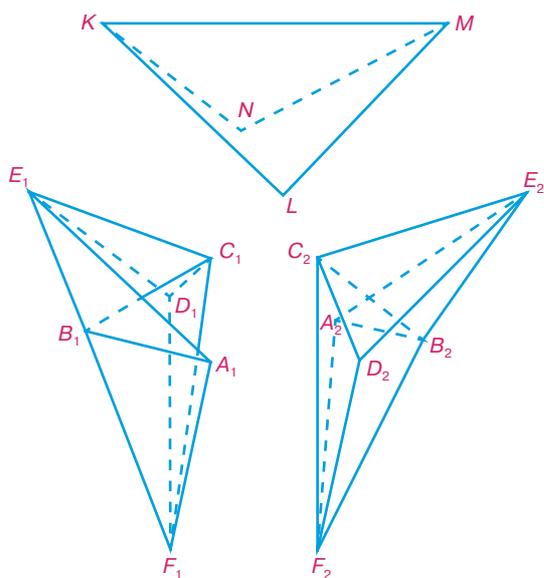


Рис. 4

## ПРИМЕНЕНИЯ

Следует признать, что масштабные проникновения фундаментальных математических идей в индустрию и технологию — явления довольно редкие. Так что при изложении этого предмета лучше заранее настроиться на здоровый пессимизм. Вместе с тем ясно, что не следует делать категорических выводов о прекращении фундаментальных исследований в каком-то направлении на том основании, что первооткрыватель не смог в течение года (или десяти) найти ему общепонятное применение. Применение может быть найдено совсем другими людьми и совсем в другое время.

Чтобы убедиться в справедливости сказанного, вспомним, например, историю открытия электромагнитных волн. Их существование было предсказано М. Фарадеем в 1832 году. Дж. Максвелл в 1865 году теоретически показал, что электромагнитные колебания не остаются локализованными в пространстве, а распространяются в вакууме со скоростью света во все стороны от источника. В 1888 году максвелловская теория получила подтверждение в опытах Г. Герца. 7 мая 1895 года А.С. Попов на заседании физического отделения Русского физико-химического общества сделал научный доклад об изобретенной им системе связи без проводов и продемонстрировал ее работу. В начале 1900 года приборы А.С. Попова были применены для связи во время работ по ликвидации аварий броненосца “Генерал-адмирал Апраксин” у острова Гогланд и при спасении рыбаков, унесенных на льдине в море. При этом дальность связи достигла 45 км. История открытия и использования радиоволн продолжается и сейчас, вбирая в себя достижения сотен тысяч инженеров и исследователей (вспомните, хотя бы навязчивое “все живое тянется к био”). Мог ли все это предвидеть Фарадей в 1842 или 1852 году?

Теперь мы можем сознаться, что сегодня неизвестно по-настоящему нетривиальных применений замкнутых изгибаемых многогранных поверхностей. Почти тривиальным является наблюдение, что конструкция панельного дома имеет много общего с многогранной поверхностью. Причем на практике желательно сделать эту конструкцию как можно менее изгибаемой. Однако архитекторы и инженеры-строители решали и решают эту задачу своими методами без обращения к новейшим изысканиям геометров.

Попытка менее очевидного приложения возникла в стереохимии — науке о пространственном строении молекул. Речь пойдет о циклических молекулах, состоящих из шести атомов. Типичными примерами могут служить молекулы бензола или циклогексана. Бензольное кольцо, в котором, как известно, чередуются атомы водорода и углерода, обычно изображают так, как показано на рис. 5. Экспериментально установлено, что в молекулах бензола не только расстояния между атомами, но и

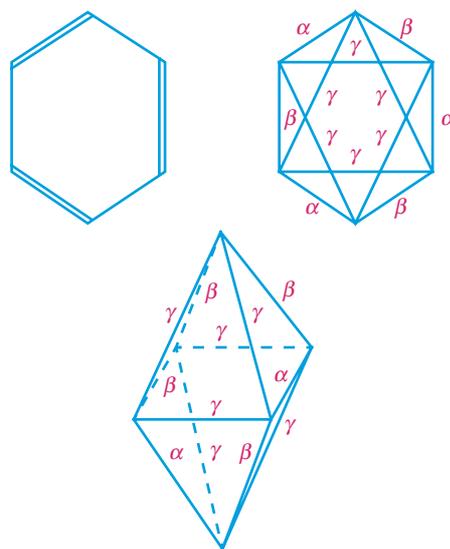


Рис. 5

углы между связями, выходящими из одного атома, всегда имеют одно и то же численное значение. Поэтому в качестве модели бензольного кольца можно принять пространственный шестиугольник, дополненный его короткими диагоналями (то есть диагоналями, соединяющими вершины, идущие через одну). Схематически эта модель изображена на рис. 5 в виде плоской фигуры, где буквами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  обозначены длины соответствующих отрезков. В этой модели следует считать все участвующие в ней отрезки идеально жесткими стержнями, шарнирно соединенными между собой в вершинах шестиугольника. Наша модель имеет 6 вершин, 12 отрезков-стержней и 8 треугольников, ограниченных отрезками-стержнями — ровно столько же, сколько вершин, ребер и граней имеет октаэдр. Заменив мысленно каждый из восьми треугольников, ограниченных отрезками-стержнями, плоским треугольником, получим, что наша модель бензольного кольца превратилась в октаэдр, грани которого имеют заранее предписанные размеры, а двугранные углы произвольны. (Схематически такой октаэдр изображен на рис. 5.) Поскольку грани построены лишь мысленно, то ясно, что невыпуклость октаэдра или наличие самопересечений не влияют на наши рассуждения.

Теперь мы подошли к самой сути: существует ли циклическая молекула, состоящая из шести атомов, такая, что соответствующий ей октаэдр является изгибаемым? Если бы такая молекула существовала, то она тоже должна была бы допускать непрерывные изменения своей пространственной формы. Естественно ожидать, что при таком изменении формы молекулы менялись бы физические и химические свойства вещества, например объем или коэффициент преломления. Это было бы уже что-то новое в гидравлике или оптике. Вот бы научиться

управлять такими изменениями... Но здесь мы вынуждены прервать полет фантазии и сообщить, что подобного рода молекулы, непрерывно (то есть без скачков) изменяющие свою форму в пространстве, пока не обнаружены.

Заканчивая обсуждение приложений, укажем, что задачи о необычной (то есть интуитивно неочевидной) подвижности многогранных поверхностей или стержневых систем периодически возникают в разных разделах науки и техники. Достаточно напомнить, что шарнирные механизмы изучались П.Л. Чебышевым более 100 лет назад, а перспективным источником новых вопросов представляется теория фуллеренов — недавно открытой третьей стабильной формы углерода.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше были изложены начальные факты теории изгибаемых многогранных поверхностей. Чтобы дать представление о направлениях развития этой теории, перечислим некоторые результаты, которые уже объявлены как доказанные, но подробное доказательство которых еще не опубликовано в общедоступных журналах.

1) *Многогранная поверхность Штеффена имеет наименьшее число вершин среди всех замкнутых изгибаемых многогранных поверхностей без самопересечений.* Другими словами, пример Штеффена нельзя улучшить: если замкнутая многогранная поверхность без самопересечений имеет менее девяти вершин, то она не является изгибаемой. В связи с этим любопытно отметить, что хотя в [2] и других работах есть ссылки на препринт К. Штеффена, якобы содержащий описание конструкции его многогранной поверхности, на самом деле этот препринт никогда не был опубликован. Сам Штеффен объясняет это тем, что он очень хотел доказать неулучшаемость своего примера, но не смог и поэтому не опубликовал ничего на эту тему.

2) *В трехмерном сферическом пространстве гипотеза кузнечных мехов неверна.* Другими словами, в сферическом пространстве существует замкнутая изгибаемая многогранная поверхность, такая, что объем ограниченного ею тела изменяется в процессе изгибания. Трехмерное сферическое пространство можно представлять себе как полусферу радиуса 1 в четырехмерном евклидовом пространстве. Оно имеет постоянную кривизну, равную +1, и в этом отношении аналогично евклидову пространству и пространству Лобачевского (имеющим постоянные кривизны, равные 0 и -1 соответственно). Подробности о сферическом пространстве и пространстве Лобачевского можно найти в научно-популярной литературе, в том числе и в предыдущих выпусках “Соросовского Образовательного Журнала”.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Венинджер М.* Модели многогранников. М.: Мир, 1974.
2. *Берже М.* Геометрия. М.: Мир, 1984. Т. 1.
3. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Ч. 2: Стереометрия. М.: Учпедгиз, 1952.
4. *Гуфт И.В.* Об одном классе многогранников // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 183–184.
5. *Залгаллер В.А.* Непрерывно изгибаемый многогранник // Квант. 1978. № 9. С. 13–19.
6. *Сабитов И.Х.* Локальная теория изгибания поверхностей // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 48. С. 196–270.

\* \* \*

Виктор Алексеевич Александров, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики физического факультета Новосибирского государственного университета. Область научных интересов — нелинейные и нелокальные проблемы геометрии и математического анализа. Автор 35 научных работ.