МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В. М. Маракулин

РАВНОВЕСНЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИКИ С НЕСТАНДАРТНЫМИ ЦЕНАМИ

Учебное пособие

«Теория Игр»
часть III

Новосибирск
2001

УДК 519.8
ББК В.173.1/2

Маракулин В. М. Равновесный анализ математических моделей экономики с нестандартными ценами.: Учебное пособие к курсу «Теория Игр»: часть III/ Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2001. 125 с.

В учебном пособии излагаются элементы современной теории экономического равновесия с нестандартными ценами, основанные на оригинальных результатах автора. Рекомендуется студентам старших курсов и аспирантам-математикам, специализирующимся в области математической экономики, а также научным сотрудникам. Ил. 6, библиогр. 22.

Рецензент
доктор физико-математических наук профессор В. И. Шмырёв

Подготовленно при финансовой поддержке ФЦП «Интеграция» № 274.

Оглавление

Введение

Экономика — это общественная наука, которая анализирует поведение разумных существ (людей, марсиан) в условиях ограниченности ресурсов. *Микроэкономическая теория* является составной частью экономики и нацелена на моделирование экономических реалий как процесса взаимодействия экономических агентов, преследующих свои частные интересы. В свою очередь *теория общего равновесия*, основанная на методологии теории игр, является ядром микроэкономической теории. Крайне важно, что исследуемые теорией общего равновесия математические модели экономики допускают одновременное рассмотрение кооперативного и бескоалиционного игрового подхода, что позволяет провести их сравнительный анализ. В числе исследуемых теорией равновесия вопросов находится центральное понятие *конкурентного равновесия*, которое можно рассматривать как одну из возможных реализаций концепции равновесия по Нэшу в стратегических играх, а также концепция *ядра экономики*, основанная на сугубо кооперативном теоретико-игровом сценарии. При этом получаются наиболее интересные и значимые результаты как собственно для микроэкономической теории, так и для теории игр.

В математическом виде понятие конкурентного равновесия впервые появляется в работах швейцарского экономиста Леона Вальраса[1], почему и называется равновесием по Вальрасу. Вальрас также впервые задаётся вопросом о *существовании равновесия*, — первого ключевого вопроса теории, означающего, ко всему прочему, *математическую корректность исследуемой модели*. Рассуждения Вальраса в этой части сводятся к наблюдению, что математически равновесие представимо как решение некоторой системы алгебраических уравнений, в которой число неизвестных совпадает с числом уравнений. Позже Абрахам Вальд (1936) дал первое строгое доказательство существования и един-

[1] Walras L. Elements of Pure Economics, 1874.

ственности равновесия, основанное на предположении, что все продукты является взаимозаменяемыми. Однако его модель была описана в слишком агрегированном виде (отождествляется с функцией избыточного спроса), недостаточно точно и ясно отражающем экономические реалии. Решающий шаг был сделан в основополагающей работе Кеннета Эрроу и Жерара Дебре (*Arrow, Debreu*, 1954), заложившей основы современных математических моделей замкнутой децентрализованной экономической системы. Развитая в их рамках теория экономического равновесия является, по-видимому, одним из наиболее выдающихся достижений математической ветви экономической теории второй половины 20-го века. Последние 40 лет были отмечены обширным потоком работ, обобщающих результаты Эрроу — Дебре в самых различных направлениях. В частности, многими исследователями ослаблялись предположения, гарантирующие существование равновесий. Большая часть этих предположений, усилиями многих авторов (таких как А. Мас-Колелл, Р. Ауманн, В. Хильденбранд, Д. Гейл и многие другие), была доведена до математического совершенства и, по-видимому, не может быть принципиально ослаблена в дальнейшем (во всяком случае для конечномерных моделей). Однако все эти результаты в той или иной мере основываются на одном весьма ограничительном модельном предположении, так называемом *условии выживаемости (survival)* потребителей. Обычно это условие формулируется как «ресурсная связность» или «нередуцируемость» экономической модели, а фактически оно играет роль «условия Слейтера» в задаче потребителя. Хотя это предположение и является интерпретируемым свойством, однако вызывает ощущение дискомфорта и, главное, не является безусловно необходимым требованием.

Основной теоретической целью (наряду с учебной — демонстрацией современных методов теории общего равновесия) настоящего пособия является устранение «предположения выживаемости» из условий, гарантирующих существование экономических равновесий. Эта проблема не может быть разрешена в традиционных модельных рамках, ибо, как показывают многие примеры (см. основной текст и *Макаров* (1982), *Маракулин* (1988)), при отсутствии какого-либо аналога условию Слейтера и при прочих обычных посылках (причем гораздо более сильных по сравнению с имеющимися в современной теории существования) равновесия могут не существовать. Мы преодолеваем эту трудность, ревизуя собственно понятие цены. А именно, вместо обычных «стандартных» цен мы предлагаем использовать «нестандартные» (в смысле нестандартного анализа). Другими словами, цены на продукты могут быть не только обычными числами, но и нестандартными, т. е. выбранными из нестандартного расширения числовой прямой $^*\mathbb{R}$ (о нестандартном анализе см., напр. *Robinson* (1966), *Девис* (1980), *Loeb* (2000)). С математической точки зрения мы заменяем обычное понятие «решения» на обобщенное, которое существует уже при более слабых предпосылках, — типичный для математики прием, эффективно работающий в ряде других областей математики (таких как теория обычных и частных дифференциальных уравнений, вариационный анализ и др.). С экономической точки зрения представляется, что этот подход не должен вызывать серьезных возражений, ибо фактически он всего лишь означает, что *шкала измерений* для *цен* на разного рода продукты должна быть *мельче* (в достаточной мере) шкалы, используемой для исчисления физических благ, не изменяя методологической концепции равновесия[2]. Фактически же мы предлагаем определенную асимметрию — продукты измеряются в стандартных величинах, а цены — нестандартных. Таким способом мы явным образом вводим в модель более тонкий, по сравнению с традиционным, механизм стоимостного регулирования, что и позволяет достичь намеченной цели. В литературе известны и другие способы «разрешения проблемы Слейтера». Например, Данилов и Сотсков (*Danilov, Sotskov*, 1990) предложили подход, основанный на понятии меновых стоимостей (работа выполнена в чисто стандартных терминах). В рамках классической модели обмена таким образом получаются результаты, близкие к нижеизложенным. Однако в отличие от *Danilov, Sotskov* (1990), где *постулируется* надлежащая конструкция бюджетных множеств (агентов), мы *доказываем*, что бюджетные множества при нестандартных ценах могут быть представлены в форме, близкой к данной в *Danilov, Sotskov* (1990) (см. § 3.1).

Следующим по значимости вопросом общей теории равновесия является проблема оптимальности, или эффективности, равновесного распределения (ресурсов). Под эффективными распределениями в экономике принято понимать *оптимальные по Парето* — не существует другого распределения, в котором, по сравнению с данным, часть агентов улучшила бы свое положение, не ухудшая положения прочих участников экономики. *Первая теорема благосостояния* утверждает, что в классической модели Эрроу — Дебре (без внешних влияний) равновесие по Вальрасу оптимально по Парето и является формальным доказательством известного высказывания Адама Смита о «невидимой руке»:

[2]Действительно, если экономисты согласны с использованием в теории иррациональных величин, не наблюдаемых в практике (кто встречал на рынке цены типа $\sqrt{2}$, π, e ?), то почему нельзя использовать нестандартные?

> [Каждый индивидуум] стремится к собственной выгоде. При этом, ведомый невидимой рукой [рынка], он приходит к итогу, к которому он [осознанно] не стремился. Преследуя свой собственный интерес, он часто способствует эффективной деятельности сообщества более, нежели бы он действительно стремился к этому.

Вильфредо Парето (1909) уточнил формальное понятие оптимальности и, более того, впервые установил, что с каждым эффективным распределением можно ассоциировать такую систему цен, что распределение обращается в равновесное относительно некоторого исходного распределения ресурсов. Сейчас это составляет содержание *второй теоремы благосостояния*. В пособии также рассматривается проблема эффективности распределения и отвечающих ему цен, но в более широком контексте. Именно, известно, что теоремы благосостояния имеют место, только если экономические агенты полностью эгоистичны, т. е. если их «полезность» зависит только от объёмов потребляемых ими лично благ. Однако если допустить возможность зависимости полезности от потребительских планов других агентов — в таком случае говорят о наличии внешних влияний (в потреблении), то конкурентное равновесие генерически (почти всегда) теряет свойство эффективности (см. *Маракулин* (1981)). В пособии показано, что проблему эффективности при внешних влияниях можно разрешить если допустить индивидуализированные цены, достаточно гибко изменяющиеся, совокупность которых должна удовлетворять некоторому дополнительному требованию, связывающему индивидуальные цены с рыночными. С помощью индивидуальных цен можно определить и соответствующее понятие (эффективного) равновесия. Однако здесь мы опять сталкиваемся с «проблемой условия Слейтера», которую можно разрешить переходом к нестандартным ценам.

Пособие основано, в основном, на авторских результатах, опубликованных в *Маракулин* (1988), *Marakulin* (1990) и в совместной работе *Коновалов, Маракулин* (1997). Содержание этих работ существенно переработано и изложено здесь с единых позиций «абстрактной модели экономики» (с тотальными внешними влияниями). Первая глава вводит читателя в мир нестандартной математики (анализа) и содержит сводку наиболее употребительных в приложениях фактов и результатов нестандартного анализа. Во второй главе последовательно развивается теория экономического равновесия с нестандартными ценами в абстрактной экономике. Пособие завершает третья глава, в которой рассматриваются приложения полученных результатов к основным неоклассическим моделям экономики — модели рынка, модели Эрроу — Дебре (с производственным сектором) и, наконец, модели экономики с общественными благами. В завершающем разделе формулируется (без доказательства) теорема о конечности числа равновесий с нестандартными ценами в модели рынка.

Глава 1

Введение в нестандартный анализ

Нестандартный анализ, иногда называемый также инфинитезимальным анализом, — это, скорее, математическая техника, нежели самостоятельная теория. Нестандартный анализ оперирует с идеальными элементами, которые могут быть как бесконечно близки к интересующему объекту, так и бесконечно далеки от него. Ниже представлено построение совокупности нестандартных чисел и более сложных нестандартных объектов, ассоциированное с достаточно простой системой логики. Кроме того, приведена сводка необходимых базисных результатов этой теории. С её деталями, а также с большинством из опущенных доказательств, читатель может ознакомится в *Девис* (1980), *Anderson* (1992), *Loeb* (2000).

Нестандартный анализ находит своё применение во многих областях современной математики. В их числе действительный и комплексный анализ, теория меры и теория вероятности, функциональный анализ и общая топология. Одно из наиболее заметных преимуществ нестандартной методологии состоит в том, что она обладает возможностью упростить математические рассуждения. Например, используя нестандартные методы, обычно можно существенно упростить громоздкие ε-δ рассуждения. Поэтому о нестандартном анализе часто говорят, что он служит целям «элиминации количеств».

Большинство из приложений нестандартного анализа основывается на идее гиперконечного множества — это множество, которое может быть занумеровано нестандартными натуральными числами, не превосходящими некоторое фиксированное нестандартное натуральное число. Используя это понятие, можно аппроксимировать бесконечные (и даже бесконечномерные) объекты множествами, к которым применимы стандартные заключения о конечных объектах. В частности, в экономико-математической литературе имеется значительное количество работ, использующих идею гиперфинитного множества — это в основном результаты, в которых исследуются «большие» модели экономики (с бесконечным числом агентов или продуктов). Например, таким способом моделируются ситуации, отражающие условия совершенной конкуренции, — это модели, в которых имеется «много» индивидуумов, каждый из которых имеет пренебрежимо малое влияние на экономику в целом. Такого рода постановки приводят к рассмотрению моделей с гиперфинитным множеством экономических агентов, оснащённых стандартно ограниченными возможностями влиять на текущую ситуацию (в модели обмена — околостандартными векторами исходных запасов). Первый результат этого типа появился в пионерской работе Брауна и Робенсона (*Brown, Robinson*, 1974), основанной на понятии гиперконечной экономики чистого обмена. Описание достижений в этой области равновесного анализа можно найти в *Rashid* (1987) и *Anderson* (1992). Имеется также множество других приложений методов нестандартного анализа к математической экономике и теории игр. В их числе работы по моделям с перекрывающимися поколениями экономических агентов, с бесконечным временным горизонтом, экономикам с общественными благами, бескоалиционным играм с «большим» числом игроков и т. д. Во второй главе настоящего пособия будет показано, как с помощью методов нестандартного анализа разрешается проблема существования экономического равновесия при отсутствии в модели (очень нереалистичного) условия Слейтера в задаче потребителя или каких-либо его аналогов (survival assumption).

1.1 Нестандартный анализ: конструктивный подход

Типичным в истории развития математики является метод, основанный на введении и изучении идеальных элементов, обеспечивающих существование решения уравнений, ранее таковых не имевших. Древние греки открыли, что уравнение $x^2 = 2$ неразрешимо в рациональных числах; проблема разрешается через введение идеального элемента $\sqrt{2}$, а в дальнейшем и собственно множества действительных чисел — как пополнения множества рациональных. Подобным образом комплексные числа появляются посредством введения идеального элемента $i = \sqrt{-1}$. Лейбниц[1] (1684) впервые вводит в рассмотрение бесконечно малые как идеальные элементы, которые не равны нулю и неотрицательны, но при этом меньше любого положительного действительного числа. Таким образом, бесконечно малые появляются как решение семейства неравенств

$$x > 0; \quad x < 1, \quad x < 1/2, \quad x < 1/3, \ \ldots \tag{1.1.1}$$

Бесконечно малые играли важную роль в созданном Лебницем дифференциальном исчислении. Например, по Лейбницу производная функции определялась как наклон функции на интервале бесконечно малой длины. Лейбниц постулирует, что множество действительных чисел, пополненное бесконечно малыми, обладает теми же свойствами и удовлетворяет тем же правилам оперирования с его элементами, что и множество обычных действительных чисел. К сожалению, эти воззрения не являлись непротиворечивыми. К примеру, известно, что каждое ограниченное множество действительных чисел обладает точной верхней гранью. Однако что произойдёт если рассмотреть бесконечно малые? Очевидно, что множество бесконечно малых — обозначим его далее как Δ — ограничено любым положительным действительным числом. Предположим, что у Δ существует точная верхняя грань ξ. Теперь, если ξ бесконечно малое число, т. е. если ξ удовлетворяет неравенствам (1.1.1), то таким же является число $\xi + \xi$, ибо неравенство $\xi + \xi < 1/n$ следует из $\xi < 1/2n$ для всех натуральных $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, так как $\xi > 0$, то должно быть $\xi + \xi > \xi$, что противоречит тому факту, что ξ является точной верхней гранью множества Δ. Наконец, если предположить, что ξ не является бесконечно малым, то получаем $\xi > 1/n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Однако $1/n$ больше любого бесконечно малого числа — противоречие с тем, что ξ является точной верхней гранью Δ.

Теория, построенная Абрахамом Робинсоном (*Robinson*, 1966), избегает такого рода парадоксов, поскольку использует язык и обоснования математической логики. В рамках этой теории «принцип Лейбница» формулируется в следующем виде: *существует расширение множества действительных чисел, включающее бесконечно малые и имеющее те свойства числовой прямой, которые выражаются в определённом формальном языке.* Таким образом, свойство числа — быть бесконечно малым — не имеет соответствующего описания в языке. В таком

[1] Leibniz G. Nova methodus pro maximis et minimis// Acta Eruditorum. Leipzig, 1684.

случае в нестандартном анализе говорят, что совокупность бесконечно малых является *внешним множеством* (будет пояснено ниже).

Конечно, изложенные положения и комментарии достаточно приблизительны. Чтобы предмет нестандартного анализа стал действительно ясным, неопытному в этой области читателю необходимо обратиться к детализированным руководствам (некоторые из них указаны выше).

1.1.1 Фильтры

Конструкция *нестандартного универсума* (мира нестандартной математики) основана на методах математической логики, причём при этом используется понятие ультрапроизведения. Чтобы прояснить существо конструкции ниже приводится понятие и сводка простейших свойств *фильтров.*

Определение 1.1.1 *Пусть I любое непустое множество. Семейство подмножеств $F \subseteq 2^I$ называется* фильтром на I, *если*

(1) $A \in F$ *и* $A \subseteq B$ *влечёт* $B \in F$,

(2) $A, B \in F$ *влечёт* $A \cap B \in F$, *и,*

(3) $\emptyset \notin F$, $I \in F$.

Максимальный элемент (по включению) множества всех фильтров на I называется *ультрафильтром.* Другими словами, F ультрафильтр на I, если F является фильтром и для любого другого фильтра F_1 включение $F_1 \supseteq F$ влечёт $F_1 = F$. Например, множество всех подмножеств в I, содержащих фиксированный элемент в I, является ультрафильтром:

$$F_x = \{A \in 2^I \mid x \in A\}, \quad x \in I.$$

Ультрафильтры этого вида называются *главными, или тривиальными.* Тот факт, что нетривиальные ультрафильтры существуют, является следствием леммы Цорна (или эквивалентной ей аксиоме выбора).

Теорема 1.1.1 (Картан) *Если F_0 фильтр на I, то существует ультрафильтр F на I, такой, что $F \supseteq F_0$.*

Теорема 1.1.2 (Бурбаки) *Если I бесконечное множество, то нетривиальный ультрафильтр на I существует.*

Интересное свойство нетривиальных ультрафильтров состоит в том, что они не содержат конечных множеств.

Теорема 1.1.3 *Пусть F нетривиальный ультрафильтр на I. Тогда из $A \in F$ следует, что A бесконечное.*

Доказательство. Предположим, что существует такое конечное множество A, что $A \in F$. Без ограничения общности можно считать, что никакое собственное подмножество A не принадлежит F. По определению фильтра A непусто. Пусть $a \in A$. Так как F нетривиальный ультрафильтр, A должно содержать не менее двух элементов, т. е. $A \setminus \{a\} \neq \emptyset$. Рассмотрим семейство множеств

$$G = \{X \subseteq I \mid \{a\} \cup X \in F\}$$

и покажем, что G фильтр. Очевидно, $\emptyset \notin G$ и $I \in G$. Если $X_1, X_2 \in G$, то $X_1 \cup \{a\}, X_2 \cup \{a\} \in F$, откуда $(X_1 \cap X_2) \cup \{a\} \in F$ и $X_1 \cap X_2 \in G$. Предположим $X_2 \supseteq X_1$ и $X_1 \in G$. Тогда $X_1 \cup \{a\} \in F$ и $X_2 \cup \{a\} \in F$, что влечёт $X_2 \in G$.

С другой стороны, $X \in F$ влечёт $\{a\} \cup X \in F$ и $X \in G$. Следовательно, $G \supseteq F$. Более того, F является собственным подмножеством G, так как $A \setminus \{a\} \in G$, но $A \setminus \{a\} \notin F$. Но последнее означает, что F не является ультрафильтром — противоречие. □

Определяющим свойством того, что некоторый фильтр является ультрафильтром, является тот факт, что каждое подмножество A в I или его дополнение $I \setminus A$ должно быть элементом фильтра.

Теорема 1.1.4 *Пусть F фильтр на I. Тогда F ультрафильтр на I $\Longleftrightarrow$ для каждого $A \subseteq I$ либо $A \in F$, либо $I \setminus A \in F$.*

Следствие 1.1.1 *Если F нетривиальный ультрафильтр на I, то каждое множество с конечным дополнением является элементом F.*

1.1.2 Индивиды и суперструктуры

Приложения нестандартного анализа начинаются с выбора подходящего множества *индивидов* S. Обычно в качестве S выбирается множество точек топологического пространства или, например, множество всех действительных чисел. Технически удобно считать, что члены S не являются множествами (хотя индивидами могут быть объекты, которые в распространённых изложениях определяются как множества); т. е., если $x \in S$, то $x \neq \emptyset$ и утверждения $t \in x$ и $t \subseteq x$ не являются осмысленными (т. е. ложны). Далее будет показано, как можно построить простейшую суперструктуру всех множеств (включая отношения и функции), необходимую в обычных математических построениях, связанных с элементами S. Определим иерархию:

$$S_0 = S,$$

$$S_{i+1} = S_i \cup 2^{S_i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

и положим

$$\widehat{S} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i.$$

Тогда $\widehat{S}$ называется *суперструктурой* с индивидами S. Каждый элемент из S называется *индивидом* суперструктуры $\widehat{S}$, и каждый элемент из $\widehat{S} \setminus S$ называется *множеством* из $\widehat{S}$. Заметьте, что $\emptyset \subset S$, так что $\emptyset \in S_1$.

Следующие примеры показывают, как разного рода математические объекты могут быть представлены в суперструктуре.

• Предположим, что $a_1, \ldots, a_n \in S_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Известно, что упорядоченное множество (кортеж) $a = (a_1, \ldots, a_n)$ может быть представлено как множество

$$\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_1, \ldots, a_n\}\}.$$

Но тогда, так как каждое из множеств $\{a_1\}, \ldots, \{a_1, \ldots, a_n\}$ является элементом в S_{i+1}, множество a будет элементом в S_{i+2}.

• Предположим, что A и B два множества, такие, что $A, B \in S_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Функция $f : A \to B$ может быть определена с помощью её графика $G = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$. Из предыдущего примера мы знаем, что каждая упорядоченная пара $(x, f(x))$ является элементом в S_{i+2}. Следовательно, $G \subset S_{i+2}$ и $G \in S_{i+3}$. Множество всех функций из A в B тогда является элементом в S_{i+4}.

• Рассмотрим пример модели экономики с множеством $\mathcal{I} \subset S$ экономических агентов и пространством продуктов $\mathbb{R}^l_+$. Каждый элемент из $\mathbb{R}^l_+$ является l-мерным вектором (кортежем — упорядоченной совокупностью l элементов из $\mathbb{R}$) и, следовательно, является элементом в S_2 (предполагаем $S = \mathbb{R}$). Отношение предпочтения $\succ$ отождествляется с подмножеством из $\mathbb{R}^l_+ \times \mathbb{R}^l_+$ и, таким образом, является элементом в S_3. Пара предпочтение-запасы $(\succ_i, \omega_i)$, $i \in \mathcal{I}$, где $\omega_i \in \mathbb{R}^l_+$, является элементом в S_5. Тогда экономика обмена представляется как функция из $\mathcal{I}$ в множество пар вида «предпочтение-запасы» и, таким образом, является элементом в S_8.

1.1.3 Универсумы

Пусть S — некоторое множество индивидов.

Определение 1.1.2 *Любое подмножество* U *суперструктуры* $\widehat{S}$ *называется* универсумом *с индивидами* S*, если*

(1) $\emptyset \in U,\ S \subseteq U$,

(2) $x, y \in U \Rightarrow \{x, y\} \in U$,

(3) *для каждого* $A \in U$, $x \in A$ *выполнено* $x \in U$.

Первый важный факт об универсумах состоит в том, что построенная выше суперструктура $\widehat{S}$ является универсумом с индивидами S.

Теорема 1.1.5 $\widehat{S}$ *— универсум с индивидами* S.

Предположим, что r и s два элемента суперструктуры $\widehat{S}$. Если r — отношение (соответствие) и существует *единственный* $t \in \widehat{S}$, такой, что $(s, t) \in r$, то пишем $r(s) = t$. В частности, если r является графиком некоторой функции (отображения), то $r(s)$ обозначает значение этой функции в точке t. Во всех других случаях (если нет такого t или их имеется более двух, или r не является отношением), полагаем $r(s) = \emptyset$. Важно, что любой универсум удовлетворяет следующему свойству *замыкания* :

Теорема 1.1.6 *Если* U *универсум и* $r, s \in U$, *то* $r(s) \in U$ *и* $(r, s) \in U$, *где* $(r, s) = \{\{r\}, \{r, s\}\}$ *— упорядоченная пара.*

Далее всюду в этом разделе, когда мы говорим о *стандартном универсуме с индивидами* S, или просто о *стандартном универсуме*, обозначенном как U, то это означает, что рассматривается суперструктура $\widehat{S}$, т. е. полагается

$$U := \widehat{S}.$$

Ниже излагается вариант конструкции другого, так называемого *нестандартного универсума* $^*U$, индивиды которого *включают* элементы S и свойства которого тесно связаны со свойствами U.

Итак, пусть F — некоторый нетривиальный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Будем говорить, что некоторое свойство элементов из $\mathbb{N}$ имеет место *п. в. (почти всюду)*, или *для почти всех* $n \in \mathbb{N}$, если множество чисел n, для которых это свойство выполнено, принадлежит F.

При построении нестандартного универсума используются последовательности $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, отображающие $\mathbb{N}$ в U. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ определим Z_i как множество всех последовательностей f, отображающих $\mathbb{N}$ в U, для которых $f_n \in S_i$ п. в. Наконец, пусть

$$Z = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Z_i.$$

Множество Z поставляет «сырьевые ресурсы» для конструкции нестандартного универсума ${}^*U$.

Далее отметим, это важно, что имеется естественное вложение стандартного универсума U в Z. Именно, *отождествим* элемент $r \in U$ с постоянной последовательностью r, т. е. положим $r_n = r$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Например, таким образом полагается, что

$$4 = (4, 4, 4, \ldots) \in Z_0.$$

Далее фиксируем любой нетривиальный ультрафильтр F на $\mathbb{N}$. Для двух последовательностей f и g из Z_0 положим $f \sim g$, если $f_n = g_n$ почти всюду. Из определения ультрафильтра следует, что $\sim$ является отношением эквивалентности на Z_0. Теперь для $f \in Z_0$ определим

$$^*f = \{g \in Z_0 \mid g \sim f\}. \tag{1.1.2}$$

Таким способом отношение $\sim$ «расчленяет» Z_0 на дизъюнктные классы эквивалентности. Далее положим

$$W = \{\,^*f \mid f \in Z_0\},$$

принимая это множество в качестве совокупности *нестандартных индивидов*. Отметим, что из определения ультрафильтра и в силу вложения S в Z_0 следует, что для любых двух различных x, y из S выполнено ${}^*x \neq {}^*y$. Это означает, что можно корректным образом отождествить каждый $x \in S$ с элементом ${}^*x \in W$. В таком случае, например, класс эквивалентности ^{*3}, содержащий последовательности вида $(1, 2, 3, 3, 3, \ldots)$ и $(2, 1, 3, 3, 3, \ldots)$, отождествляется с натуральным числом 3. Таким образом, имеем $S \subseteq W$, и теперь можно сказать, что для $x \in S$ имеет место ${}^*x = x$.

На следующем шаге определим суперструктуру $\widehat{W}$, полагая

$$W_0 = W, \quad W_{i+1} = W_i \cup 2^{W_i},\ i \geq 2 \quad \& \quad \widehat{W} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i.$$

И наконец определим универсум ${}^*U$, который состоит из множества W и определённых (не всех!) подмножеств $\widehat{W}$, ассоциируя, по некоторому рекурсивному правилу, с элементами $f \in Z_i$, соответствующие элементы $^*f \in W_i$. Действительно, $^*f$ были выше определены для $f \in Z_0$. Пусть натуральный $k \geq 0$, $f \in Z_{k+1} \setminus Z_k$, и предположим, что $^*g$ уже определены для всех $g \in Z_i$, $i \leq k$. Положим

$$^*f = \{\, ^*g \mid g \in Z_k \text{ и } g_n \in f_n \text{ почти всюду}\}. \tag{1.1.3}$$

Другими словами, $^*f$ содержит такие элементы $^*g$, для которых (любой) его «прототип» $g \in Z$ удовлетворяет условию $g_n \in f_n$ для почти всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда по построению и рекурсии для каждого $^*g \in {}^*f$ будем иметь $^*g \in W_k$. Следовательно, $^*f \subseteq W_k$ и $^*f \in W_{k+1}$. Более того, таким способом мы фактически определили отображение

$$*(.) : Z \to \widehat{W}.$$

В итоге нестандартный универсум, соответствующий U, определяется по формуле

$$^*U = \{\, ^*f \mid f \in Z\},$$

или, иначе говоря, $^*U$ является образом Z при отображении $*(.)$:

$$^*U = {}^*(Z) \subset \widehat{W}.$$

Имеет место следующая

Теорема 1.1.7 *$^*U$ является универсумом в суперструктуре $\widehat{W}$.*

Так как $U \subset Z$ (через вложение), то каждому элементу, (который может быть множеством в обычном смысле!), стандартного универсума U сопоставляется определённый элемент суперструктуры $\widehat{W}$. Например, из построения $^*U$ следует, что в $*$-образах множеств $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, определены и обладают привычными свойствами алгебраические операции $+$ и $\cdot$, а также отношение упорядочивания $>$. В частности, *множество гипердействительных чисел* $^*\mathbb{R}$ является элементом W_1, генерированным последовательностью $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \ldots) \in Z_1$. Несложно видеть, что $^*{>}$ является таким отношением на $^*\mathbb{R}$, что

$$^*x \,{}^*{>}\, {}^*y \quad \Longleftrightarrow \quad x_n > y_n \text{ п. в.}$$

Причем из конструкции ясно, что это свойство не зависит от того, какой именно представитель выбран из классов эквивалентности $^*x$ и $^*y$, представляющих x и y.

С целью упростить обозначения, символ $*$ обычно опускают, если в нестандартном универсуме имеется в виду какая-либо привычная операция $+$, $<$, $\cdot$, или другое «стандартное» отношение или функция. Таким образом, принято писать 3, $>$, $=$, sin, $|\cdot|$ (абсолютная величина или мощность) для нестандартных аналогов этих объектов, вместо ^{*3}, ${}^*{>}$, ${}^*{=}$, ${}^*\sin$, ${}^*|\cdot|$, соответственно.

Рассмотрим нестандартного индивида ${}^*w$, генерированного последовательностью

$$w = (1, 2, 3, 4, \ldots).$$

Здесь ${}^*w$ является элементом множества ${}^*\mathbb{N}$ *нестандартных натуральных чисел*, ибо $w_n \in \mathbb{N}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Заметьте, что поскольку каждое натуральное $n \in \mathbb{N}$ принадлежит ${}^*\mathbb{N}$ (через вложение), мы вправе записать $\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{N}$. Так как ${}^*w \notin \mathbb{N}$, то $\mathbb{N}$ является собственным подмножеством ${}^*\mathbb{N}$. Ясно, что последовательность w больше любого натурального $n \in \mathbb{N}$ в бесконечном числе компонент (так как она меньше n только в конечном числе позиций). Следовательно, истинно

$$ {}^*w > n \quad \text{для каждого} \quad n \in \mathbb{N},$$

и мы получили, таким образом, *бесконечно большое натуральное число.* Аналогично убеждаемся в том, что величина ${}^*\varepsilon$, для $\varepsilon = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$ должна рассматриваться как гипердействительная, которая меньше любого положительного действительного числа:

$$ {}^*\varepsilon < 1/n \quad \text{для каждого} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1.4}$$

Более того, покоординатное произведение w и ε даёт постоянную последовательность $(1, 1, 1, \ldots)$, откуда заключаем ${}^*w \cdot {}^*\varepsilon = 1$. Таким образом, мы не только нашли бесконечно большое и бесконечно малое число, но также обнаружили, что их произведение может дать действительное число.

Любое гипердействительное число $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$, удовлетворяющее $|\varepsilon| < 1/n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, называется *бесконечно малым (инфинитезимальным).* Для любых двух гипердействительных чисел x, $y \in {}^*\mathbb{R}$ пишем $x \approx y$ (читается как: x *бесконечно близко* к y), если разница $x - y$ бесконечно мала.

Элемент ${}^*r \in {}^*U$, для которого существует другой элемент $r \in U$ из стандартного универсума, называется *стандартным элементом* в ${}^*U$. Естественно, что элементы ${}^*U$, которые не являются стандартными, называются *нестандартными элементами* ${}^*U$. В частности, стандартными индивидами являются только элементы S; нестандартные индивиды образуют «множество» $W \setminus S$.

Множества из $\widehat{W}$, принадлежащие ${}^*U$, называются *внутренними*; множества из $\widehat{W}$, которые не являются внутренними, называются *внешними* — они буквально внешние по отношению к нестандартному универсуму ${}^*U$ — принадлежат $\widehat{W} \setminus {}^*U$. Примерами внутренних множеств являются ${}^*\mathbb{N}$ и ${}^*\mathbb{R}$. Примеры внешних множеств — множество всех стандартных натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множество всех бесконечно малых Δ. Можно доказать, что не существует такого элемента $z \in Z$, что ${}^*z = \mathbb{N}$ или ${}^*z = \Delta$. Функция называется внутренней, если её график является внутренним множеством.

Подведём некоторые итоги. Выше было построено два универсума: стандартный универсум U, который является просто суперструктурой, построенной на подходящем множестве индивидов S, и нестандартный универсум ${}^*U$, состоящий из множества индивидов $W \supset S$ и некоторых множеств из суперструктуры $\widehat{W}$. Показано, что множество ${}^*U$ содержит бесконечно малые и бесконечно большие числа. На U существует отображение $*(.)$, действующее в ${}^*U$. Элементы ${}^*U$ вида ${}^*x$ для некоторого $x \in U$ называются стандартными; прочие элементы ${}^*U$ называются нестандартными. Множества из $\widehat{W}$, являющиеся элементами ${}^*U$, называются внутренними, все прочие множества — внешними. Внешние множества существуют — уже совокупность натуральных чисел является внешним множеством.

1.1.4 Языки и семантика

Для произвольного универсума $\widetilde{U}$ построим соответствующий *язык* $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\widetilde{U})$, который используется для формулировки утверждений об $\widetilde{U}$. Основой каждого языка $\mathcal{L}$ является множество $\mathcal{A}$, называемое *алфавитом* в $\mathcal{L}$, члены которого называются *символами*. Мы записываем $\mathcal{A}$ в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3,$$

причём множества $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, и $\mathcal{A}_3$ предполагаются попарно дизъюнктными и удовлетворяющими следующим требованиям.

(1) Символами, принадлежащими $\mathcal{A}_1$, являются

$$= \quad \in \quad \neg \quad \& \quad \exists \quad (\quad) \quad ,$$

(2) Символы, принадлежащие $\mathcal{A}_2$, называются *переменными* и образуют счётное бесконечное множество:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ \ldots$$

(3) Множество $\mathcal{A}_3$ находится во взаимно однозначном соответствии с универсумом $\widetilde{U}$. Для каждого $b \in \widetilde{U}$ элемент из $\mathcal{A}_3$, соответствующий b, называется *именем* b. Символы из $\mathcal{A}_3$ называются *константами.* Конечно, в общем случае $\mathcal{A}_3$ бесконечно и даже несчётно.

Конечная последовательность символов алфавита $\mathcal{L}$ называется *выражением* в $\mathcal{L}$. Выражение μ называется *термом*, если существует конечная последовательность $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ выражений, где $\mu_n = \mu$, такая, что для каждого i, $1 \leq i \leq n$ истинна одна из следующих альтернатив:

(1) μ_i переменная,

(2) μ_i константа,

(3) $\mu_i = (\mu_j, \mu_k)$, где $j, k < i$,

(4) $\mu_i = \mu_j(\mu_k)$, где $j, k < i$.

Выражение $(x_3(x_2), x_2)$ является примером терма. Терм, не содержащий переменных, называется *замкнутым* термом.

Выражение α называется *формулой*, если существует конечная последовательность выражений $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, где $\alpha_n = \alpha$, такая, что для каждого α_i, $1 \leq i \leq n$ имеет место

(1) $(\mu = \nu)$, где μ и ν термы в $\mathcal{L}$, или

(2) $(\mu \in \nu)$, где μ и ν термы в $\mathcal{L}$, или

(3) $\neg\alpha_j$, где $j < i$, или

(4) $(\alpha_j \& \alpha_k)$, где $j, k < i$, или

(5) $(\exists x_j \in \mu)\alpha_k$, где $k < i$, x_j является переменной и μ — терм в $\mathcal{L}$, в который x_j не входит.

Примером формулы является $((x_1 = x_2) \& \neg(x_1 \in x_2))$. Вхождение переменной x_i в формуле α называется *связанным*, если существует такая формула β, что β является частью α, содержащей вхождение x_i, и при этом β является формулой вида $(\exists x_i \in \mu)\gamma$. Вхождение x в α, которое не является связанным, называется *свободным.* Формула, не содержащая переменных со свободными вхождениями, называется *высказыванием.* Например, формула $(\exists x_1 \in b)\neg(\exists x_2 \in c)(x_1 \in x_2)$, где b и c некоторые константы, является высказыванием, так как все вхождения переменных являются связанными. Интуитивно высказывание представляет некоторое утверждение, значение которого не меняется в зависимости от значений входящих в него переменных.

Для формулы α языка $\mathcal{L}$ пишем

$$\alpha = \alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}),$$

когда все переменные, имеющие *свободные* вхождения в α, включены в список $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$. В этом случае через $\alpha(b_1, \dots, b_k)$ обозначают высказывание, полученное заменой каждого свободного вхождения x_{i_1} на b_1, x_{i_2} на b_2 и т. д.

Предполагается, что каждый замкнутый терм в $\mathcal{L}$ «представляет» определённый элемент универсума $\widetilde{U}$ и что каждое высказывание в $\mathcal{L}$ образует истинное или ложное утверждение об $\widetilde{U}$. Все эти понятия и представления принимают точный смысл в *семантике* языка $\mathcal{L}$, описываемой ниже.

Пусть μ — замкнутый терм в $\mathcal{L}$. Определим *значение* $|\mu|$ следующим образом:

(1) $|b| = b$ для всех констант $b \in \widetilde{U}$,

(2) $|(\mu, \nu)| = (|\mu|, |\nu|)$,

(3) $|\mu(\nu)| = |\mu|(|\nu|)$.

Используя это определение рекурсивным образом (рекурсия по длине μ), придаём *значение* $|\mu|$ для всех замкнутых термов. Применяя далее индукцию и теорему 1.1.6, заключаем, что $|\mu| \in \widetilde{U}$ для каждого замкнутого терма μ.

Далее определим по рекурсии понятие *истинности* в $\widetilde{U}$ *высказывания* α в языке $\mathcal{L}$, что записывается как $\widetilde{U} \models \alpha$ и читается «α истинно в $\widetilde{U}$». Положим:

(1) $\widetilde{U} \models (\mu = \nu)$ тогда и только тогда, когда $|\mu| = |\nu|$,

(2) $\widetilde{U} \models (\mu \in \nu)$ тогда и только тогда, когда $|\mu| \in |\nu|$,

(3) $\widetilde{U} \models \neg\alpha$ тогда и только тогда, когда неверно, что $\widetilde{U} \models \alpha$,

(4) $\widetilde{U} \models (\alpha \& \beta)$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{U} \models \alpha$ и $\widetilde{U} \models \beta$,

(5) $\widetilde{U} \models (\exists x_i \in \mu)\alpha(x_i)$ тогда и только тогда, когда $U \models \alpha(c)$ для некоторого $c \in |\mu|$.

Это определение представляет собой рекурсию по общему числу вхождений символов $\neg$, $\&$, и $\exists$ в высказывание. Заметим при этом, что при полном отсутствии этих символов, так как мы имели дело с высказываниями, μ и ν в (1) и (2) должны быть замкнутыми термами. Отсюда следует определённость $|\mu|$ и $|\nu|$, что и задаёт базу индукции по числу вхождений указанных логических символов. А дальше рекурсия.

Формулы в $\mathcal{L}$ могут использоваться не только для формулировки утверждений об $\widetilde{U}$, но также для определения подмножеств в $\widetilde{U}$. Пусть $A \subseteq \widetilde{U}$. Тогда множество A называется *определимым*, если существует формула $\alpha = \alpha(x)$ в $\mathcal{L}$, такая, что

$$A = \{b \in \widetilde{U} \mid \widetilde{U} \models \alpha(b)\}.$$

Напомним, что все прочие (привычные) логические операции могут быть выражены посредством операций, рассмотренных выше. Действительно, пусть α, β — произвольные формулы в $\mathcal{L}$, x_i — переменная и μ — терм в $\mathcal{L}$. Тогда полагаем $(\alpha \vee \beta)$ для $\neg(\neg\alpha\&\neg\beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ для $\neg(\alpha\&\neg\beta)$ и $(\forall x_i \in \mu)\alpha$ для $\neg(\exists x_i \in \mu)\neg\alpha$. Тем самым понятие истинности распространяется на все привычные математические высказывания.

1.2 Три техники

Теория нестандартного анализа работает с двумя структурами — *стандартным универсумом* и *нестандартным универсумом*. Кроме того, имеется формальный язык, который применяется для формулировки разного рода утверждений в каждой из этих структур.

Имеется три основных инструмента — вида математической техники — нестандартного анализа. Первый из них — это *принцип переноса*, который, грубо говоря, утверждает, что любое утверждение, истинное в стандартном универсуме, является истинным в нестандартном, и наоборот. Другая техника — это *теорема направленности*. Эта теорема гарантирует, что расширенная структура содержит достаточно много идеальных элементов и, в частности, включает в себя все мыслимые пополнения, компактификации и т. д. Третья техника — это принцип доказательства от противного в предположении, что то или иное множество является *внутренним*. Множество S элементов нестандартного универсума называется *внутренним*, если S само является элементом нестандартного универсума; в противном случае S называется *внешним* множеством.

1.2.1 Принцип переноса

Имеется ровно два универсума, которые будут рассматриваться в дальнейшем и относятся собственно к нестандартному анализу. Это *стандартный* универсум U и *нестандартный* универсум ${}^*U$. Далее пишем $\mathcal{L} = \mathcal{L}(U)$ — язык, используемый для стандартного универсума, и ${}^*\mathcal{L} = \mathcal{L}({}^*U)$ — для нестандартного. Если α высказывание в $\mathcal{L}$, то пишем $\models \alpha$ вместо $U \models \alpha$. Аналогично, если α — высказывание в ${}^*\mathcal{L}$, то используем ${}^*\!\models \alpha$ вместо ${}^*U \models \alpha$.

Далее, мы пополним область определения, введённого ранее отображения $*(.)$, множеством всех формул и термов языка $\mathcal{L}$. Именно, пусть λ — терм или формула в $\mathcal{L}$. Определим ${}^*\lambda$ как терм (или формулу) в ${}^*\mathcal{L}$, полученную из λ замещением каждой константы $b \in U$ в λ соответствующей константой ${}^*b \in {}^*U$ в языке ${}^*\mathcal{L}$. Следующий факт является весьма важным и широко используется в «нестандартных» доказательствах.

Теорема 1.2.1 (Принцип переноса) *Пусть α высказывание в $\mathcal{L}$. Тогда*

$$ {}^*\!\models {}^*\alpha \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad \models \alpha. $$

Принцип переноса образует один из основных инструментов нестандартного анализа. Математическая теорема, эквивалентная $\models \alpha$ при некотором высказывании α в $\mathcal{L}$, может быть доказана посредством демонстрации того, что ${}^*\!\models {}^*\alpha$.

С целью продемонстрировать продуктивность принципа переноса, рассмотрим последовательность действительных чисел $s = \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Тогда выполнено

$$ \models (\forall n \in \mathbb{N})(\exists r \in \mathbb{R})(s_n = r). $$

По принципу переноса истинно

$$ {}^*\!\models (\forall n \in {}^*\mathbb{N})(\exists r \in {}^*\mathbb{R})(({}^*s)_n = r), $$

что влечёт, что ${}^*s$ отображает ${}^*\mathbb{N}$ в ${}^*\mathbb{R}$. В последующем, так как ${}^*s$ является стандартным элементом в ${}^*U$, будем естественно писать s_n для ${}^*s$ (вместо громоздкого $({}^*s)_n$), даже если n бесконечно. Далее докажем следующий критерий сходимости стандартной последовательности s.

Теорема 1.2.2 *Число $r \in \mathbb{R}$ является пределом $s = (s_n)$ тогда и только тогда, когда $s_n \approx r$ для всех $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $s_n \to r$. Возьмём некоторый $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Из определения предела для этого ε существует такой $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\models (\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |s_n - r| < \varepsilon).$$

Применяя принцип переноса, заключаем

$$^* \models (\forall n \in {}^*\mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |s_n - r| < \varepsilon).$$

Заметьте, что опять мы пишем n_0, r, ε без $*$, поскольку эти числа являются стандартными индивидами в ${}^*U$. Так как n_0 конечно, то имеем $|s_n - r| < \varepsilon$ для каждого $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. В силу произвольности в выборе ε заключаем $|s_n - r| \approx 0$, т. е. $s_n \approx r$ для каждого бесконечного натурального $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Докажем обратное. Пусть $s_n \approx r$ для всех $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Возьмём и зафиксируем произвольный $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Так как $s_n \approx r$ для всех бесконечных n, то $|s_n - r| < \varepsilon$ для всех бесконечных n. В частности, если n_0 является некоторым фиксированным *бесконечным* натуральным, то $|s_n - r| < \varepsilon$ для всех $n > n_0$. Следовательно

$$^* \models (\exists n_0 \in {}^*\mathbb{N})(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |s_n - r| < \varepsilon).$$

По принципу переноса получаем

$$\models (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |s_n - r| < \varepsilon),$$

что является стандартным определением того факта, что r является пределом последовательности (s_n). □

Используя принцип переноса также можно легко доказать, что множество всех стандартных чисел $\mathbb{N}$ является внешним. Действительно, известно, что каждое ограниченное подмножество $\mathbb{N}$ имеет максимальный элемент. Тогда из принципа переноса заключаем, что каждое *внутреннее* ограниченное подмножество ${}^*\mathbb{N}$ имеет максимальный элемент. Множество $\mathbb{N}$ является подмножеством ${}^*\mathbb{N}$ и ограничено любым бесконечным натуральным. Легко видеть, что максимальный элемент $\mathbb{N}$, если существует, не является элементом $\mathbb{N}$. Это противоречие показывает, что на самом деле $\mathbb{N}$ является внешним множеством относительно универсума ${}^*U$.

Полезным следствием принципа переноса является следующая характеризация множества ${}^*A$ для определимого множества $A \in U$.

Теорема 1.2.3 *Пусть $A = \{b \in U \mid \models \alpha(b)\}$, где α формула в $\mathcal{L}$, является множеством в U (т. е. $A \in U$). Тогда*

$$^*A = \{b \in {}^*U \mid {}^* \models {}^*\alpha(b)\}.$$

В заключение отметим, что в некотором смысле последняя теорема верна не только для элементов из U, но также и определимых подмножеств $A \subseteq U$. Если положить $^*A = \{b \in {}^*U \mid {}^* \models {}^*\alpha(b)\}$, то можно доказать, что множество $^*A$ не зависит от конкретного вида определяющей его формулы α, но только именно от множества A.

1.2.2 Теорема направленности

Начнём данный раздел с определения *направленного* отношения.

Определение 1.2.1 *Бинарное отношение $r \in U$ называется* направленным относительно U *(или просто* направленным*), если для любого конечного набора $a_1, \ldots, a_k \in \operatorname{dom}(r)$ существует такой элемент b, что $(a_i, b) \in r$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Основным результатом о направленных отношениях является

Теорема 1.2.4 (Теорема направленности) *Пусть r — направленное отношение в U. Тогда существует такой элемент $b \in {}^*U$, что $({}^*a, b) \in {}^*r$ для всех $a \in \operatorname{dom}(r)$.*

По определению направленного отношения для каждого конечного подмножества A из области определения — $\operatorname{dom}(r)$ — отношения r найдётся такой элемент $q_A \in U$, что $(a, q_A) \in r$ для всех $a \in A$. Интуитивно, теорема направленности обеспечивает существование такого (нестандартного) b, который представляет собой «предел» точек q_A как только A «приближается» к $\operatorname{dom}(r)$.

С целью иллюстрации практической полезности теоремы направленности, мы докажем ниже нестандартную теорему отделимости, которая утверждает, что любые два выпуклых дизъюнктных подмножества некоторого векторного пространства могут быть *строго разделены* нестандартной гиперплоскостью.

Теорема 1.2.5 (Маракулин 1988) *Пусть X и Y любые два непересекающихся выпуклых подмножества векторного пространства L. Тогда существует внутренний линейный функционал $f : {}^*L \to {}^*\mathbb{R}$, такой, что*

$$f(x) > f(y) \quad \forall\, x \in X, \ \forall\, y \in Y.$$

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ всех пар (A, B), таких, что A конечное подмножество X и B конечное подмножество Y. Обозначим сопряженное пространство линейных (и непрерывных в нужной отделимой линейной топологии) функционалов на L символом L' и рассмотрим отношение $\mathcal{U}$ на множестве $\mathcal{F} \times L'$, заданное по формуле

$$\mathcal{U} = \{((A, B), f) \in \mathcal{F} \times L' \mid \langle f, \mathrm{co}A\rangle > \langle f, \mathrm{co}B\rangle\},$$

где co$A$ и co$B$ — стандартное обозначение выпуклой оболочки множества — здесь A и B соответственно. Для каждого $(A, B) \in \mathcal{F}$, множества co$A$ и co$B$ являются непустыми выпуклыми компактами (в любой отделимой линейной топологии). Следовательно, в силу (второй) теоремы отделимости найдётся линейный функционал, строго разделяющий эти множества, т. е. существует такой $g \in L'$, что $((A, B), g) \in \mathcal{U}$. Теперь пусть $(A_1, B_1), \ldots, (A_k, B_k) \in \mathcal{F}$. Так как

$$(\bigcup_{i=1}^{k} A_i, \bigcup_{i=1}^{k} B_i) \in \mathcal{F},$$

то найдётся $g \in L'$, такой, что

$$((\bigcup_{i=1}^{k} A_i), (\bigcup_{i=1}^{k} B_i), g) \in \mathcal{U}.$$

Но тогда $((A_i, B_i), g) \in \mathcal{U}$ для каждого $i = 1, \ldots, k$, что совместно с предыдущим и доказывает направленность отношения $\mathcal{U}$. Теперь, применяя теорему направленности, заключаем существование (внутреннего) линейного функционала $f \in {}^*(L')$, такого, что

$$f(x) > f(y) \quad \text{для каждого} \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

что и заканчивает доказательство теоремы. □

1.3 Сводка некоторых результатов

В приложениях нестандартного анализа бывает весьма важно уметь показать, что то или иное множество является внутренним. Следующая теорема даёт для этого эффективный критерий, утверждающий, что определимые подмножества внутреннего множества являются внутренними.

Теорема 1.3.1 *Пусть A — внутреннее и $B \subseteq {}^*U$ — определимое множества. Тогда $A \cap B$ внутреннее множество.*

Гиперконечные множества

Предположим, что $A \in U$ является множеством. Пусть $F(A)$ обозначает совокупность всех конечных подмножеств A. Говорят, что множество $B \in {}^*U$ *гиперконечно (гиперфинитно)*, если $B \in {}^*F(A)$ для некоторого $A \in U$. В этом случае, конечно, имеем $B \subseteq {}^*A$. Следующая теорема говорит о том, что каждое множество из стандартного универсума U содержится в некотором гиперконечном множестве.

Теорема 1.3.2 *Пусть $A \in U$ и $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ любое бесконечное натуральное число. Тогда существует гиперконечное множество D, такое, что $|D| < n$ и $x \in A \Rightarrow {}^*x \in D$.*

Важно также то, что каждое внутреннее подмножество гиперконечного множества само является гиперконечным (доказательство несложно).

Гипердействительные числа и стандартные части

Из того, что $\mathbb{R}$ упорядоченное поле, следует (по принципу переноса), что ${}^*\mathbb{R}$ также является упорядоченным полем относительно операций $+, \cdot$, и отношения $<$. Говорят, что нестандартное число $r \in {}^*\mathbb{R}$ *конечное*, если $|r| < n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Если $r \in {}^*\mathbb{R}$ конечное, то существует единственное действительное число, бесконечно близкое к r. Это число называется *стандартной частью* числа r и обозначается как ${}^\circ r$ (иногда $\mathrm{st}(r) = \mathrm{st}\, r$). Верно и обратное — если стандартная часть r существует, то r конечно.

Монады и топология

Предположим, что $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство, где $\mathcal{T}$ обозначает совокупность всех открытых множеств. Если $x \in X$, то *монада* элемента x — это множество

$$\mu(x) = \bigcap_{x \in T \in \mathcal{T}} {}^*T.$$

Пусть (X, d) метрическое пространство. Тогда для $x \in {}^*X$, *метрическая монада* x это — множество

$$\mu_m(x) = \{y \in {}^*X \,|\, {}^*d(x, y) \approx 0\}.$$

Теорема 1.3.3 *Предположим (X, d) — метрическое пространство и $x \in X$. Тогда монада x совпадает с метрической монадой x.*

Если $x, y \in {}^*X$ и y элемент (метрической) монады x, то пишут $x \approx y$ (читается как «y бесконечно близок к x»). Это определение согласуется с предыдущим обозначением, введённым для элементов ${}^*\mathbb{R}$. Обозначение $x \approx y$ используется и для произвольных топологических пространств, но только если $x \in X$; в таком случае $x \approx y \iff y \in \mu(x)$. Пример $\mathbb{R}$ показывает, что монады, вообще говоря, не являются внутренними множествами. Однако каждая монада содержит в себе некоторое внутреннее множество, подобное открытой окрестности точки. Более точно, истинна следующая

Теорема 1.3.4 *Для каждого $x \in X$ существует внутреннее множество $D \in {}^*\mathcal{T}$, такое, что $D \subseteq \mu(x)$.*

В остатке этого раздела будет представлен список нестандартных эквивалентностей разного рода топологических понятий.

Теорема 1.3.5 *Множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $\mu(x) \subset {}^*A$ для каждого $x \in A$.*

Теорема 1.3.6 *Множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ условие $\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$ влечёт $x \in A$.*

Теорема 1.3.7 *Множество $K \subset X$ компактно тогда и только тогда, когда для каждого $y \in {}^*K$ существует такой $x \in K$, что $y \in \mu(x)$.*

Для топологического пространства X точка $y \in {}^*X$ называется *околостандартной*, если $y \approx x$ для некоторого $x \in X$; иначе y называется *отдалённой* точкой.

Теорема 1.3.8 *Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждая точка $y \in {}^*X$ околостандартна.*

Теорема 1.3.9 *Пусть f отображение из топологического пространства X в топологическое пространство Y и предположим, что $x \in X$. Тогда f непрерывно в точке x тогда и только тогда, когда*

$$x' \approx x \implies {}^*f(x') \approx f(x).$$

Последнее условие может быть записано в эквивалентном виде:

$${}^*f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x)).$$

Глава 2

Экономическое равновесие с нестандартными ценами

2.1 Нестандартные цены в абстрактной экономике

Мы начнём с рассмотрения модели экономической системы, описанной в наиболее абстрактной форме. Характерной чертой представленной модели является допущение *внешних влияний*, что мотивирует изучение в её рамках эффективных механизмов стоимостного регулирования, использующих индивидуализированные стоимостные оценки, — так называемые *«индивидуальные цены»*. В рамках данной модели будут представлены два важных результата — двойственная характеристика оптимальных по Парето состояний экономики (аналог «второй теоремы благосостояния»), данная в терминах нестандартных индивидуальных цен, а также теорема о существовании аппроксимирующих равновесий. В последующем будет показано, что, надлежащим образом применённая в соответствующих конкретизациях абстрактной модели, эта аппроксимизирующая теорема приводит к целому спектру теорем существования экономических равновесий с нестандартными ценами. В частности это могут быть теоремы существования в традиционных «неоклассических» моделях, таких как экономика чистого обмена, экономика с производственным сектором типа Эрроу — Дебре, экономика с общественными благами, а также разного рода их обобщения. Представляется весьма важным то обстоятельство, что при наличии дополнительных модельных предположений, обеспечивающих выполнение «условия Слейтера» в задаче потребителя, соответствующее равновесие с нестандартными ценами превращается в «стандартное» равновесие. Таким образом, изложенные в данной главе результаты можно также рассматривать как некий универсальный метод анализа проблемы существования равновесия в замкнутой экономической модели.

2.1.1 Модель абстрактной экономики

Основополагающими элементами любой модели экономики являются *пространство состояний* L и выделяемое в его рамках *множество* $\mathbb{X} \subset L$ *допустимых состояний* экономики. В пособии мы будем всегда предполагать, что L является конечномерным евклидовым пространством и, таким образом, может быть отождествлено с $\mathbb{R}^m$ при некотором натуральном m. *Достижимыми* называются такие допустимые состояния x из $\mathbb{X}$, которые удовлетворяют дополнительному требованию $F(x) = F(\omega)$, где $F(.)$ — некоторый заданный линейный оператор, а ω — некоторый фиксированный элемент в $\mathbb{X}$, отождествляемый с «исходным» состоянием экономики. В приложениях абстрактной модели определяемые этим оператором соотношения $F(x) = F(\omega)$ выражают в наиболее общей форме свойство *сбалансированности* состояния x. Положим,

$$\mathcal{A}(\mathbb{X}) = \{x \in \mathbb{X} \mid F(x) = F(\omega)\} \text{ –}$$

множество всех достижимых состояний экономики.

Субъектами модели являются *экономические агенты*, представленные в её конкретизациях как *потребители* и *производители*; однако на первоначальном этапе мы не делаем такого рода разграничений. Множество $\mathcal{N}$ всех представленных в модели агентов предполагается конечным и для простоты полагается $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$. Агенты способны сравнивать между собой различные состояния экономики, выделяя из их числа те, которые им нравятся больше по сравнению с любым заданным «текущем» состоянием. Другими словами, первоначально можно считать, что для всякого $i \in \mathcal{N}$ на множестве допустимых состояний $\mathbb{X}$ определено точечно-множественное отображение $\mathcal{P}_i : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$, где $\mathcal{P}_i(x)$ интерпретируется как множество всех состояний экономики, строго предпочитаемых агентом i состоянию x, а само отображение $\mathcal{P}_i(.)$ называется отношением (строгого) предпочтения[1]. В тексте будет так-

[1]Если в модели допускаются предпочтения агентов, для которых принципиально наличие столь обширных областей определения и значения, то принято говорить о наличии *внешних влияний*.

же использоваться общепринятое обозначение $\succ_i$, определяющее предпочтение агента i в виде бинарного отношения на $\mathbb{X}$, где для любых $x, y \in \mathbb{X}$ имеем

$$y \succ_i x \iff y \in \mathcal{P}_i(x).$$

Множество *допустимых индивидуальных цен* $\mathcal{Q}$, где $\mathcal{Q} \subset (L')^{\mathcal{N}} = L^n$ и $q = (q_1, \ldots, q_n)$ для $q \in \mathcal{Q}$, является частью определённого в модели формального *механизма стоимостного регулирования*, который включает в себя также заданные для каждого $i \in \mathcal{N}$ *функции распределения дохода* — $\alpha_i : \mathbb{X} \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$.

В краткой форме модель абстрактной экономики может быть записана в следующем виде:

$$\mathcal{E} = \langle\ \mathcal{N},\ \mathbb{X},\ \mathcal{Q},\ F(.),\ \omega,\ \{\mathcal{P}_i(.)\}_{i \in \mathcal{N}}\ \rangle.$$

Одним из наиболее естественных требований, предъявляемых в любой экономической системе к механизму стоимостного регулирования, является требование его эффективности, которое в рассматриваемом нами классе моделей понимается как *оптимальность по Парето* отвечающих ему состояний равновесия. Данный вопрос находится в тесной связи с тем, какого типа цены допустимы в данном механизме, насколько гибкими они являются и т. д. Следующий пункт раздела посвящен анализу данной проблемы.

2.1.2 Нестандартная характеристика оптимальности по Парето

Прежде всего дадим необходимые определения.

Определение 2.1.1 *Говорят, что допустимое состояние экономики $x \in \mathbb{X}$ оптимально (слабо) по Парето, если оно достижимо, т. е. $F(x) = F(\omega)$ и при этом выполняется*

$$\bigcap_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{P}_i(x) \bigcap \mathcal{A}(\mathbb{X}) = \emptyset.$$

В существующей литературе множество состояний экономики, удовлетворяющих определению 2.1.1, принято называть *слабой границей Парето*.

Полную характеризацию (слабо) оптимальных по Парето состояний, представленную в терминах индивидуальных нестандартных цен, даёт следующая

Теорема 2.1.1 *Пусть $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$, множества $\mathcal{P}_i(x)$ & $\mathcal{P}_i(x) \cup \{x\}$ выпуклы и $x \notin \mathcal{P}_i(x)$ для всех $i \in \mathcal{N}$. Состояние x оптимально по Парето тогда и только тогда, когда найдётся набор ненулевых нестандартных векторов $\pi_1, \dots, \pi_n$ из ${}^*L$, такой, что*

$$\langle \mathcal{P}_i(x), \pi_i \rangle > \langle x, \pi_i \rangle$$

для каждого $i \in \mathcal{N}$, удовлетворяющего $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$, и при этом

$$\ker F(.) \subset \ker \sum_{\mathcal{N}} \pi_i(.) \iff [\, y \in L,\ F(y) = F(\omega) \Rightarrow \sum_{\mathcal{N}} \pi_i(y) = \sum_{\mathcal{N}} \pi_i(\omega)\,]. \tag{2.1.1}$$

Комментируя содержание теоремы 2.1.1, прежде всего отметим возможность получения, как следствия, характеризации оптимальных по Парето состояний экономики в терминах стандартных линейных функционалов. Последнее возможно при дополнительных модельных предположениях.

Действительно, с целью перейти к стандартным векторам индивидуальных цен будем считать, что норма вектора $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ равна 1 (при необходимости всегда можно так его пронормировать). Так как сфера единичного радиуса компактна в L^n (ибо L конечномерно), то каждая точка её $*$-изображения околостандартна и, следовательно, существует стандартная часть вектора π. Полагая $\bar{\pi}_i = \mathrm{st}(\pi_i)$, получим набор стандартных векторов $\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_n$, *не все из которых равны нулю* (при данном переходе нельзя гарантировать, что каждый из них ненулевой даже если $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$ для всех $i \in \mathcal{N}$), таких, что $\ker \sum_{\mathcal{N}} \bar{\pi}_i(.) \supset \ker F(.)$, и при этом

$$\langle \mathcal{P}_i(x), \bar{\pi}_i \rangle \geq \langle x, \bar{\pi}_i \rangle$$

для каждого $i \in \mathcal{N}$, такого, что $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$. Далее, если дополнительно предположить, что $x \in \mathrm{int}\mathbb{X}$ (без ограничения общности можно считать $\mathrm{int}\mathbb{X} \neq \emptyset$) и $\mathcal{P}_i(x)$ относительно открыты в $\mathbb{X}$, то из предыдущего соотношения несложно заключить, что

$$\langle \mathcal{P}_i(x), \bar{\pi}_i \rangle > \langle x, \bar{\pi}_i \rangle$$

для $\bar{\pi}_i \neq 0$. Вышесказанное и составляет стандартную характеризацию оптимальных по Парето состояний экономики (используя дополнительные предположения, этот результат можно распространить и на случай $x \notin \mathrm{int}\mathbb{X}$, но здесь мы не будем этим заниматься).

Другой важный вывод, следующий из теоремы 2.1.1, состоит в том, что в общем случае, при наличии внешних влияний, эффективный механизм стоимостного регулирования должен основываться на понятии индивидуальной цены, допустимая совокупность таких цен должна удовлетворять условию (2.1.1). Без сомнения, использование индивидуальных цен в реальной экономической практике сталкивается с серьёзными затруднениями, тем большими, чем больше их «индивидуализация». Поэтому представляется важным определить те минимальные пределы, в которых индивидуализация цен действительно необходима, с тем чтобы сохранить свойство эффективности стоимостного механизма по мере уменьшения эффекта внешних влияний. Формально вопрос можно поставить так: как можно сузить пространство допустимых индивидуальных цен при уменьшении внешних влияний, чтобы выполнялась теорема 2.1.1? При исследовании данной проблемы прежде всего нужно уточнить математический смысл высказывания «уменьшение эффекта внешних влияний».

Будем говорить, что в абстрактной модели $\mathcal{E}$ в *состоянии* x имеется *ограниченный эффект* внешних влияний, если имеет место следующая ситуация. Пусть для некоторого конечного T пространство состояний представляется в виде $L = \prod_{t \in T} L_t$, а множество допустимых состояний — в виде $\mathbb{X} = \prod_{t \in T} \mathbb{X}_t$, где $\mathbb{X}_t \subset L_t$, для каждого $t \in T$. Пусть для каждого $i \in \mathcal{N}$, такого, что множество $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$, определено $T_i \subset T$, такое, что индивидуальные предпочтения можно представить в виде

$$\mathcal{P}_i(x) = \mathcal{P}_i^{T_i}(x) \times \prod_{t \in T \setminus T_i} \mathbb{X}_t, \;\; \mathcal{P}_i^{T_i}(x) \subset \mathbb{X}_i = \prod_{t \in T_i} \mathbb{X}_t \subset L_i = \prod_{t \in T_i} L_t. \quad (2.1.2)$$

Если для каждого $i \in \mathcal{N}$ представление (2.1.2) имеет место *при любом* $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X}) \cap \operatorname{dom}\mathcal{P}_i(.)$[2], причём выбор T_i не зависит от x, то мы будем говорить просто об *ограниченном эффекте внешних влияний.*

В терминах стандартных цен приемлемый ответ на поставленный выше вопрос, особенно важный в приложениях абстрактной модели, даёт следующая

Теорема 2.1.2 *Пусть* выполнены условия теоремы 2.1.1, *имеется* ограниченный эффект *внешних влияний в достижимом состоянии* x *и выполнено (2.1.2). Пусть в случае* $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$ *для всех* $i \in \mathcal{N}$ *дополнительно выполнено*

$$\bigcup_{i \in \mathcal{N}} T_i = T.^{3} \quad (2.1.3)$$

[2]Здесь стандартным образом полагается $\operatorname{dom} \mathcal{P}_i(.) = \{y \in \mathbb{X} \mid \mathcal{P}_i(y) \neq \emptyset\}$.

[3]При $\mathcal{P}_i(x) = \emptyset$ для некоторого i условие (2.1.3) не накладывается.

Тогда существует набор стандартных векторов $\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_n$*, не все из которых равны нулю, таких, что* $\bar{\pi}_i^t = 0$ *для всех* $t \in T \setminus T_i$*, где* $\bar{\pi}_i = (\bar{\pi}_i^t)_{t \in T}$, $\bar{\pi}_i^t \in L_t'$*, причём* $\ker \sum_{\mathcal{N}} \bar{\pi}_i(.) \supset \ker F(.)$*, и при этом*

$$\langle \mathcal{P}_i(x), \bar{\pi}_i \rangle \geq \langle x, \bar{\pi}_i \rangle$$

для каждого $i \in \mathcal{N}$*, такого, что* $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$*.*

Условие (2.1.2) означает, что область значений предпочтения i можно без ущерба ограничить пространством L_i, что соответственно уменьшает эффект внешних влияний. Требование (2.1.3) указывает на пределы, в рамках которых возможно эффективное сужение областей изменения индивидуальных цен — в таком случае компоненты индивидуальных цен, отвечающие «неинтересным» для i фрагментам состояния экономики, обращаются в ноль. Полученный в теореме 2.1.2 результат можно уточнить, если воспользоваться вышеуказанным замечанием (см. комментарий к теореме 2.1.1) относительно перехода от нестандартной характеризации к стандартной.

Полноценный нестандартный аналог теоремы 2.1.2, дающий необходимые и достаточные условия оптимальности по Парето состояний абстрактной модели в терминах нестандартных цен, является более тонким результатом, требующим уточнения собственно понятия оптимальности.

Определение 2.1.2 *Говорят, что допустимое состояние* $x \in \mathbb{X}$ *сильно оптимально по Парето, если оно достижимо, т. е.* $F(x) = F(\omega)$*, и для каждой непустой коалиции* $S \subset \mathcal{N}$ *не существует* $z \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ *такого, что*

$$z \in \mathcal{P}_i(x) \quad \forall\, i \in S \tag{2.1.4}$$

и при этом

$$x \notin \mathcal{P}_i(z) \quad \forall\, i \notin S. \tag{2.1.5}$$

Содержательно данное определение означает, что нет такой коалиции, которая была бы способна предложить своим членам строго предпочитаемое каждым из них достижимое состояние экономики при условии нейтральности дополняющей коалиции — изменение текущего состояния экономики возможно, только если в дополняющей коалиции нет активно несогласных членов. Заметьте, что данное понятие доминирования является более слабым по сравнению с доминированием, отвечающим понятию слабой границы Парето — соответственно, сильная граница является подмножеством слабой.

Отметим, что если отношение $\succ_i$ *иррефлексивно* и *транзитивно*, то условия (2.1.4), (2.1.5), определяющие сильную границу Парето, будут эквивалентны требованию

$$\exists i \in \mathcal{N} : z \succ_i x \quad \& \quad x \not\succ_i z \ \ \forall i \in \mathcal{N}.$$

В свою очередь, любое *строгое* бинарное отношение $\succ$ будет иррефлексивно и транзитивно, если оно определено как *строгая компонента* некоторого *нестрогого* отношения $\succeq$, которое *рефлексивно и транзитивно*. Чтобы убедиться в этом, напомним, что по определению строгой компоненты

$$z \succ y \iff z \succeq y \ \ \& \ \ y \not\succeq z.$$

Теперь, если $z \succ y$ & $y \succ x$, то из транзитивности $\succeq$ заключаем $z \succeq x$. Однако если $x \succeq z$, то из $y \succ x \succeq z$ и транзитивности получаем $y \succeq z$, что противоречит условию $z \succ y$ и определению строгой компоненты. Следовательно $x \not\succeq z$ и по определению $z \succ x$.

Таким образом, определение 2.1.2, будучи применённым к классическим нестрогим (и *полным*) предпочтениям экономических агентов, в точности совпадает с традиционным определением сильной границы Парето.

С целью установить точную теорему при ограниченном эффекте внешних влияний, рассмотрим следующую модификацию понятия оптимальности по Парето.

Определение 2.1.3 *Допустимое состояние экономики* $x \in \mathbb{X}$ строго оптимально по Парето*, при ограниченном эффекте внешних влияний, если оно достижимо, т. е.* $F(x) = F(\omega)$ *и для каждой (непустой) коалиции* $S \subset \mathcal{N}$ *не существует* $z \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ *такого, что*

$$z \in \mathcal{P}_i(x) \ \ \forall i \in S \ \ \& \ \ z_i = x_i \ \ \forall i \notin S,$$

где z_i, x_i *— проекции векторов* z, x *на* $L_i = \prod_{t \in T_i} L_t$ *и при этом, если* $\mathcal{P}_i(x) = \emptyset$*, то* $T_i = T \setminus (\bigcup_{j \in \mathcal{N}^*} T_j)$*, где* $\mathcal{N}^* = \{j \in \mathcal{N} \mid \mathcal{P}_j(x) \neq \emptyset\}$.

Легко видеть, что данное понятие занимает промежуточное положение между слабой и сильной оптимальностью по Парето, и, главное, всякое сильно оптимальное состояние является строго оптимальным, если предпочтения *иррефлексивны* и имеет место *ограниченный эффект внешних влияний*. Убедиться в этом можно, рассуждая от противного: если x сильно оптимален и не является строго оптимальным, то найдется z и непустая доминирующая коалиция S, такая, что для агентов, не попавших в эту коалицию, выполняется $z_i = x_i$ (см. опред. выше). Но тогда, если $x \succ_i z$ для некоторого $i \notin S$, то, в силу ограниченного эффекта внешних влияний (2.1.2), получаем $z \succ_i z$, что невозможно. Следовательно $x \not\succ_i z$ для всех $i \notin S$ и по определению S (слабо) доминирует x по z — противоречие.

Теорема 2.1.3 *Пусть* выполнены условия теоремы 2.1.1, *имеется* ограниченный эффект *внешних влияний в достижимом состоянии x и выполнены (2.1.2) и (2.1.3). Тогда состояние $x \in \mathbb{X}$ строго оптимально по Парето тогда и только тогда, когда найдётся набор нестандартных векторов $\pi_1, \dots, \pi_n$ из ${}^*L$, такой, что $\pi_i^t = 0$ для всех $t \in T \setminus T_i$, где $\pi_i = (\pi_i^t)_{t \in T}$, $\pi_i^t \in {}^*L_t'$, выполняются (2.1.1) и*

$$\langle \mathcal{P}_i(x), \pi_i \rangle > \langle x, \pi_i \rangle$$

для каждого $i \in \mathcal{N}$, удовлетворяющего $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$.

Доказательство теорем 2.1.2, 2.1.3 идёт параллельно доказательству теоремы 2.1.1 и приводится в конце данного пункта (непосредственно после доказательства теоремы 2.1.1). Доказательство теоремы 2.1.1 основано на применении нестандартного обобщения известной теоремы Дубовицкого–Милютина, которое имеет также и самостоятельный интерес.

Теорема 2.1.4 *Пусть $\{B_j\}_{j=1}^{j=k}$ — некоторая совокупность выпуклых подмножеств пространства L, такая, что для некоторого $x \in L$ и любого j множество $B_j \cup \{x\}$ выпукло. Тогда, если*

$$\bigcap_{j=1}^{k} (B_j \cup \{x\}) = \{x\},$$

то существуют нестандартные линейные функционалы $f_j \in {}^*L'$, $j = 1, 2, \dots, k$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{k} f_j = 0, \tag{2.1.6}$$

и такие, что $f_j(B_j) \geq f_j(x)$, причем выполняется

$$F_{B_j}(x) = \{y \in B_j \mid f_j(y) = f_j(x)\}, \tag{2.1.7}$$

где $F_{B_j}(x)$ *обозначает грань*[4] *минимальной размерности (возможно пустую) множества* B_j*, которой принадлежит элемент* x*.*

Замечание 2.1.1 Прежде всего, отметим тот факт, что если $x \notin \mathrm{ri}B_j$,[5] то $F_{B_j}(x) \cap \mathrm{ri}B_j = \emptyset$, и в силу (2.1.7) разделяющий функционал f_j *ненулевой*. Соответственно, если $x \notin \mathrm{ri}B_j$ для всех j, то *все разделяющие функционалы ненулевые*, что демонстрирует отличие данной теоремы от стандартной версии теоремы Дубовицкого–Милютина. Теорема 2.1.4 является достаточно глубоким результатом. В определённом смысле она показывает, что стандартные выпуклые множества обладают свойствами выпуклых многогранников в классе всех нестандартных множеств. В частности, из этой теоремы следует, что любые два выпуклых стандартных множества, имеющие пустое пересечение, можно *строго разделить* нестандартной гиперплоскостью (см. теорему 1.2.5). Действительно, для выпуклых $X, Y \subset L$, если $X \cap Y = \emptyset$, то достаточно применить теорему 2.1.4 к совокупности из двух множеств, имеющих вид $\{0\}$ и $\{\lambda(x-y) \mid x \in X,\ y \in Y,\ 1 \geq \lambda > 0\}$, рассмотренных относительно вектора 0 (т. е. нужно принять $x = 0$ в формулировке теоремы 2.1.4). Искомым разделяющим нестандартным функционалом здесь является $f = f_1 = -f_2$. □

В основе доказательства данной теоремы лежит следующий стандартный факт о разделимости выпуклых многогранников.

Утверждение 2.1.1 *Пусть* $\{A_j\}_{j=1}^{j=k}$ *— совокупность выпуклых многогранников*[6] *в пространстве* L*, удовлетворяющая условию*

$$\bigcap_{j=1}^{k} A_j = \{x\},$$

[4]Подмножество C *замкнутого* выпуклого множества $B \subset L$ называется гранью B, если и только если для любых $a, b \in B$ условие $(a,b) \cap C \neq \emptyset$ влечет $[a,b] \subset C$. Здесь

$$[a,b] = \{y \in L \mid y = \lambda a + (1-\lambda)b,\ 0 \leq \lambda \leq 1\},$$
$$(a,b) = \{y \in L \mid y = \lambda a + (1-\lambda)b,\ 0 < \lambda < 1\}.$$

Под гранью произвольного выпуклого множества мы понимаем подмножество, которое можно представить как пересечение грани замыкания с основным множеством. О граневой структуре выпуклых множеств подробнее см. *Брёнстед* (1988).

[5]Для выпуклых множеств $\mathrm{ri}B$ означает *относительную внутренность* множества B — это внутренность, определённая в минимальном афинном подпространстве, содержащем B.

[6]Под термином «выпуклый многогранник» мы понимаем множество, представимое как выпуклая оболочка конечного числа точек. Множества, представимые как пересечение конечного числа замкнутых полупространств, называются «полиэдральными».

и пусть $x \in \mathrm{ri}F_{A_j}$ для всех $j = 1, \ldots, k$, где F_{A_j} — грань A_j[7]*. Тогда найдется совокупность линейных стандартных функционалов $\{f_j\}_{j=1}^{j=k}$, не все из которых равны нулю если $x \notin \mathrm{ri}A_j$ для некоторого $j = 1, \ldots, k$ и таких, что $f_j(A_j) \geq f_j(x)$ и $F_{A_j} = \{y \in A_j \mid f_j(y) = f_j(x)\}$ для всех $j = 1, \ldots, k$, и*

$$\sum_{j=1}^{k} f_j = 0.$$

При доказательстве последнего утверждения будет использоваться следующая вспомогательная

Лемма 2.1.1 *Пусть $C \subset L$ — выпуклый многогранник, F_C — собственная грань в C и $H \subset L$ — аффинное подпространство, удовлетворяющее $H \cap C \subset F_C$ и $H \cap \mathrm{ri}F_C \neq \emptyset$. Тогда H можно продолжить до опорной к C гиперплоскости D, такой, что $D \cap C = F_C$.*

Доказательство леммы 2.1.1. В целом доказательство леммы следует схеме доказательства теоремы 7.5 из *Брёнстед* (1988), утверждающей, что каждая грань многогранника является выступающей[8].

Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{dim}C = \mathrm{dim}L$. Далее ведем индукцию по размерности пространства L. При $\mathrm{dim}L = 1, 2$ утверждение леммы очевидно, что обеспечивает базу индукции. Предполагая истинность леммы при $\mathrm{dim}L < m$, докажем её для $\mathrm{dim}L = m$.

По условию леммы $H \cap C \subset F_C$ и, так как F_C — собственная грань C (значит, $F_C \cap \mathrm{int}C = \emptyset$), заключаем $H \cap \mathrm{int}C = \emptyset$. В силу классической теоремы отделимости найдется такая гиперплоскость $E \supset H$, что $E \cap \mathrm{int}C = \emptyset$. Покажем, что $F_C \subset E$. Действительно, пусть $x \in \mathrm{ri}F_C \cap H$. Теперь, если $y \in F_C \setminus E$, то из $x \in \mathrm{ri}F_C$ найдем такой $\varepsilon > 0$, что $z = x + \varepsilon(x - y) \in F_C$, откуда по выбору y получаем $z \notin E$, причём y и z лежат в разных полупространствах, ограничиваемых гиперплоскостью E. По условию найдется $c \in \mathrm{int}C$, возьмём любой. Теперь, в силу свойства выпуклых множеств, имеем $(y, c) \subset \mathrm{int}C$ и $(z, c) \subset \mathrm{int}C$. Однако, так как y и z лежат в разных открытых полупространствах, ограничиваемых гиперплоскостью E, получаем либо $(y, c) \cap E \neq \emptyset$, либо $(z, c) \cap E \neq \emptyset$, что влечет $E \cap \mathrm{int}C \neq \emptyset$ — противоречие с выбором E. В итоге заключаем, что $F_C \subset E$.

[7] Это означает, что F_{A_j} — грань минимальной размерности, содержащая точку x.

[8] Грань F выпуклого множества $B \subset L$ называется *выступающей*, если либо F совпадает с $\emptyset$ или B, либо $F = B \cap D$, где D — опорная гиперплоскость к B.

Далее, если $E \cap C = F_C$, то гиперплоскость E искомая. В противном случае F_C является собственной гранью многогранника $C \cap E$, и, в силу индуктивного предположения, аффинное подпространство H может быть продолжено до гиперплоскости H' в E так, чтобы было выполнено утверждение леммы: $F_C = H' \cap C$ и H' — опорная гиперплоскость к $C \cap E$ в E. Заметим, что $\dim H' = m - 2 \geq 1$. Пусть T — двумерное подпространство в L, ортогональное к H', и $\mathrm{pr}(.)$ обозначает *ортогональную проекцию* L на T. Тогда $\mathrm{pr}(H')$ — одноточечное множество, а $\mathrm{pr}(C)$ — двумерный многогранник в T. Далее покажем, что $\mathrm{pr}(H')$ — вершина $\mathrm{pr}(C)$. Действительно, если бы это было не так, то в C нашлись бы такие точки y и z, что $\mathrm{pr}(y) \neq \mathrm{pr}(z)$ и при этом

$$\mathrm{pr}(H') = (1-\lambda)\,\mathrm{pr}(y) + \lambda\,\mathrm{pr}(z)$$

для некоторого $0 < \lambda < 1$. Полагая $v = (1-\lambda)y + \lambda z$, находим, что $v \in C$ и $\mathrm{pr}(v) = \mathrm{pr}(H')$. Однако последнее влечет $v \in H'$, ибо по построению имеем $\mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{pr}(H')) = H'$. Следовательно v принадлежит F_C (так как $F_C = H' \cap C$). Но тогда из определения грани мы заключаем, что $y, z \in F_C$. В то же время, поскольку $F_C \subset H'$, то для всех $u \in F_C$ должно выполняться $\mathrm{pr}(u) = \mathrm{pr}(H')$, откуда, в частности, следует $\mathrm{pr}(y) = \mathrm{pr}(z)$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathrm{pr}(H')$ является вершиной в $\mathrm{pr}(C)$. Далее, в силу истинности леммы в двумерном варианте, в T найдется такая прямая Q, что

$$Q \bigcap \mathrm{pr}(C) = \mathrm{pr}(H').$$

Но теперь достаточно положить $D = \mathrm{aff}(H' \cup Q) = \mathrm{pr}^{-1}(Q)$ и убедиться в том, что D является опорной гиперплоскостью к C в L, удовлетворяющей (по построению) условиям $D \supset H$ и $D \cap C = F_C$. □

Доказательство утверждения 2.1.1. Применим лемму 2.1.1 к многограннику $C = \prod_{j=1}^{j=k} A_j$, точке $(x, \ldots, x)$ и подпространству

$$H = \{(y, \ldots, y) \mid y \in L\},$$

определенным в пространстве L^k. Поскольку $F = \prod_{j=1}^{k} F_{A_j}(x)$ является гранью C, содержащей $(x, \ldots, x)$ в своей относительной внутренности, мы заключаем существование опорной к C гиперплоскости[9] $E \supset H$,

[9]По условию леммы 2.1.1 необходимо, чтобы грань F была собственной. Однако, если эта грань несобственная, т. е. $F = C = \prod_{j=1}^{k} A_j$, то $x \in \mathrm{ri}A_j$ и $f_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$ удовлетворяют всем требованиям утверждения 2.1.1.

удовлетворяющей условию

$$E \bigcap C = \prod_{j=1}^{k} F_{A_j}(x).$$

Так как $0 \in H \subset E$, то найдется (ненулевой, если F собственная) линейный функционал f такой, что $\{y \in L^k \mid f(y) = 0\} = E$. Записывая функционал f в виде $f = (f_1, \dots, f_k)$, где f_j — функционалы над L, в силу $f(H) = 0$ находим $\sum_{j=1}^{j=k} f_j(z) = 0$ для всех $z \in L$, что доказывает вторую часть утверждения. Ввиду опорности E к C, мы можем предполагать, что $f(C) \geq f(F) = 0$ (в противном случае возьмем $-f$ вместо f). Отсюда, применяя f к элементу из C, имеющему вид $(z_1, \dots, z_k)$, где $z_i = x$ для $i \neq j$ и $z_j \in A_j$, находим

$$f_j(z_j) + \sum_{i \neq j} f_i(x) \geq f_j(x) + \sum_{i \neq j} f_i(x) \implies f_j(z_j) \geq f_j(x) \quad \forall\, z_j \in A_j.$$

Осталось заметить, что в последнем неравенстве равенство возможно только тогда, когда $z_j \in F_{A_j}(x)$. □

Доказательство теоремы 2.1.4. Прежде всего, отметим, что достаточно рассмотреть случай, в котором $B_j \neq \emptyset$ для всех $j = 1, \dots, k$. Действительно, для j таких, что $B_j = \emptyset$, можно взять новые множества, полагая $B_j := \{x\}$. Ясно, что набор нестандартных функционалов, отвечающий новому набору выпуклых множеств, будет удовлетворять требованиям теоремы в отношении старого набора.

Доказательство теоремы основывается на применении *теоремы направленности* из теории нестандартного анализа, (см. § 1.2.2 теорема 1.2.4). С этой целью определим *направленное отношение* $\mathcal{U}$ следующим образом. Пусть $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ есть любая совокупность *конечных* (возможно пустых) подмножеств $C_j \subset B_j$, удовлетворяющая следующему условию: если $x \in B_j$, то $x \in \operatorname{co} C_j$ и размерность минимальной грани в $\operatorname{co} C_j$, которой принадлежит x, совпадает с размерностью минимальной грани из B_j при $F_{B_j}(x) \neq \emptyset$ (это грани, для которых x лежит в их относительной внутренности, см. теорему 5.6 в *Брёнстед* (1988)). Далее, определим $A_j = \operatorname{co}(C_j \cup \{x\})$ для всех $j = 1, \dots, k$ и отметим, что этот набор выпуклых многогранников удовлетворяет всем условиям утверждения 2.1.1. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{C}) = \{f_1, \dots, f_k\}$ — набор линейных функционалов, отвечающих данному набору $\{A_j\}$ многогранников и удовлетворяющий требованиям утверждения 2.1.1. Теперь определим отношение $\mathcal{U}$ как совокупность всех пар $(\mathcal{C}, \mathcal{F}(\mathcal{C}))$ указанного вида, т. е. положим

$$\mathcal{U} = \{(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \mid \mathcal{C} = \{C_j\}_{j=1}^{j=k}, \quad |C_j| < \infty, \quad C_j \subset B_j, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{C})\}.$$

Свойство *направленности* отношения $\mathcal{U}$ легко проверяется. Действительно, для конечного семейства $\{\mathcal{C}^t\}$ из $\mathrm{dom}\,\mathcal{U}$ достаточно положить $\widehat{C}_j = \cup_t C_j^t$, и, используя утверждение 2.1.1, найти набор функционалов $\widehat{\mathcal{F}}$, соответствующий набору многогранников $\{\widehat{A}_j\}$, где $\widehat{A}_j = \mathrm{co}(\widehat{C}_j \cup \{x\})$. Легко видеть, что $(\mathcal{C}^t, \widehat{\mathcal{F}}) \in \mathcal{U}$, что и требовалось доказать. Итак, $\mathcal{U}$ — направленное отношение, и в силу теоремы направленности найдётся такой набор ненулевых нестандартных функционалов ${}^*\mathcal{F} = \{f_j\}_{j=1}^{j=k}$, что $(\mathcal{C}, {}^*\mathcal{F}) \in {}^*\mathcal{U}$ при любом $\mathcal{C} \in \mathrm{dom}\,\mathcal{U}$. Чтобы закончить доказательство достаточно заметить, что по определению $\mathcal{U}$ набор ${}^*\mathcal{F}$ удовлетворяет всем свойствам утверждения 2.1.1 при любом $\mathcal{C} \in \mathrm{dom}\,\mathcal{U}$, и, так как к C_j можно добавить любую точку из B_j не выходя за пределы $\mathrm{dom}\,\mathcal{U}$, то

$$f_j(y) > f(x) = f(z) \quad \forall\, z \in F_{B_j}(x) \quad \& \quad \forall\, y \in B_j \setminus F_{B_j}(x),$$

что устанавливает (2.1.7). Свойство (2.1.6) выполнено по определению отношения $\mathcal{U}$ и в силу утверждения 2.1.1. □

Доказательство теоремы 2.1.1. Необходимость. Поскольку $\mathcal{P}_i(x) \subset \mathbb{X}$ для каждого i, то условие оптимальности по Парето состояния x может быть записано в эквивалентной форме:

$$\bigcap_{\mathcal{N}} \mathcal{P}_i(x) \bigcap \{y \in L \mid F(y) = F(\omega)\} = \emptyset,$$

причём выполнены условия теоремы 2.1.4 (по условиям теоремы 2.1.1). Следовательно, существует набор нестандартных функционалов $\{f_t\}_{t=0}^{t=n}$, удовлетворяющий соотношениям (2.1.6) и (2.1.7), где функционал с номером 0 соответствует множеству, определённому через балансовое соотношение. В силу (2.1.6) и (2.1.7), применённому к функционалу f_0, заключаем

$$\sum_{\mathcal{N}} f_i = -f_0 \quad \Longrightarrow \quad \ker \sum_{\mathcal{N}} f_i(.) \supset \ker F(.).$$

Далее заметим, что по условию теоремы 2.1.1 для каждого $i \in \mathcal{N}$ выполняется $F_{\mathcal{P}_i(x)}(x) = \emptyset$. Применяя (2.1.7) в отношении $f_1, \ldots, f_n$, находим

$$f_i(\mathcal{P}_i(x)) > f_i(x)$$

для каждого $i \in \mathcal{N}$, такого, что $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$. Чтобы закончить данную часть доказательства, осталось заменить все функционалы представляющими их векторами (в форме скалярного произведения), что возможно в силу конечномерности L.

Доказательство теоремы в части достаточности совершенно стандартно и приводится здесь только с целью полноты изложения. Действительно, пусть найдётся $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ и набор нестандартных векторов $\pi_1, \ldots, \pi_n$, удовлетворяющий условиям теоремы. Тогда, если

$$y \in \Big(\bigcap_{\mathcal{N}} \mathcal{P}_i(x)\Big) \bigcap \mathcal{A}(\mathbb{X}),$$

то $\pi_i(y) > \pi_i(x)$ для каждого i, откуда

$$\sum_{\mathcal{N}} \pi_i(y) > \sum_{\mathcal{N}} \pi_i(x).$$

В то же время в силу $x, y \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ и по свойству векторов $\{\pi_i\}$ должно быть

$$F(y) = F(x) = F(\omega) \implies \sum_{\mathcal{N}} \pi_i(y) = \sum_{\mathcal{N}} \pi_i(x),$$

что противоречит предыдущему соотношению. □

Доказательство теоремы 2.1.2. Рассмотрим модификацию исходной модели экономики, в которой в качестве нового множества допустимых состояний выбирается всё пространство L, а в качестве новых предпочтений в точке x — множества вида

$$\widehat{\mathcal{P}}_i(x) = \mathcal{P}_i^{T_i}(x) \times \prod_{t \in T \setminus T_i} L_t$$

(при $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$). Тогда, так как в силу (2.1.3) при ненасыщенных предпочтениях имеем $\bigcap_{\mathcal{N}} \widehat{\mathcal{P}}_i(x) = \bigcap_{\mathcal{N}} \mathcal{P}_i(x) \subset \mathbb{X}$, то из оптимальности по Парето x в исходной модели заключаем, что

$$\bigcap_{\mathcal{N}} \widehat{\mathcal{P}}_i(x) \bigcap \{y \in L \mid F(y) = F(\omega)\} = \emptyset.$$

Однако последнее означает оптимальность по Парето состояния x в новой модели (если $\mathcal{P}_i(x) = \emptyset$ для некоторого i, то последнее соотношение выполнено автоматически). Кроме того, заметим, что множества $\widehat{\mathcal{P}}_i(x) \cup \{x\}$ выпуклы — это следует из условий теорем 2.1.1 и 2.1.2, что эквивалентно выпуклости $\mathcal{P}_i^{T_i}(x) \cup \{x_i\}$, где x_i обозначает проекцию вектора x на $L_i = \prod_{T_i} L_t$. По условиям теоремы 2.1.1 также имеем $x_i \notin \mathcal{P}_i^{T_i}(x)$.

Далее применим теорему 2.1.1 к новой модели и найдём соответствующий набор нестандартных векторов $\pi_1, \ldots, \pi_n$. По условию $(\pi_1, \ldots, \pi_n) \neq 0$ можно считать, что евклидова норма вектора $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ в точности равна 1, откуда в силу компактности единичной сферы в L заключаем существование $\bar{\pi}_i = \mathrm{st}(\pi_i)$, $i \in \mathcal{N}$, не все из которых равны нулю. Для каждого из этих векторов мы имеем

$$\langle \bar{\pi}_i, \widehat{\mathcal{P}}_i(x) \rangle \geq \langle \bar{\pi}_i, x \rangle \implies \langle \bar{\pi}_i^t, y_t \rangle \geq 0 \ \ \forall\, y_t \in L_t,\ t \notin T_i.$$

Последнее возможно, только если $\bar{\pi}_i^t = 0$ для всех $t \in T \setminus T_i$, что совместно с предыдущим и заканчивает доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 2.1.3. Необходимость. В отличии от предыдущего доказательства рассмотрим несколько иные множества «предпочитаемых» состояний, полагая

$$\widehat{\mathcal{P}}_i(x) = (\mathcal{P}_i^{T_i}(x) \cup \{x_i\}) \times \prod_{t \in T \setminus T_i} L_t$$

для всех $i \in \mathcal{N}$ (здесь $\mathcal{P}_i^{T_i}(x) = \emptyset$ при $\mathcal{P}_i(x) = \emptyset$). Далее, используя свойство строгой оптимальности состояния x, покажем, что

$$\bigcap_{\mathcal{N}} \widehat{\mathcal{P}}_i(x) \bigcap \{y \in L \mid F(y) = F(\omega)\} = \{x\}. \tag{2.1.8}$$

Действительно, пусть z принадлежит множеству, расположенному в левой части последнего соотношения. Прежде всего отметим, что в силу (2.1.3) должно быть $z \in \mathbb{X}$, и, следовательно, $z \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$. Далее, если $z \neq x$, то определим непустую (в силу (2.1.3)) коалицию агентов, полагая $S = \{i \in \mathcal{N} \mid z_i \neq x_i\}$. Легко видеть, что S — коалиция, существование которой отрицается по свойству строгой оптимальности по Парето состояния x. Таким образом, (2.1.8) истинно, и можно применить теорему 2.1.4. Отметим, что грань минимальной размерности множества $\widehat{\mathcal{P}}_i(x)$, которой принадлежит элемент x, — это в точности множество $\{x_i\} \times \prod_{t \in T \setminus T_i} L_t$. Поэтому в силу теоремы 2.1.4 и аргументов, аналогичных изложенным выше при доказательстве теоремы 2.1.1, найдётся совокупность нестандартных функционалов, чьи представляющие вектора удовлетворяют всем требованиям теоремы 2.1.3. В части достаточности доказательство стандартно. $\square$

2.2 Теорема существования аппроксимирующих равновесий

Прежде всего в данном пункте вводятся понятия общего и аппроксимирующего равновесия в абстрактной модели экономики.

2.2.1 Равновесия, предположения и теоремы

Из результатов предыдущего пункта следует, что эффективный механизм стоимостного регулирования в случае общей модели с внешними влияниями должен основываться на понятии индивидуальной цены, допустимая совокупность которых должна удовлетворять условию (2.1.1), что является основным аргументом в пользу нижеследующего определения.

Введём множество *достижимых наборов индивидуальных цен*, полагая

$$\mathcal{A}(\mathcal{Q}) = \{q \in \mathcal{Q} \mid \ker \sum_{\mathcal{N}} q_i(.) \supset \ker F(.)\}.$$

Далее для каждого $i \in \mathcal{N}$ определим *бюджетное множество* агента i в состоянии $x \in \mathbb{X}$ при ценах $q \in \mathcal{Q}$, полагая

$$B_i(x,q) = \{y \in \mathbb{X} \mid \langle q_i, y\rangle \le \alpha_i(x,q)\}.$$

Множество $B_i(x,q)$ имеет обычный содержательный смысл и состоит из тех состояний экономики, которые способен «купить» агент i по индивидуальным ценам q_i в текущем состоянии x относительно допустимого набора индивидуальных цен q.

Определение 2.2.1 *Допустимое состояние $x \in \mathbb{X}$ экономики $\mathcal{E}$ называется абстрактным равновесием при ценах $q \in \mathcal{Q}$, если выполнены условия*

(i) $\quad x \in B_i(x,q) \ \ \forall\, i \in \mathcal{N}$;

(ii) $\quad \mathcal{P}_i(x) \cap B_i(x,q) = \emptyset \ \ \forall\, i \in \mathcal{N}$;

(iii) $\quad x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$;

(iv) $\quad q \in \mathcal{A}(\mathcal{Q})$.

Приведённое здесь условие (i) следует понимать как требование индивидуальной финансовой достижимости состояния x, тогда (ii) совместно с (i) можно интерпретировать как реализацию принципа максимизации полезности в рамках бюджетного ограничения, (именуемую иногда как индивидуальная рациональность, хотя это может входить в противоречие с терминологией теории игр). Требование (iii) означает реализуемость (достижимость) состояния x в экономике в целом, а (iv) — эффективность набора индивидуальных цен $q = (q_1, \ldots, q_n)$.

Далее, сформулируем некоторые минимальные требования, предъявляемые к модели экономики, с тем чтобы можно было надеяться на существование равновесий. Все эти требования носят общематематический характер, и прежде всего в их числе предположения, относящиеся собственно к множеству допустимых состояний экономики:

A1 (выпуклость и замкнутость) Множество *допустимых* состояний $\mathbb{X}$ *выпукло и замкнуто.*

A2 (ограниченность) Множество *достижимых* состояний $\mathcal{A}(\mathbb{X})$ *ограничено.*

В следующую группу входят предположения, связанные со свойствами предпочтений — их непрерывностью и выпуклой иррефлексивностью. В современной литературе используется два типа предположений о непрерывности предпочтений — сильная и слабая.

A3 (слабая непрерывность) Для каждого $i \in \mathcal{N}$ отображение $\mathcal{P}_i(.) : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ удовлетворяет условиям

(i) полунепрерывность сверху: для всех $x \in \mathbb{X}$ множество

$$\mathcal{P}_i(x) \text{ открыто } \text{ в } \mathbb{X};$$

(ii) полунепрерывность снизу: для всех $y \in \mathbb{X}$ множество

$$\mathcal{P}_i^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{X} \mid y \in \mathcal{P}_i(x)\} \text{ открыто } \text{ в } \mathbb{X}.$$

A3′ (сильная непрерывность) Для каждого $i \in \mathcal{N}$ отображение $\mathcal{P}_i(.) : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ имеет *открытый график* $Gr\mathcal{P}_i(.)$ в $\mathbb{X} \times X$, где

$$Gr\mathcal{P}_i(.) = \{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} \mid y \in \mathcal{P}_i(x)\}.$$

Замечание 2.2.1 Предположение $\mathbf{A3'}$ очевидно влечёт **A3** и в общем случае является более квалифицированным требованием к предпочтениям агентов. Однако заметим, что если бинарное отношение $\succ_i$ является *строгой компонентой* некоторого *транзитивного, полного и рефлексивного* отношения, то **A3** эквивалентно $\mathbf{A3'}$. Чтобы убедиться в этом возьмём произвольную пару $(x, y) \in Gr\mathcal{P}_i(.)$. Предположим, что $z \in \mathcal{P}_i(x) \cap \mathcal{P}_i^{-1}(y) \neq \emptyset$. Тогда из транзитивности

$$(x, y) \in \mathcal{P}_i^{-1}(z) \times \mathcal{P}_i(z) \subset Gr\mathcal{P}_i(.)$$

для некоторого $z \in \mathbb{X}$. Если $\mathcal{P}_i(x) \cap \mathcal{P}_i^{-1}(y) = \emptyset$, то из транзитивности и полноты несложно заключить, что

$$(x, y) \in \mathcal{P}_i^{-1}(y) \times \mathcal{P}_i(x) \subset Gr\mathcal{P}_i(.).$$

Таким образом, $Gr\mathcal{P}_i(.)$ есть окрестность каждой своей точки и, по определению, является открытым подмножеством в $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$.

Другая ситуация, в которой предположение **A3** оказывается эквивалентным $\mathbf{A3'}$, состоит в предположении о *полиэдральности* множества допустимых состояний экономики $\mathbb{X}$ в случае *выпуклых* значений у $\mathcal{P}_i(.)$. Полиэдральность выполняется «по определению» в ряде традиционных моделей экономики. Кроме того, как мы увидим в дальнейшем, в рамках предположения о полиэдральности $\mathbb{X}$ получаются наиболее интересные результаты в приложениях общей теории равновесия с нестандартными ценами.

Чтобы убедиться в истинности последнего высказывания, предположим **A3** и возьмём любую пару $(x, y) \in Gr\mathcal{P}_i$. Имеем $y \in \mathcal{P}_i(x)$, где в силу полиэдральности $\mathbb{X}$ и $\mathbf{A3}(i)$ найдётся многогранная окрестность $V \subset \mathbb{X}$ точки y в топологии L, индуцированной на $\mathbb{X}$, такая, что $V \subset \mathcal{P}_i(x)$. Другими словами, найдётся такое *конечное* $A \subset \mathbb{X}$, что $\mathrm{co}\, A$ — окрестность точки y в $\mathbb{X}$ и $\mathrm{co}\, A \subset \mathcal{P}_i(x)$. Теперь в силу $\mathbf{A3}(ii)$ множество $\bigcap\limits_{a \in A} \mathcal{P}_i^{-1}(a) = W$ является открытой окрестностью точки x в $\mathbb{X}$, и в силу предположения о выпуклозначности $\mathcal{P}_i(.)$ заключаем $\mathrm{co}\, A \subset \mathcal{P}_i(x')$ для всех $x' \in W$, т. е. $W \times \mathrm{co}(A) \subset Gr\mathcal{P}_i$ и $Gr\mathcal{P}_i$ является окрестностью каждой своей точки и, значит, является открытым множеством в $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$. □

A4 (выпуклость и иррефлексивность) Для каждого $i \in \mathcal{N}$ и для всех $x \in \mathbb{X}$ выполняется

$$x \notin \mathrm{co}\, \mathcal{P}_i(x).$$

Отметим, что $\operatorname{co}\mathcal{P}_i(.)$ удовлетворяет **A3**, если оно выполнено для $\mathcal{P}_i(.)$. Поэтому, комбинируя **A3** и **A4** в предположении о полиэдральности $\mathbb{X}$, заключаем эквивалентность **A3** и **A3′**.

В другую группу предположений входят требования, предъявляемые к механизму стоимостного регулирования. Первое из этих требований имеет обычный математический смысл.

A5 (непрерывность доходов) Для каждого $i \in \mathcal{N}$ функция $\alpha_i(.) : \mathbb{X} \times Q \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

Для существования любого экономически значимого понятия равновесия необходимы предположения, обеспечивающие выполнение финансового баланса в итоговом решении. В теории существования вальрасовского равновесия такую роль играет *закон Вальраса*. В абстрактной модели экономики этот закон имеет не совсем привычную форму, что обусловленно большой общностью модели. Именно, чтобы сформулировать этот закон в форме, приложимой к случаю ограниченных внешних влияний, нам потребуется определить некоторое правило, в соответствии с которым всякому заданному набору $x_1, \dots, x_n$ состояний экономики сопоставляется состояние, состоящее из «компонент» этих состояний. Другими словами, необходимо определить отображение $g(.)$ *проектирования* из $L^{\mathcal{N}}$ в L, надлежащим образом согласованное с понятием ограниченных внешних влияний.

Пусть в модели $\mathcal{E}$ множество допустимых состояний $\mathbb{X}$ представляется в виде $\mathbb{X} = \prod\limits_T \mathbb{X}_t$ при некотором конечном T и имеет место ограниченный эффект внешних влияний (см. (2.1.2)). Отображение проектирования $g : L^{\mathcal{N}} \to L$ назовём *согласованным* со структурой внешних влияний, если для каждого $t \in T$ определён такой $i \in \mathcal{N}$, что

$$(g(x_1, \dots, x_n))_t = (x_i)_t, \quad t \in T_i.$$

В дальнейшем, для краткости, такого рода проектирование назовём просто *согласованным*. Отметим, что при $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{X}^N$ выполняется $g(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{X}$. Ещё раз подчеркнём, что единственное требование, предъявляемое к согласованному проектированию $g(.)$, состоит в том, что его компонента t определяется как компонента t у состояния, отвечающего некоторому агенту i, где t входит в область эффективного изменения его предпочтений, т. е. должно быть $t \in T_i$. Таким образом, согласованные проектирования существуют, только если выполнено $\bigcup\limits_{\mathcal{N}} T_i = T$.

A6 (закон Вальраса) Существует такое согласованное проектирование $g : \mathbb{X}^{\mathcal{N}} \to \mathbb{X}$, что для любого заданного набора $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{X}$ и любого набора достижимых индивидуальных цен $q \in \mathcal{A}(\mathcal{Q})$, если

$$\mathcal{P}_i(x_i) \bigcap B_i(g(x_1, \ldots, x_n), q) = \emptyset \quad \forall\, i \in \mathcal{N},$$

то

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha_i(g(x_1, \ldots, x_n), q) = \langle \sum_{i \in \mathcal{N}} q_i, \omega \rangle.$$

Ясно, что закон Вальраса в данной формулировке является ослаблением общепринятого в моделях типа Эрроу — Дебре, где нет ограничений на выбор текущего состояния экономики. Несмотря на его внешнюю искусственность с экономической точки зрения (и трудность проверки), эта формулировка является приемлемой для абстрактной модели и в чём-то даже ближе к классическим установкам. Действительно, здесь требуется, чтобы финансовый баланс выполнялся только в точках, которые представлены через оптимальные решения в задачах «выбора состояния» у агентов экономики. В свою очередь, в классическом понимании требуется, чтобы скалярное произведение вектора цен на текущий избыточный спрос обращалось в ноль (т. е. требуется нулевая стоимость избыточного спроса). Таким образом, «странность» изложенной формы закона Вальраса сводится только к тому, что он применяется по отношению не к заданному состоянию экономики, но к набору этих состояний (для перехода используется отображение $g(.)$). Как это будет видно в дальнейшем, предложенный вариант закона Вальраса удобен в приложениях абстрактной модели (см. § 3.2), учитывающих наличие производственного сектора.

A7 (непустота бюджетных множеств) Существует ограниченное множество $M \subset L$ такое, что для каждого $i \in \mathcal{N}$ и любых $(x, q) \in \mathbb{X} \times Q$ выполняется

$$B_i(x, q) \cap M \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, y \in \mathbb{X} \cap M \; : \; \langle q_i, y \rangle \leq \alpha_i(x, q).$$

Данное предположение аккумулирует основной смысл нашего подхода. Должно быть ясно (и это показывают примеры), что предположение **A7** является слишком слабым, чтобы гарантировать существование равновесий в смысле определения 2.2.1, даже если выполняются все прочие предположения **A1**–**A6**. Более того, как показывает нижеследующий пример (см., напр., *Danilov, Sotskov* (1990)), его будет также недостаточно и в случае обычной модели обмена без внешних влияний, даже если предпочтения агентов локально ненасыщаемые, а цены сколь угодно гибкие, — это хорошо известный в теории равновесия факт.

Пример 2.2.1 Пусть $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, а пространство состояний $L = L_1 \times L_2$, где $L_1 = L_2 = \mathbb{R}^2$ — *пространство продуктов*. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$, а предпочтения определены на $L_i^+ = \mathbb{R}^2_+$ (нет внешних влияний) посредством функций полезности: $u_1(x_1) = x_1^1$ и $u_2(x_2) = x_2^2$, где верхний индекс указывает на номер продукта в потребительском плане x_i. В экономике функционируют рыночные цены $p \in \mathbb{R}^2$, а доходы агентов определены с помощью векторов «исходных ресурсов» $\omega_i \in \mathbb{R}^2_+$, где $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{X}$ и $\omega_1 = (1, 0)$, $\omega_2 = (1, 1)$, а $\alpha_i = \langle \omega_i, p \rangle$, $i = 1, 2$. Равновесием здесь является вектор $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4_+$, такой что $x_1 + x_2 = \omega_1 + \omega_2$ (из условия достижимости (iii) определения 2.2.1), и при этом для некоторого $p \in \mathbb{R}^2$ имеет место

$$u_i(x) = \max\{u_i(y) \mid y \in \mathbb{R}^2_+ : py \le p\omega_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Ситуацию иллюстрирует рис. 2.2.1, где в пространстве *продуктов* $\mathbb{R}^2$ изображены исходные запасы, кривые безразличия функций полезности и возможные бюджетные множества экономических агентов.

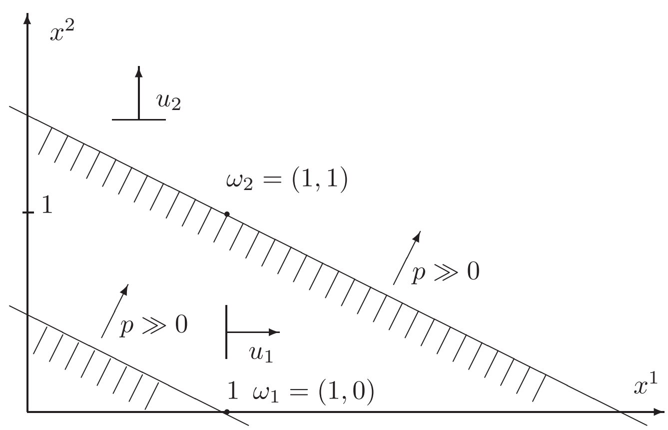

Рис. 2.2.1

Покажем, что в этой модели рынка нет равновесия. Предполагая противное, из условия монотонности предпочтений находим $p \geq 0$, $p \neq 0$. Но $p = (\lambda, 0)$ или $p = (0, \lambda)$, $\lambda > 0$ невозможно, ибо тогда спрос одного из потребителей бесконечен. Следовательно $p \gg 0$, что также невозможно, поскольку спрос на второй продукт строго больше 1. Противоречие. $\square$

Следующий пример однопродуктовой экономики представляет модель с внешними влияниями.

Пример 2.2.2 Пусть $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, пространство состояний $L = \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{R}$ — пространство продуктов. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2_+$, а предпочтения определены на $\mathbb{R}^2_+$ посредством функций полезности: $u_1(x) = x_1 \cdot x_2$ и $u_2(x) = x_2$. В экономике функционируют индивидуальные цены $q_i \in \mathbb{R}^2$, а доходы агентов определены с помощью 2-мерного вектора «исходных ресурсов» $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{X}$, где $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$, а $\alpha_i(q) = \langle \omega, q_i \rangle$, $i = 1, 2$.

На рис. 2.2.2 изображён образ $U(\mathcal{A}(\mathbb{X}))$ множества всех достижимых состояний в *критериальном* пространстве переменных (u_1, u_2).

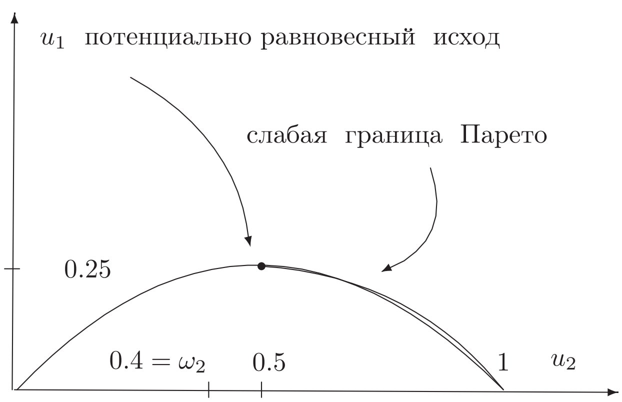

Рис. 2.2.2

Равновесием здесь является вектор $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$, такой что $x_1 + x_2 = \omega_1 + \omega_2 = 1$ и при этом для некоторых $q_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, удовлетворяющих условию $q^1_1 + q^1_2 = q^2_1 + q^2_2$ (в силу (iv) из определения 2.2.1, где $F(y_1, y_2) = y_1 + y_2$), имеет место

$$u_i(x) = \max\{u_i(y) \mid y \in \mathbb{R}^2_+ : q_i y \leq q_i \omega\}, \quad i = 1, 2.$$

Покажем, что равновесие не существует. Предполагая противное, из оптимальности по Парето равновесного распределения (в силу результатов из предыдущего раздела) находим, что $x_2 \geq 0.5 \geq x_1$, а из решения задачи потребителя (т. е. в силу (i), (ii) и необходимых условий экстремума) заключаем: $\lambda \operatorname{grad} u_1(x_1, x_2) = \lambda(x_2, x_1) = q_1$ и $\beta \operatorname{grad} u_2(x_1, x_2) = \beta(0, 1) = q_2$ при некоторых $\lambda > 0$, $\beta > 0$. Но в силу бюджетного ограничения (i) должно быть $\beta\, x_2 \leq \beta\, \omega_2$, что невозможно при $x_2 > \omega_2$. □

Оба рассмотренных выше примера удовлетворяют требованиям **A1**–**A7**, однако равновесия не существуют, на первый взгляд, по разным причинам. Действительно, в примере 2.2.1 достаточно добавить к исходным ресурсам первого потребителя любое количество второго продукта, и в экономике появится равновесие. В примере 2.2.2 первый потребитель хотел бы передать (подарить) второму 0.1 продукта, (изменяя распределение до оптимального по Парето), но стоимостной механизм запрещает такого рода операцию, ибо второй потребитель оказывается не способным как-либо финансировать потенциально равновесное распределение $(0.5, 0.5)$ (в силу условия (iv) единственная возможность — это положить $q_2 = 0$, но тогда его спрос бесконечен).

На самом деле причина отсутствия равновесия в обоих примерах общая и она состоит в том, что в области допустимых цен нарушено *условие Слейтера* в задаче потребителя: для каждого $q \in \mathcal{Q}$, $q \neq 0$ и любого $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ найдутся такие $y_i \in \mathbb{X}$, что

$$\langle q_i, y_i \rangle < \alpha_i(x, q) \quad \forall\, i \in \mathcal{N}.$$

Действительно, в примере 2.2.1 это условие нарушается при $p = (0, 1)$, а в примере 2.2.2 — при $q_i = 0$ & $q_j \neq 0$, $i \neq j$.

В каждом конкретном случае несложно придумать такую аппроксимацию функций распределения дохода, чтобы условие Слейтера выполнялось во всей области *достижимых* цен $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$. Вводимое ниже понятие *аппроксимирующего равновесия* решает эту задачу неким универсальным образом.

Определение 2.2.2 *Пусть* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \gg 0$. *Состояние* $x \in L$ *экономики* $\mathcal{E}$ *называется* ε*-равновесием при ценах* $q \in \mathcal{Q}$, *если найдётся* $0 \leq \tau \leq 1$ *и допустимые* $z_i \in \mathbb{X}$, $i = 0, \ldots, n$ *такие, что* $||z_i - x||_2 \leq \sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_j$ *для всех* $i \in \mathcal{N} \cup \{0\}$, *и выполнены условия:*

(i) $\quad \langle q_i, z_i \rangle \leq \alpha_i(z_0, q) + \tau \varepsilon_i \quad \forall\, i \in \mathcal{N}$;

(ii) $\quad \mathcal{P}_i(z_i) \cap \{y \in \mathbb{X} \mid \langle q_i, y \rangle \leq \alpha_i(z_0, q) + \tau \varepsilon_i\} = \emptyset \quad \forall\, i \in \mathcal{N}$;

(iii) $F(x) = F(\omega)$;

(iv) $q \in \mathcal{A}(\mathcal{Q})$.

Как это следует из формального определения, в ε-равновесии постулируется существование $||\varepsilon||_1$-близких состояний экономики, которые являются решением задачи потребителя $i \in \mathcal{N}$ при соответствующих аппроксимациях бюджетного ограничения, определяемых посредством состояния $z_0 \in \mathbb{X}$ и величин $\varepsilon_i > 0$, $\tau \geq 0$. Отметим, что эти аппроксимации расширяют бюджетные множества агентов, причём иногда очень значительно (при $q_i \to 0$ и фиксированных $\tau > 0$, $\varepsilon \gg 0$), хотя по абсолютному значению могут быть сколь угодно малы. Уместно также отметить, что состояние экономики, отвечающее понятию ε-равновесия, может не быть допустимым, однако является ε-допустимым и ω-F-сбалансированным.

Основным результатом настоящего пункта являются две теоремы существования ε-равновесий. Первая из них имеет дело со случаем всеобщих (тотальных) внешних влияний, вторая обобщает результат на случай ограниченных внешних влияний.

Теорема 2.2.1 *Пусть $\mathcal{E}$ удовлетворяет предположениям* **A1**–**A7** *и* $0 \in \mathrm{int}\mathcal{Q}$. *Тогда ε-равновесия существуют.*

Доказательство следующей теоремы основано на тех же идеях, что и доказательство теоремы 2.2.1, однако в силу специфики несколько более громоздкое.

Теорема 2.2.2 *Пусть $\mathcal{E}$ удовлетворяет предположениям* **A1**-**A7** *и является экономикой с ограниченными внешними влияниями в следующем смысле. Для некоторого конечного T имеет место $\mathbb{X} = \prod_T \mathbb{X}_t$ и для каждого $i \in \mathcal{N}$ определены $T_i \subset T$, такие, что*

$$\mathcal{P}_i(x) = \mathcal{P}_i^{T_i}(x) \times \prod_{t \in T \setminus T_i} \mathcal{X}_t, \;\; \mathcal{P}_i^{T_i}(x) \subset \mathbb{X}_i = \prod_{t \in T_i} \mathbb{X}_t \subset L_i = \prod_{t \in T_i} L_t, \quad (2.2.9)$$

причём соотношения (2.2.9) выполнены для всех $x \in \mathbb{X}$, таких, что $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$. Пусть также выполнено

$$\bigcup_{i \in \mathcal{N}} T_i = T \qquad (2.2.10)$$

и $0 \in \mathrm{int}|_{L^{eff}}(\mathcal{Q} \cap L^{eff})$, *где*

$$L^{eff} = \{q = (q_1, ..., q_n) \in (L')^{\mathcal{N}} \mid q_i^t = 0 \; \forall\, i \in \mathcal{N}, \; \forall\, t \in T \setminus T_i\}.$$

Тогда для каждого согласованного проектирования $g : L^{\mathcal{N}} \to L$, *удовлетворяющего* **A6**, *существует* ε*-равновесие с ценами* $q = (q_1, ..., q_n) \in \mathcal{Q} \cap L^{eff}$, *такое, что* $z_0 = g(z_1, \ldots, z_n)$.

Описанное в теореме 2.2.2 пространство L^{eff} — это эффективная область изменения цен, в рамках которой имеет место вторая теорема благосостояния, — состояния экономики оптимальны (строго) по Парето тогда и только тогда, когда в L^{eff} найдётся допустимый набор линейных (и нестандартных) функционалов, опорных к множествам строго предпочитаемых состояний каждого экономического агента (см. теорему 2.1.3). Данное доказательство является наиболее технически сложным в данном пособии.

2.2.2 Техника точечно-множественных отображений

Доказательство существования аппроксимирующих равновесий основано на применении техники точечно-множественных отображений (соответствий) и теоремы о неподвижной точке. Ниже даётся соответствующая сводка результатов.

Пусть X и Y некоторые множества. Тот факт, что F является либо *точечно-множественным отображением*, либо *отношением*, либо *соответствием*[10] из A в B, мы будем записывать в виде $F : X \rightrightarrows Y$ (здесь $F(x) \subset Y \; \forall\, x \in X$)[11] или в виде $x \rightrightarrows F(x), \; x \in X$.

Графиком отображения $F : X \rightrightarrows Y$ называется множество

$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}.$$

Далее пусть X и Y топологические пространства. Нас будут прежде всего интересовать свойства разного рода непрерывности соответствия, выраженные в терминах топологий на X и Y.

[10] Под термином соответствие в отличие от точечно-множественного отображения, иногда понимают точечно-множественное отображение, отображающее каждую точку из указанного множества в *непустое подмножество* области значений. Мы не будем делать такого рода различий.

[11] В литературе широко используется обозначение $F : X \to 2^Y$, которого мы избегаем.

Определение 2.2.3 *Отображение* $F : X \rightrightarrows Y$ *называется* полунепрерывным сверху (п. н. св.) в точке $x \in X$, *если при* $F(x) \neq \emptyset$ *для каждой окрестности* U *множества* $F(x)$ *найдётся такая окрестность* V *точки* x, *что* $F(x') \subset U$ *для всех* $x' \in V$.

Отображение называется полунепрерывным сверху, *если оно п. н. св. для всех* $x \in X$.

Определение 2.2.4 *Отображение* $F : X \rightrightarrows Y$ *называется* полунепрерывным снизу (п. н. сн.) в точке $x \in X$, *если для каждой открытого* $U \subset Y$, *такого, что* $F(x) \cap U \neq \emptyset$ *найдётся такая окрестность* V *точки* x, *что* $F(x') \cap U \neq \emptyset$ *для всех* $x' \in V$.

Отображение называется полунепрерывным снизу, *если оно п. н. сн. для всех* $x \in X$.

Определение 2.2.5 *Отображение* $F : X \rightrightarrows Y$ *называется* замкнутым, *если замкнут его график.*

Определение 2.2.6 *Отображение* $F : X \rightrightarrows Y$ *называется* непрерывным, *если оно полунепрерывно сверху и снизу одновременно.*

Для функций (точечно-точечных отображений) понятия полунепрерывности сверху и снизу совпадают с обычной непрерывностью, а если область значений компактна, то они эквивалентны замкнутости отображения.

Следующие утверждения описывают характеристические свойства полунепрерывных отображений.

Утверждение 2.2.1 *Отображение* $F : X \rightrightarrows Y$ полунепрерывно сверху $\iff$ *выполнена одна из альтернатив:*

(i) *множество* $\{x \in X \mid F(x) \subset U\}$ *открыто для любого открытого* $U \subset Y$;

(ii) *множество* $F^{-1}(G) = \{x \in X \mid F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ *замкнуто для любого замкнутого* $G \subset Y$.

Утверждение 2.2.2 *Отображение* $F : X \rightrightarrows Y$ полунепрерывно снизу $\iff$ *выполнена одна из альтернатив:*

(i) *множество* $\{x \in X \mid F(x) \subset G\}$ *замкнуто для любого замкнутого* $G \subset Y$;

(ii) *множество* $F^{-1}(U) = \{x \in X \mid F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ *открыто для любого открытого* $U \subset Y$.

Утверждение 2.2.3 *Пусть при* $k = 1, \ldots, m$ *отображения* $F_k : X \rightrightarrows Y$ полунепрерывны сверху (снизу). *Тогда отображение* $x \rightrightarrows \prod F_k(x)$ *является* полунепрерывным сверху (снизу) *соответственно.*

Если, дополнительно, Y *— линейное пространство, то* $x \rightrightarrows \sum F_k(x)$ *является* полунепрерывным сверху (снизу) *соответственно.*

Если, более того, Y *— конечномерное линейное пространство, то* $x \rightrightarrows \mathrm{co} \sum F_k(x)$ *является* полунепрерывным сверху (снизу) *соответственно.*

В приложениях весьма полезно следующее

Утверждение 2.2.4 *Пусть* Y *компакт и отображение* $F : X \rightrightarrows Y$ *замкнуто-значно. Тогда отображение* F полунепрерывно сверху $\iff$ F *замкнуто.*

Рассмотрим далее применяемую нами теорему о неподвижной точке. Пусть $F : X \rightrightarrows X$ точечно-множественное отображение. Тогда $x \in X$ называется *неподвижной точкой*, если $x \in F(x)$.

Теорема 2.2.3 (Какутани 1949) *Пусть* X *— непустое, компактное и выпуклое подмножество некоторого конечномерного пространства*[12]*. Пусть* $F : X \rightrightarrows X$ *замкнутое отображение, и при этом* $F(x)$ *непустой выпуклый компакт для каждого* $x \in X$*. Тогда у отображения* F существует неподвижная точка.

Селектором точечно-множественного отображения $F : X \rightrightarrows Y$ называется такая функция $f : X \to Y$, что $f(x) \in F(x)$ для каждого $x \in \mathrm{dom} F$.

Теорема 2.2.4 (Майкл 1956) *Пусть* $F : X \rightrightarrows E$ *— полунепрерывное снизу точечно-множественное отображение из метрического пространства* X *в конечномерное пространство* E[13]*, такое, что* $F(x)$ *непустое выпуклое подмножество для каждого* $x \in X$*. Тогда отображение* F *имеет* непрерывный селектор*, определённый на* X*.*

[12] Давно и хорошо известно, что эта теорема выполняется в любых топологических векторных пространствах. Однако Какутани формулирует её только для конечномерных пространств, см., например, *Берж* (1961).

[13] Это не самая общая, но удобная в наших приложениях версия теоремы Майкла, в которой не требуется замкнутость значений исследуемого отображения (конечномерность E очень важна). Более сильную теорему, из которой следует данная, можно найти в *Michael* (1956) (теорема $3.1'''$, с. 368).

2.2.3 Доказательство теорем существования

Доказательство теоремы 2.2.1. Прежде всего отметим, что, с целью упростить изложение и в силу предположения $0 \in \mathrm{int}\mathcal{Q}$, мы можем считать, без ограничения общности, что $\mathcal{Q}$ является шаром единичного радиуса в $(L')^{\mathcal{N}}$. Более того, в силу предположений **A1, A2**, поскольку пространство L предполагалось конечномерным, мы можем также считать, что $\mathbb{X}$ является компактным подмножеством в L (в противном случае в нижеизложенных рассуждениях можно стандартным образом заменить $\mathbb{X}$ пересечением этого множества с любой компактной выпуклой окрестностью множества $\mathcal{A}(\mathbb{X})$).

Рассмотрим следующие аппроксимации бюджетных ограничений экономических агентов. Пусть даны $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \gg 0$, текущее состояние экономики $x \in \mathbb{X}$ и набор допустимых индивидуальных цен $q = (q_1, ..., q_n) \in \mathcal{Q}$. В качестве новых доходов примем величину

$$\alpha_i^{\varepsilon}(x, q) = \tau(q)\varepsilon_i + \alpha_i(x, q),$$

где для любого фиксированного $0 < \beta < 1/(n+1)$ положим

$$\tau(q) = (\beta - ||q||)^+ + \sum_{\mathcal{N}} \min(\beta, ||q_j||).$$

Здесь по определению для всякого действительного y величина $y^+ = y$ для $y \geq 0$ и $y^+ = 0$ – иначе. Сразу отметим, что по построению $0 < \tau(q) < 1\ \forall q \in Q$, откуда, в силу $\varepsilon_i > 0$ и предположений **A5, A7**, следует, что функции $\alpha_i^{\varepsilon}(.)$ непрерывны и *удовлетворяют условию Слейтера* (в силу **A7**: $\forall q \in Q\ \exists y \in \mathbb{X} \mid\ \langle q_i, y\rangle \leq \alpha_i(x_0, q) < \alpha_i^{\varepsilon}(x_0, q)$).

На следующем этапе мы переходим к построению точечно-множественного отображения, неподвижные точки которого реализуют ε-равновесные состояния абстрактной экономики. Положим

$$X_i = \mathbb{X}, \quad Y_i = B^{\varepsilon} = \{y \in L \mid ||y||_2 \leq \sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_j\}, \quad i \in \mathcal{N}$$

и

$$\mathcal{K} = \prod_{\mathcal{N}} Y_i \times \mathcal{Q} \times \prod_{\mathcal{N}} X_i.$$

Множество $\mathcal{K}$ является непустым выпуклым компактом.

Далее определим отображения, действующие из $\mathcal{K}$ в себя. Для каждого $i \in \mathcal{N}$ и $\kappa = (y_1, ..., y_n, q, x_1, ..., x_n) \in \mathcal{K},\ x_i \in X_i,\ q \in \mathcal{Q}$ положим

$$\Psi_i(\kappa) = \Psi_i(q) = \{\ y' \in Y_i \mid q_i y' \leq -\min(\beta, ||q_i||) \cdot (\sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_j)\ \}.$$

Из построения с очевидностью следует, что эти точечно-множественные отображения имеют замкнутый график и непустые выпуклые значения для всех $\kappa \in \mathcal{K}$.

С целью использовать закон Вальраса **A6**, рассмотрим согласованное с T проектирование $g : L^N \to L$ и определим $x_0 = g(x_1, \dots, x_n)$[14].

Далее, для $\phi_i(\kappa) = \phi_i(x_0, x_i, q)$ положим:

$$\phi_i(\kappa) = \begin{cases} \{z' \in X_i \mid q_i z' < \alpha_i^\varepsilon(x_0, q)\}, & \text{при} \quad q_i x_i > \alpha_i^\varepsilon(x_0, q), \\ \{z' \in X_i \mid q_i z' < \alpha_i^\varepsilon(x_0, q)\} \cap \operatorname{co} \mathcal{P}_i(x_i), & \text{при} \quad q_i x_i \le \alpha_i^\varepsilon(x_0, q). \end{cases}$$

Заметьте, что правая часть каждого из использованных здесь «бюджетных ограничений» зависит от состояния $x_0 = g(x_1, \dots, x_n)$, — это не случайно, и является необходимым элементом конструкции. Поскольку каждая функция $\alpha_i^\varepsilon(.)$ непрерывна и по построению удовлетворяет условию Слейтера, то соответствие

$$\kappa \Rightarrow \{z' \in X_i \mid q_i z' < \alpha_i^\varepsilon(x_0, q)\}$$

является полунепрерывным снизу и обладает непустыми, относительно открытыми и выпуклыми значениями. Отсюда, в силу **A3**, легко заключить, что и отображение $\kappa \Rightarrow \phi_i(\kappa)$ будет полунепрерывно снизу и иметь открытые в X_i и выпуклые значения. Заметим, однако, что отображение $\phi_i(.)$ может иметь пустые значения. Положим

$$U_i = \operatorname{dom} \phi_i(.) = \{\kappa \mid \phi_i(\kappa) \ne \emptyset\}.$$

Теперь уже отображение $\phi_{i|_{U_i}}$ имеет в своей области определения непустые значения и, следовательно, удовлетворяет теореме Майкла (о существовании непрерывного селектора). Выберем любой непрерывный селектор f_i^ϕ и положим

$$\Phi_i(\kappa) = \begin{cases} \{f_i^\phi(\kappa)\}, & \text{при} \quad \kappa \in U_i, \\ X_i, & \text{при} \quad \kappa \notin U_i. \end{cases}$$

Из построения (т. к. U_i открыто в силу **A3** и условия Слейтера) легко следует, что данное отображение имеет замкнутый график и принимает непустые выпуклые значения.

[14]В данном случае неявно предполагается, что $T_i = T$ для всех $i \in \mathcal{N}$ и, в частности, T может быть одноэлементным множеством. Поэтому любое проектирование является согласованным, однако при этом нужно, чтобы была выполнена вторая часть предположения **A6**.

Последнее, завершающее конструкцию отображение соответствует тому, что иногда называется «ценообразующим органом» и определяет реакцию рынка на текущий стратегический выбор экономических агентов:

$$\Gamma(\kappa) = \{q' \in \mathcal{A}(\mathcal{Q}) \mid \sum_{\mathcal{N}} q'_i(y_i + x_i - \omega) \geq \sum_{\mathcal{N}} q''_i(y_i + x_i - \omega) \ \ \forall\, q'' \in \mathcal{A}(\mathcal{Q})\}.$$

«Собирая» построенные отображения в одно по формуле

$$H(\kappa) = \prod_{\mathcal{N}} \Psi_i(\kappa) \times \Gamma(\kappa) \times \prod_{\mathcal{N}} \Phi_i(\kappa), \quad \kappa \in \mathcal{K},$$

мы получаем точечно-множественное отображение, которое имеет замкнутый график и непустые выпуклые значения в $\mathcal{K}$ при любом $\kappa \in \mathcal{K}$ (в силу вышеуказанных свойств построенных отображений). Следовательно, применима классическая теорема Какутани, и отображение $H(.)$ имеет неподвижную точку в $\mathcal{K}$. Пусть

$$\overline{\kappa} \in H(\overline{\kappa}).$$

На финальном этапе мы исследуем свойства этой неподвижной точки.

Прежде всего заметим, что неравенство $\overline{q}_i\overline{x}_i > \alpha_i^{\varepsilon}(\overline{x}_0, \overline{q})$ невозможно по определению отображений $\phi_i(.)$ и $\Phi_i(.)$. Следовательно, должно быть

$$\overline{q}_i\overline{x}_i \leq [(\beta - ||q||)^+ + \sum_{\mathcal{N}} \min(\beta, ||q_j||)]\varepsilon_i + \alpha_i(\overline{x}_0, \overline{q}) \ \ \forall\, i \in \mathcal{N}. \qquad (2.2.11)$$

Далее, для какого-либо $i \in \mathcal{N}$ также невозможно

$$f_i^{\phi}(\overline{\kappa}) \in \{z' \in X_i \mid q_i z' < \alpha_i^{\varepsilon}(\overline{x}_0, \overline{q})\} \bigcap \operatorname{co} \mathcal{P}_i(\overline{x}_i) \neq \emptyset,$$

ибо это противоречит предположению **A4** (выпуклость и иррефлексивность предпочтений). Следовательно, последнее пересечение должно быть пусто, откуда, в силу **A3(i)** и условия Слейтера для $\alpha_i^{\varepsilon}(.)$, заключаем

$$\{z' \in X_i \mid q_i z' \leq \alpha_i^{\varepsilon}(\overline{x}_0, \overline{q})\} \bigcap \operatorname{co} \mathcal{P}_i(\overline{x}_i) = \emptyset \ \ \forall\, i \in \mathcal{N}. \qquad (2.2.12)$$

Далее, из построения $\Psi_i(.)$ и свойства неподвижной точки $\overline{y}_i \in \Psi_i(\overline{\kappa})$ заключаем $||\overline{y}_i||_2 \leq \sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_j$ и

$$\overline{q}_i\overline{y}_i \leq -\min(\beta, ||\overline{q}_i||_2) \cdot (\sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_j) \quad \forall\, i \in \mathcal{N}.$$

Теперь просуммируем по $i \in \mathcal{N}$ данные неравенства и неравенства из (2.2.11). В результате, после соответствующих сокращений и простейших преобразований, а также используя **A6** (закон Вальраса), выполненный в силу (2.2.12) и $\alpha_i(\overline{x}_0, \overline{q}) \leq \alpha_i^{\varepsilon}(\overline{x}_0, \overline{q})$ «в точке» $\overline{x}_0 = g(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$, получим

$$\sum_{\mathcal{N}} \overline{q}_i \overline{x}_i + \sum_{\mathcal{N}} \overline{q}_i \overline{y}_i \leq$$

$$[(\beta - ||\overline{q}||)^+ + \sum_{\mathcal{N}} \min(\beta, ||\overline{q}_j||)] \sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_i - (\sum_{\mathcal{N}} \min(\beta, ||\overline{q}_j||)) \sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_i + \sum_{\mathcal{N}} \alpha_i(\overline{x}_0, \overline{q}),$$

откуда следует

$$\sum_{\mathcal{N}} \overline{q}_i(\overline{x}_i + \overline{y}_i) \leq (\beta - ||\overline{q}||)^+ \sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_i + \sum_{\mathcal{N}} \overline{q}_i \omega \quad \Longrightarrow$$

$$\sum_{\mathcal{N}} \overline{q}_i(\overline{x}_i + \overline{y}_i - \omega) \leq (\beta - ||\overline{q}||)^+ \sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_i.$$

Далее рассмотрим величину, стоящую в последнем соотношении слева. Предположим, что $\sum_{\mathcal{N}} \overline{q}_i(\overline{x}_i + \overline{y}_i - \omega) > 0$. Из построения отображения $\Gamma(.)$ и свойств неподвижной точки следует, что функционал $Q(q, \overline{y}, \overline{x}) = \sum_{\mathcal{N}} q_i(\overline{x}_i + \overline{y}_i - \omega)$ достигает максимума на $\overline{q}$ при ограничениях $q \in \mathcal{A}(\mathcal{Q})$. Однако по предположению $\mathcal{Q}$ является шаром единичного радиуса в $(L')^{\mathcal{N}}$, поэтому с необходимостью получаем $||\overline{q}|| = 1$, откуда следует $(\beta - ||\overline{q}||)^+ = 0$ (по выбору $\beta < 1/(n+1)$). Таким образом, сделанное предположение неверно, и можно заключить, что

$$\sum_{\mathcal{N}} q_i(\overline{x}_i + \overline{y}_i - \omega) \leq \sum_{\mathcal{N}} \overline{q}_i(\overline{x}_i + \overline{y}_i - \omega) = 0 \;\; \forall\, q \in \mathcal{A}(\mathcal{Q}).$$

Более того, последнее соотношение выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\mathcal{N}} q_i(\overline{x}_i + \overline{y}_i - \omega) = 0 \;\; \forall\, q \in E(L) = \{q \in (L')^{\mathcal{N}} \mid \ker \sum_{\mathcal{N}} q_i(.) \supset \ker F(.)\}.$$

Анализ данной формулы позволяет сделать все необходимые выводы. Действительно, если положить $q_i = -q_j = q'$ и $q_k = 0$ для всех прочих $k \neq i, j$, то можно заключить

$$q'(\overline{y}_i + \overline{x}_i) = q'(\overline{y}_j + \overline{x}_j) \;\; \forall\, q' \in L' \implies \overline{y}_k + \overline{x}_k = x \;\; \forall\, k \in \mathcal{N}.$$

Продолжая, для всех $q' \in L'$, удовлетворяющих $\ker q'(.) \supset \ker F(.)$, для $z' = x - \omega$ должно быть

$$\langle (q', ..., q'), (z', ..., z') \rangle = 0 \ \Rightarrow \ q'z' = 0 \ \Rightarrow \ z' \in \ker F(.) \ \Rightarrow \ x - \omega \in \ker F(.).$$

В итоге, суммируя сказанное, получаем

$$x = \overline{y}_i + \overline{x}_i \quad \forall\, i \in \mathcal{N} \quad \& \quad F(x) = F(\omega),$$

что в силу $||\overline{y}_i||_2 \leq \sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_j$ и ввиду соотношений (2.2.11), (2.2.12) и реализует $(x, \overline{q})$ как ε-равновесие абстрактной модели с тотальными внешними влияниями относительно «аппроксимаций»: $z_0 = \overline{x}_0 = g(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$, $z_i = \overline{x}_i$, $i \in \mathcal{N}$. □

Доказательство теоремы 2.2.2. Аналогично предыдущему доказательству можем считать, без ограничения общности, что $\mathcal{Q} \cap L^{eff}$ является шаром единичного радиуса в L^{eff}, а в силу **A1**, **A2**, мы можем также считать, что $\mathbb{X}$ является компактным подмножеством в L (в противном случае заменим $\mathbb{X}$ его пересечением с подходящей компактной выпуклой и «прямоугольной» окрестностью множества $\mathcal{A}(\mathbb{X})$).

Рассмотрим следующие стандартные аппроксимации бюджетных ограничений экономических агентов. Пусть даны $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \gg 0$, текущее состояние экономики $x \in \mathbb{X}$ и набор допустимых индивидуальных цен $q = (q_1, ..., q_n) \in \mathcal{Q}$. В качестве новых доходов примем величину

$$\alpha_i^{\varepsilon}(x, q) = \tau(q)\varepsilon_i + \alpha_i(x, q),$$

где для фиксированного $0 < \beta < 1/2$ положим

$$\tau(q) = (\beta - ||q||)^+ + \tfrac{1}{n} \sum_{\mathcal{N}} \min(\beta, ||q_j||).$$

Отметим, что по построению $0 < \tau(q) < 1$, откуда в силу $\varepsilon_i > 0$ и предположений **A5**, **A7** следует, что функции $\alpha_i^{\varepsilon}(.)$ непрерывны и *удовлетворяют условию Слейтера.*

Далее переходим к построению точечно-множественного отображения, чьи неподвижные точки реализуют ε-равновесные состояния абстрактной экономики.

Положим

$$X_i = \mathbb{X}, \quad Y_i = B_n^{\varepsilon} = \{y \in L \mid ||y||_2 \leq \tfrac{1}{n} \sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_j\}, \quad i \in \mathcal{N}$$

и
$$\mathcal{K} = \prod_{\mathcal{N}} Y_i \times \left(\mathcal{Q} \bigcap L^{eff}\right) \times \prod_{\mathcal{N}} X_i.$$
Множество $\mathcal{K}$ является непустым выпуклым компактом.

Определим отображения, действующие из $\mathcal{K}$ в себя. Для каждого $i \in \mathcal{N}$ и $\kappa = (y_1, ..., y_n, q, x_1, ..., x_n) \in \mathcal{K},\ x_i \in X_i,\ q \in \mathcal{Q}$ положим

$$\Psi_i(\kappa) = \Psi_i(q) = \{\ y' \in Y_i \mid q_i y' \leq -\tfrac{1}{n}\min(\beta, ||q_i||) \cdot (\sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_j)\ \}.$$

Эти точечно-множественные отображения имеют замкнутый график и непустые выпуклые значения для всех $\kappa \in \mathcal{K}$.

Используя закон Вальраса **A6** и отвечающее ему отображение проектирования $g : L^{\mathcal{N}} \to L$, определим точечно-точечные отображения проектирования $g'(.)$, $g''(.)$ из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{X}$ и $B^\varepsilon = \{y \in L \mid ||y|| \leq \sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_j\}$, полагая
$$g'(\kappa) = g(x_1, \ldots, x_n), \quad g''(\kappa) = g(y_1, \ldots, y_n).$$
Из построения в частности следует, что оба эти отображения непрерывны.

Положим $x_0 = g(x_1, \ldots, x_n)$ и для $\phi_i(\kappa) = \phi_i(x_0, x_i, q)$ определим:
$$\phi_i(\kappa) = \begin{cases} \{z' \in X_i \mid q_i z' < \alpha_i^\varepsilon(x_0, q)\}, & \text{при} \quad q_i x_i > \alpha_i^\varepsilon(x_0, q), \\ \{z' \in X_i \mid q_i z' < \alpha_i^\varepsilon(x_0, q)\} \cap \operatorname{co} \mathcal{P}_i(x_i), & \text{при} \quad q_i x_i \leq \alpha_i^\varepsilon(x_0, q). \end{cases}$$

Опять, поскольку каждая функция $\alpha_i^\varepsilon(.)$ непрерывна и по построению удовлетворяет условию Слейтера, то соответствие
$$\kappa \Rightarrow \{z' \in X_i \mid q_i z' < \alpha_i^\varepsilon(x_1, q)\}$$
является полунепрерывным снизу и обладает непустыми, относительно открытыми и выпуклыми значениями. Следовательно, в силу **A3** отображение $\kappa \Rightarrow \phi_i(\kappa)$ будет полунепрерывно снизу и иметь открытые в X_i и выпуклые значения. Однако отображение $\phi_i(.)$ может принимать пустые значения. Положим
$$U_i = \operatorname{dom} \phi_i(.) = \{\kappa \mid \phi_i(\kappa) \neq \emptyset\}.$$
Отображение ${\phi_i}_{|_{U_i}}$ принимает во всей своей области определения непустые значения. Более того, в силу ограниченности внешних влияний (2.2.9), по выбору $q \in L^{eff}$ и определению пространства L^{eff}, для всех $\kappa \in U_i$ имеет место
$$\phi_i(\kappa) = \operatorname{pr}_{|_{L_i}}[\phi_i(\kappa)] \times \prod_{t \in T \setminus T_i} \mathbb{X}_t,$$

где посредством $\mathrm{pr}_{|_{L_i}}[\phi_i(\kappa)]$ обозначена проекция множества $\phi_i(\kappa)$ на $L_i = \prod_{t\in T_i} L_t$. Ясно, что точечно-множественное отображение

$$\phi_{L_i}(.) : \kappa \Rightarrow \mathrm{pr}_{|_{L_i}}[\phi_i(\kappa)]$$

полунепрерывно снизу и имеет открытые, выпуклые и непустые при $\kappa \in U_i$ значения. Следовательно, это отображение, (равно как и $\phi_i(.)$), удовлетворяет теореме Майкла (о существовании непрерывного селектора). Выберем любой непрерывный селектор $f^{\phi}_{L_i}$ этого отображения и определим непрерывный селектор отображения $\phi_i(.)$ по формуле

$$f^{\phi}_i(\kappa) = (f^{\phi}_{L_i}(\kappa), g'_{L_{-i}}(\kappa)), \quad \kappa \in U_i,$$

где $g'_{L_{-i}}(\kappa)$ — проекция вектора $g'(\kappa)$ на пространство $L_{-i} = \prod_{t\in T\setminus T_i} L_t$. Другими словами, в силу сделанных предположений у отображения $\phi_i(.)$ существует и выбирается селектор, полученный как декартово произведение двух отображений, причём так, что «фрагмент» этого селектора, отвечающий дополнительному к L_i пространству — L_{-i}, где $L_i \times L_{-i} = L$, — совпадает с соответствующим «фрагментом» введённого выше отображения проектирования $g'(.)$.

Теперь можно определить необходимое для построения точечно-множественное отображение

$$\Phi_i(\kappa) = \begin{cases} \{f^{\phi}_i(\kappa)\}, & \text{при} \quad \kappa \in U_i, \\ \prod_{t\in T_i} \mathbb{X}_t \times \{g'_{L_{-i}}(\kappa)\}, & \text{при} \quad \kappa \notin U_i. \end{cases}$$

Из построения (ибо U_i открыто в $\mathcal{K}$) следует, что данное отображение имеет замкнутый график и принимает непустые выпуклые значения[15].

Последнее, завершающее конструкцию отображение соответствует «работе ценообразующего органа» и определяет реакцию рынка на текущий стратегический выбор экономических агентов:

$$\Gamma(\kappa) = \{q' \in \mathcal{A}(\mathcal{Q} \cap L^{eff}) \mid$$
$$\sum_{\mathcal{N}} q'_i(y_i + x_i - \omega) \geq \sum_{\mathcal{N}} q''_i(y_i + x_i - \omega)\ \forall q'' \in \mathcal{A}(\mathcal{Q} \cap L^{eff})\}.$$

«Собирая» теперь построенные отображения в одно по формуле

$$H(\kappa) = \prod_{\mathcal{N}} \Psi_i(\kappa) \times \Gamma(\kappa) \times \prod_{\mathcal{N}} \Phi_i(\kappa), \quad \kappa \in \mathcal{K},$$

[15] Обратите внимание, что использованный выше метод нахождения непрерывного селектора нужен только для того, чтобы получить замкнутость графика отображения $\Phi_i(.)$.

мы получаем точечно-множественное отображение, которое имеет замкнутый график и непустые выпуклые значения в $\mathcal{K}$ при любом $\kappa \in \mathcal{K}$ (в силу вышеуказанных свойств построенных отображений). Следовательно, применима классическая теорема Какутани и отображение $H(.)$ имеет неподвижную точку в $\mathcal{K}$. Пусть

$$\overline{\kappa} \in H(\overline{\kappa}).$$

Сразу отметим основное отличительное свойство этой неподвижной точки от точки, полученной при доказательстве теоремы 2.2.1: для каждого $i \in \mathcal{N}$ имеет место

$$(\overline{x}_i)_t = (g'(\overline{\kappa}))_t \quad \forall\, t \in T \setminus T_i. \tag{2.2.13}$$

На завершающем этапе доказательства мы исследуем другие свойства точки $\overline{\kappa}$.

Используя рассуждения, полностью совпадающие с изложенными в доказательстве теоремы 2.2.1, установим, что $\overline{q}_i\overline{x}_i \leq \alpha_i^{\varepsilon}(\overline{x}_0, \overline{q})$ и при этом

$$\{z' \in X_i \mid \overline{q}_i z' \leq \alpha_i^{\varepsilon}(\overline{x}_0, \overline{q})\} \bigcap \mathrm{co}\,\mathcal{P}_i(\overline{x}_i) = \emptyset \ \ \forall\, i \in \mathcal{N}. \tag{2.2.14}$$

Кроме того, по определению $\Gamma(.)$ функционал

$$Q(q, \overline{y}, \overline{x}) = \sum_{\mathcal{N}} q_i(\overline{x}_i + \overline{y}_i - \omega)$$

достигает максимума на $\overline{q}$ при ограничениях $q \in \mathcal{A}(\mathcal{Q} \cap L^{eff})$. Однако $\mathcal{Q} \cap L^{eff}$ по предположению является шаром единичного радиуса в L^{eff}, поэтому рассуждениями, аналогичными изложенным в доказательстве теоремы 2.2.1, получаем $Q(\overline{q}, \overline{y}, \overline{x}) = 0$, т. е. имеем

$$\sum_{\mathcal{N}} q_i(\overline{x}_i + \overline{y}_i - \omega) \leq \sum_{\mathcal{N}} \overline{q}_i(\overline{x}_i + \overline{y}_i - \omega) = 0 \ \ \forall\, q \in \mathcal{A}(\mathcal{Q} \cap L^{eff}).$$

Более того, последнее соотношение выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\mathcal{N}} q_i(\overline{x}_i + \overline{y}_i - \omega) = 0 \ \ \forall\, q \in E(L^{eff}) = \{q \in L^{eff} \mid \ker \sum_{\mathcal{N}} q_i(.) \supset \ker F(.)\}.$$

Анализ этой формулы позволяет сделать все необходимые выводы. Действительно, из предыдущего имеем

$$(\overline{x}_1 + \overline{y}_1 - \omega, \ldots, \overline{x}_n + \overline{y}_n - \omega) \in E(L^{eff})^{\perp}.$$ [16]

[16] Символом $A^{\perp}$ обозначается ортогональное дополнение к множеству A.

Однако так как $E(L^{eff}) = E(L) \cap L^{eff}$, где

$$E(L) = \{q \in (L')^{\mathcal{N}} \mid \ker \sum_{\mathcal{N}} q_i(.) \supset \ker F(.)\},$$

то имеет место[17]

$$E(L^{eff})^{\perp} = (E(L) \cap L^{eff})^{\perp} = E(L)^{\perp} + (L^{eff})^{\perp}.$$

При этом в конце доказательства теоремы 2.2.1 фактически было доказано, что

$$E(L)^{\perp} = \{(z, \dots, z) \in L^{\mathcal{N}} \mid z \in \ker F(.)\},$$

а из определения пространства L^{eff} следует, что

$$(L^{eff})^{\perp} = \{(z^1, \dots, z^n) \in L^{\mathcal{N}} \mid (z^i)_t = 0 \ \forall\, t \in T_i\}.$$

В результате можно заключить существование такого $z \in \ker F(.)$ и таких $z^i \in L$, удовлетворяющих условию $(z^i)_t = 0$ для всех $t \in T_i$ и $i \in \mathcal{N}$, что

$$\overline{x}_i + \overline{y}_i = \omega + z + z^i.$$

Последнее в силу (2.2.10) и определения отображений $g'(.)$, $g''(.)$ влечёт

$$\omega + z = g'(\overline{\kappa}) + g''(\overline{\kappa}) \iff (\omega + z)_t = (\overline{x}_i + \overline{y}_i)_t, \quad t \in T_i,\ i \in \mathcal{N}.$$

В то же время, в силу (2.2.13), при $t \notin T_i$ должно быть $(\overline{x}_i)_t = (g'(\overline{\kappa}))_t$, поэтому

$$(g'(\overline{\kappa}))_t + (\overline{y}_i)_t = (g'(\overline{\kappa}))_t + (g''(\overline{\kappa}))_t + (z^i)_t \Longrightarrow (z^i)_t = (\overline{y}_i)_t - (g''(\overline{\kappa}))_t.$$

В итоге, если положить $z_i = \overline{x}_i$, $i \in \mathcal{N}$ и $x = \omega + z$, то в силу последнего и предыдущего соотношения получаем

$$(z_i)_t = \begin{cases} (x)_t - (\overline{y}_i)_t, & \text{при} \quad t \in T_i, \\ (x)_t - (g''(\overline{\kappa}))_t, & \text{при} \quad t \in T \setminus T_i, \end{cases}$$

из чего следует $||z_i - x|| \le \sum_{\mathcal{N}} ||\overline{y}_j||$. Но, так как по построению $||\overline{y}_j|| \le \frac{1}{n} \sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_k$, то

$$||z_i - x|| \le \sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_j$$

[17] Для любых подпространств A и B конечномерного пространства выполняется

$$(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}.$$

для всех $i \in \mathcal{N}$. Поскольку по определению x и свойствам $z \in \ker F$ выполнено $F(x) = F(\omega)$, а $\overline{q} \in \mathcal{A}(\mathcal{Q})$ по построению, то ввиду соотношения (2.2.14) заключаем, что $(x, \overline{q})$ является ε-равновесием абстрактной модели с ограниченными внешними влияниями относительно «аппроксимаций» $z_0 = \overline{x}_0 = g(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$, $z_i = \overline{x}_i$, $i \in \mathcal{N}$. □

2.3 Общее понятие равновесия с нестандартными ценами

С содержательно-экономической точки зрения равновесие с нестандартными ценами представляет собой некоторый устойчивый режим функционирования экономической системы рыночного типа при наличии сколь угодно тонкой (гибкой, мелкой) шкалы измерения стоимостных величин. Делая свой независимый стратегический выбор в рамках собственных финансовых возможностей (бюджетных ограничений), каждый участник экономики (экономический агент) затем «округляет» своё решение до стандартного, т. е. выбирает ближайшее в некоторой стандартной шкале измерений, пренебрегая, таким образом, стоимостями более высокого уровня малости. При этом, как обычно в равновесии, ситуация такова, что совокупность всех индивидуальных решений совместима между собой или, в других терминах, соответствующее состояние экономики достижимо (сбалансированно)[18]. Таким образом, понятие равновесия с нестандартными ценами обобщает традиционное в том смысле, что отвечающее ему состояние экономики представляет из себя достижимую совокупность «огрублённых», с бесконечной мерой малости, независимых индивидуальных решений, в рамках бюджетных ограничений, определённых данным механизмом стоимостного регулирования в пределах сколь угодно (бесконечно) тонкой шкалы измерения стоимостных параметров.

С чисто математической точки зрения равновесие с нестандартными ценами реализует идею предельного перехода по гипотетически возможным и близким к равновесным состояниям экономики. Последнее осуществляется посредством методов нестандартного анализа, путём перехода в универсум нестандартной математики, где истинны все теоремы стандартной математики (в силу так называемого *принципа переноса*), и, следовательно, выполнена теорема существования аппроксимирующих ε-равновесий. Затем, выбирая бесконечно малые $\varepsilon \approx 0$, возвраща-

[18]В англоязычной литературе, применительно к традиционным моделям, говорят, что «все рынки очищаются».

емся в стандартную область изменения состояний экономики, используя в качестве спуска операцию взятия стандартной части, и дополняющую её, операцию взятия стандартной внутренности. Важно, что в рассматриваемом случае такого рода процедура подъёма и обратного спуска в стандартный универсум приводит к состояниям экономики, отвечающим традиционному понятию экономического равновесия, если все эти переходы осуществлялись в точках непрерывности бюджетных отображений участников экономики. Другими словами, реальная новизна в понятии равновесия с нестандартными ценами может проявиться только в точках разрыва, т. е. в случае, когда нарушены условия существования обычного равновесия в смысле определения 2.2.1. В свою очередь, выполнение условия Слейтера при стандартизации нестандартных равновесных цен и состояния экономики является достаточным требованием, обеспечивающим именно непрерывность соответствующих бюджетных отображений. Таким образом, если условие Слейтера выполнено, то равновесие с нестандартными ценами в точности является равновесием в смысле определения 2.2.1.

Прежде чем перейти к формальному описанию понятий и результатов, напомним, что для любого *внутреннего* подмножества $A \subset {}^*L$ определены стандартная часть и стандартная внутренность, задаваемые, соответственно, по формулам

$$\mathrm{st}A = \{y \in L \mid \mu(y) \cap A \neq \emptyset\}, \quad \mathrm{si}A = \{y \in L \mid \mu(y) \subset A \neq \emptyset\},$$

где посредством $\mu(x)$ обозначена *монада* точки $x \in L$, т. е. $\mu(x) = \{y \in {}^*L \mid y \approx x\}$.

Операции взятия стандартной части и стандартной внутренности могут быть применены не только ко множествам, но и к соответствиям (точечно-множественным отображениям). Чтобы сделать это достаточно применить операцию к графику отображения, а затем опять перейти к отображению, чей график совпадает с полученным множеством. Более точно, пусть $P : X \Rightarrow Y$ — некоторое внутреннее точечно-множественное отображение и $Gr(P(.))$ — его график в $X \times Y$, где

$$Gr(P(.)) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in P(x)\}.$$

Определим (однозначно!) $\mathrm{si}(P(.))$ и $\mathrm{st}(P(.))$ по формулам

$$Gr[\mathrm{si}(P(.))] = \mathrm{si}[Gr(P(.))] \quad \& \quad Gr[\mathrm{st}(P(.))] = \mathrm{st}[Gr(P(.))].$$

Отметим различие в обозначениях. Здесь $\mathrm{si}(P(x)) = \mathrm{si}P(x)$ означает стандартную внутренность множества $P(x)$, а $\mathrm{si}(P(.))(x)$ — значение отображения $\mathrm{si}(P(.))$ в (стандартной) точке x (аналогично для операции $\mathrm{st}(.)$).

При введении и исследовании понятия равновесия с нестандартными ценами ключевым является определение стандартного бюджетного множества при нестандартных ценах. В качестве совокупности допустимых нестандартных цен примем множество ${}^*\mathcal{Q}$, т. е. $*$-изображение множества допустимых стандартных цен модели $\mathcal{E}$[19]. Функции распределения дохода α_i также заменяются их изображениями:

$$ {}^*\alpha_i(.) : {}^*\mathbb{X} \times {}^*\mathcal{Q} \to {}^*\mathbb{R} \quad \forall\, i \in \mathcal{N}. $$

При этом, так как ${}^*\alpha_i(.)$ фактически являются продолжением на ${}^*\mathbb{X} \times {}^*\mathcal{Q}$ стандартных отображений $\alpha_i(.)$, то $(^*)$ опускаем и в дальнейшем используем символ $\alpha_i(.)$ также для обозначения нестандартных функций распределения дохода.

Далее, по аналогии со стандартным случаем, введем в рассмотрение бюджетные множества агентов с нестандартными ценами, полагая

$$ Bud_i(x,q) = \{x' \in {}^*\mathbb{X} \mid q_i x' \leq \alpha_i(x,q)\}, \quad q \in {}^*\mathcal{Q}, \quad x \in {}^*\mathbb{X}, \quad i \in \mathcal{N}. $$

Здесь $Bud_i(x,q) \subset {}^*\mathbb{X}$, т. е. это множество состоит из нестандартных допустимых состояний экономики. С целью вернуться в стандартную область, вместо $Bud_i(x,q)$ рассмотрим его стандартную часть, которая в данном случае определяется следующим образом:

$$ \mathrm{st}\, Bud_i(x,q) = \{z \in \mathbb{X} \mid \exists\, x' \in Bud_i(x,q) : \ z \approx x'\}. $$

По определению это множество стандартное, хотя и может быть пустым при непустом $Bud_i(x,q)$.

К определению стандартного бюджетного множества при нестандартных ценах (и текущем состоянии экономики) можно прийти и другим путём, полагая в основу конструкции изображение собственно бюджетного отображения. Действительно, рассмотрим точечно-множественное отображение

$$ B_i : \mathcal{Q} \times \mathbb{X} \to 2^{\mathbb{X}}, $$

где

$$ B_i(x,q) = \{x' \in \mathbb{X} \mid q_i x' \leq \alpha_i(x,q)\}, \quad q \in \mathcal{Q}, \quad x \in \mathbb{X}, \quad i \in \mathcal{N}, $$

[19] Напомним, что взаимооднозначное отображение $* : U \to {}^*U$ осуществляет связь между универсумами — стандартной математики U и нестандартной — ${}^*U$, но не является при этом отображением «на».

и возьмём его изображение

$$^*B_i : {}^*\mathcal{Q} \times {}^*\mathbb{X} \to {}^*(2^{\mathbb{X}}).$$

Здесь $^*(2^{\mathbb{X}})$ — это совокупность всех внутренних подмножеств множества $\mathbb{X}$ (см. *Девис* (1980), с. 72, упр. 7). Теперь в качестве нестандартного бюджетного множества можно взять $^*B_i(x, q)$. Однако в силу принципа переноса это множество будет иметь то же «строение», что и представленное выше, т. е. имеет место

$$^*B_i(x, q) = Bud_i(x, q) \quad \forall\, x \in {}^*\mathbb{X},\ \forall\, q \in {}^*\mathcal{Q}.$$

Таким образом, данные подходы эквивалентны, и мы получили удобное обозначение $^*B_i(x, q)$[20] вместо $Bud_i(x, q)$.

На следующем этапе перейдём к рассмотрению предпочтений экономических агентов.

Непрерывность предпочтений в смысле предположения **A3** мотивирует следующее определение. Определим отношение $\succ_i'$ по формуле

$$y \underset{i}{\succ}' x \iff y' \,{}^*\!\underset{i}{\succ} x' \ \ \forall\, y' \approx y, \ \ \forall\, x' \approx x, \ \ y', x' \in {}^*\mathbb{X}.$$

В дальнейшем это отношение и будет использоваться в качестве предпочтений агента i. Отметим, что такого рода переход хорошо согласуется с исходными данными, и, в частности, если предпочтение удовлетворяет предположению **A3′** (открытый график), то определённое выше предпочтение $\succ_i'$, *совпадает с исходным предпочтением* $\succ_i$ (см. ниже утверждение 2.4.1 и следствие 2.4.1).

Символом $\mathcal{P}_i'(.)$ обозначим точечно-множественное отображение, соответствующее введенным предпочтениям $\succ_i'$, т. е. для $\mathcal{P}_i' : \mathbb{X} \Rightarrow \mathbb{X}$ положим

$$\mathcal{P}_i'(x) = \{y \in \mathbb{X} \mid y' \,{}^*\!\underset{i}{\succ} x' \ \forall\, y' \approx y,\ \forall\, x' \approx x,\ y', x' \in {}^*\mathbb{X}\}$$

при $x \in \mathbb{X}$. Отметим, что отображение $\mathcal{P}_i'(.)$ может быть эквивалентным образом определено посредством операции взятия стандартной внутренности $\mathrm{si}(.)$, применённой к точечно-множественному отображению.

[20] Здесь имеется потенциальная возможность для путаницы, ибо тем же методом может быть обозначено изображение множества $B_i(x, q)$. Однако опять, в силу принципа переноса при стандартных x и q, это изображение должно совпадать с множеством $^*B_i(x, q)$.

Действительно, непосредственно из определений легко убедиться в истинности следующего тождества:

$$\mathcal{P}'_i(.) = \mathrm{si}({}^*\mathcal{P}_i(.)).$$

Переход к нестандартным ценам в вышеуказанном смысле приводит к следующему понятию равновесия.

Определение 2.3.1 *Допустимое состояние $x \in \mathbb{X}$ экономики $\mathcal{E}$ называется* простым равновесием *с нестандартными ценами $q \in {}^*\mathcal{Q}$, если выполнены условия*

(i) $x \in \mathrm{st}{}^*B_i(x,q) \quad \forall\, i \in \mathcal{N}$;

(ii) $\mathcal{P}'_i(x) \cap \mathrm{st}{}^*B_i(x,q) = \emptyset \quad \forall\, i \in \mathcal{N}$;

(iii) $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$;

(iv) $q \in \mathcal{A}({}^*\mathcal{Q})$.

Понятие равновесия в смысле определения 2.3.1 существенно расширяет область существования отвечающих ему состояний экономики. В частности, в работах *Danilov, Sotskov* (1990) и *Маракулин* (1988) для модели чистого обмена без внешних влияний (модель рынка) были доказаны теоремы существования *полуравновесия с нестандартными ценами* (в *Danilov, Sotskov* (1990) это сделано несколько в иных терминах меновых стоимостей) — понятия равновесия, в котором балансовые ограничения имеют форму неравенства (в нашем случае это $F(x) \leq F(\omega)$)[21]. Однако данное понятие не решает проблемы существования равновесия при отсутствии условия Слейтера в задаче потребителя, и отвечающие ему состояния могут не существовать во многих экономически содержательных моделях экономики. Например, они не существуют в рассмотренных выше примерах 2.2.1, 2.2.2 абстрактной модели (приведённый анализ несуществования равновесий со стандартными ценами сохраняется и в случае нестандартных цен в силу принципа переноса и полученных выше результатов, характеризующих границу Парето).

[21] Не вдаваясь в содержательную сторону определения полуравновесных состояний, отметим математическую ограниченность полученных в этих работах теорем существования: область их применимости фактически ограничивается моделями рынка, в которых потребительские множества агентов совпадают с положительным ортантом пространства продуктов.

Анализ этих примеров, (а также многих других, в частности рассмотренных в дальнейшем), показывает, что основная причина отсутствия равновесия в смысле определения 2.3.1 состоит в насыщаемости предпочтений экономических агентов, которая может проявляться как на уровне стандартных, так и нестандартных (т. е. бесконечно малых!) величин. Другими словами, при выборе приближённо-стандартного решения в рамках нестандартных ограничений у экономических агентов могут оставаться неизрасходованные стоимости, которые «не работают» в экономике, а имеющийся механизм стоимостного регулирования запрещает их передачу другим агентам (в силу закона Вальраса **A6**). Следовательно, с целью перейти к корректному определению равновесия с нестандартными ценами, необходимо совершить ещё один шаг в модификации стоимостного механизма, а именно, допустить возможность и определить механизм перераспределения неизрасходованных «избыточных» стоимостей от «насыщенных» агентов к «ненасыщенным».

Пусть $\delta \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ — некоторый фиксированный нестандартный вектор, удовлетворяющий условию

$$\delta \geq 0 \iff \delta_i \geq 0 \;\; \forall\, i \in \mathcal{N}.$$

Для данного допустимого набора индивидуальных цен $q \in {}^*\mathcal{Q}$, текущего состояния экономики $x \in {}^*\mathbb{X}$ и каждого $i \in \mathcal{N}$ рассмотрим нестандартные бюджетные множества ${}^*B_i^{\delta}(q,x)$, определяемые посредством ограничения $q_i x' \leq \alpha_i(q,x) + \delta_i$, т. е. положим

$${}^*B_i^{\delta}(q,x) = \{x' \in {}^*\mathbb{X} \mid q_i x' \leq \alpha_i(q,x) + \delta_i\}, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Вектор $\delta \geq 0$, определяющий стоимости, добавленные к правым частям бюджетных ограничений экономических агентов, в дальнейшем условимся называть *схемой перераспределения избыточных стоимостей.*

Определение 2.3.2 *Допустимое состояние $x \in \mathbb{X}$ экономики $\mathcal{E}$ называется* равновесием с нестандартными ценами $q \in {}^*\mathcal{Q}$ *и фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей $\delta \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$, $\delta \geq 0$, если выполнены условия*

(i) $\quad x \in \mathrm{st}\,{}^*B_i^{\delta}(x,q) \;\; \forall\, i \in \mathcal{N};$

(ii) $\quad \mathcal{P}_i'(x) \cap \mathrm{st}\,{}^*B_i^{\delta}(x,q) = \emptyset \;\; \forall\, i \in \mathcal{N};$

(iii) $\quad x \in \mathcal{A}(\mathbb{X});$

(iv) $q \in \mathcal{A}({}^*\mathcal{Q})$.

В дальнейшем для краткости изложения тройку (x, q, δ), удовлетворяющую условиям определения 2.3.2, условимся называть δ-равновесием с нестандартными ценами или просто (нестандартным) δ-равновесием.

Одним из основных инструментов исследования равновесий с нестандартными ценами любого типа является понятие квазиравновесия (точнее, δ-квазиравновесия), определение которого даётся ниже.

Определение 2.3.3 *Допустимое состояние $x \in \mathbb{X}$ экономики $\mathcal{E}$ называется* квазиравновесием *с нестандартными ценами $q \in {}^*\mathcal{Q}$ и фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей $\delta \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$, $\delta \geq 0$, если существует такое нестандартное допустимое состояние $\tilde{x} \in {}^*\mathbb{X}$, что $\tilde{x} \approx x$ и выполняются условия*

(i) $x \in \mathrm{st}^*B_i^\delta(\tilde{x}, q) \quad \forall\, i \in \mathcal{N}$;

(ii) $\mathcal{P}_i'(x) \cap \mathrm{st}^*B_i^\delta(\tilde{x}, q) = \emptyset \quad \forall\, i \in \mathcal{N}$;

(iii) $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$;

(iv) $q \in \mathcal{A}({}^*\mathcal{Q})$.

Из определения 2.3.3 видно, что отличие δ-равновесия от δ-квазиравновесия состоит в том, что если в первом случае доходы агентов в равновесном состоянии определяются посредством самого состояния, (а также цен и вектора δ), то во втором — посредством некоторого бесконечно близкого к равновесному допустимого нестандартного состояния, существование которого постулируется. Именно предположение о наличии ещё одного нестандартного состояния — неясно что бы это могло значить с экономической точки зрения — и не позволяет рассматривать квазиравновесия как истинные равновесия с нестандартными ценами. Польза в рассмотрении квазиравновесий состоит в том, что они представляют из себя в точности предельные точки аппроксимирующих равновесий, существование которых было установлено в предыдущем разделе (теоремы 2.2.1 и 2.2.2). Отметим, что нестандартные квазиравновесия играют примерно ту же роль по отношению к нестандартным равновесиям, что и в стандартном случае, где по тем же причинам — отсутствие условия Слейтера, вводится (другое) понятие квазиравновесия. В дальнейшем обычно доказывается существование квазиравновесных состояний экономики, после чего, используя дополнительные предположения (ресурсная связность, нередуцируемость и т. д.), устанавливаются его равновесные свойства. В случае равновесия с нестандартными ценами механика несколько тоньше, однако общий принцип тот же: нужно доказать существование квазиравновесий, а затем, используя дополнительные предположения, установить совпадение равновесий с квазиравновесиями.

Основным результатом данного раздела является теорема существования квазиравновесий, при установлении которой нам потребуются следующие вспомогательные (элементарные) факты нестандартного анализа.

Утверждение 2.3.1 *Пусть Y и Z являются внутренними подмножествами $*$-изображения топологического пространства $\mathcal{Y}$ и удовлетворяют условию $Y \cap Z = \emptyset$. Тогда*

$$\mathrm{st}Y \cap \mathrm{si}Z = \emptyset,$$

где $\mathrm{st}(.)$ *и* $\mathrm{si}(.)$ *— операции взятия стандартной части и стандартной внутренности.*

Доказательство утверждения 2.3.1. Если $x \in \mathrm{st}Y \cap \mathrm{si}Z$, то $\mu(x) \cap Y \neq \emptyset$ и $\mu(x) \subset Z$, откуда $Y \cap Z \neq \emptyset$. Получили противоречие с условиями утверждения. $\square$

Утверждение 2.3.2 *Пусть $P : X \Rightarrow X$ точечно-множественное отображение в топологическом пространстве X и ${}^*P(.)$ — его $*$-изображение. Тогда для всякого $x \in \mathrm{dom}\,{}^*P(.)$, такого, что существует $\mathrm{st}(x)$, имеет место*

$$\mathrm{si}[{}^*P(.)](\mathrm{st}(x)) \subset \mathrm{si}[{}^*P(x)].$$

Доказательство утверждения 2.3.2. Если x удовлетворяет условиям утверждения, то по определению монады условие $y \in \mathrm{si}[{}^*P(.)](\mathrm{st}(x))$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\mu(\mathrm{st}(x)) \times \mu(y) \subset Gr\,{}^*P = {}^*GrP,$$

откуда ввиду $x \in \mu(\mathrm{st}(x))$ и из определений получаем

$$\{x\} \times \mu(y) \subset {}^*GrP \iff \mu(y) \subset {}^*GrP|_x \iff y \in \mathrm{si}[{}^*P(x)].$$

Здесь символом $^*GrP|_x$ обозначено сечение множества $^*GrP$ в точке x. □

Ниже формулируется наиболее общий вариант теоремы существования нестандартных δ-квазиравновесий применительно к случаю ограниченных внешних влияний (этой теоремы вполне достаточно, ибо тотальные внешние влияния являются частным случаем ограниченных).

Теорема 2.3.1 *Пусть $\mathcal{E}$ удовлетворяет предположениям* **A1**, **A2**, **A3′** *и* **A4**–**A7** *и является экономикой с ограниченными внешними влияниями в следующем смысле. Для некоторого конечного T имеет место $\mathbb{X} = \prod_T \mathbb{X}_t$ и для каждого $i \in \mathcal{N}$ определены $T_i \subset T$, такие, что*

$$\mathcal{P}_i(x) = \mathcal{P}_i^{T_i}(x) \times \prod_{t \in T \setminus T_i} \mathbb{X}_t, \quad \mathcal{P}_i^{T_i}(x) \subset \mathbb{X}_i = \prod_{t \in T_i} \mathbb{X}_t \subset L_i = \prod_{t \in T_i} L_t,$$

причём данные соотношения выполнены для всех $x \in \mathbb{X}$, таких, что $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$. Пусть также выполнено

$$\bigcup_{i \in \mathcal{N}} T_i = T$$

и $0 \in \mathrm{int}|_{L^{eff}}(\mathcal{Q} \cap L^{eff})$, где

$$L^{eff} = \{q = (q_1, \ldots, q_n) \in (L')^{\mathcal{N}} \mid q_i^t = 0 \ \forall\, i \in \mathcal{N}, \forall\, t \in T \setminus T_i\}.$$

Тогда для каждого $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$, такого, что $\varepsilon \gg 0$, существуют δ-квазиравновесия с ценами $q = (q_1, \ldots, q_n) \in {}^*\mathcal{Q} \cap {}^*L^{eff}$ такие, что $\delta = \tau \cdot \varepsilon$ при некотором нестандартном $\tau \geq 0$.

Более того, если $x \in \mathbb{X}$ и $\tilde{x} \in {}^*\mathbb{X}$ — состояния экономики, соответствующие этому δ-квазиравновесию, то найдутся такие $x_i \in {}^*\mathbb{X}$, $x_i \approx x$, удовлетворяющие $q_i x_i \leq \alpha_i(\tilde{x}, q) + \delta_i$ и ${}^*\mathcal{P}_i(x_i) \cap {}^*B_i^{\delta}(\tilde{x}, q) = \emptyset$, что $g(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{x}$, где $g(.)$ — некоторое отображение проектирования, отвечающее закону Вальраса **A6**.

Замечание 2.3.1 При анализе понятия нестандартного δ-равновесия и δ-квазиравновесия, а также теоремы 2.3.1, может сложиться впечатление, что в качестве равновесных могут реализоваться цены $q \approx 0$, что плохо согласуется с содержательной стороной вопроса. Данную трудность легко обойти переходом к однородным (степени 1) по $q \in \mathcal{Q}$ функциям распределения дохода. Действительно, полагая $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \cap L^{eff}$ и предполагая (в силу $0 \in \mathrm{int}|_{L^{eff}} \mathcal{Q}'$), без ограничения общности, что сфера S единичного радиуса в L^{eff} содержится в $\mathcal{Q}'$, рассмотрим снижение функции $\alpha_i(.)$ на $\mathbb{X} \times S$, которую затем продолжим до функции $\alpha_i'(.)$ на $\mathbb{X} \times Q$, определённой по правилу $\alpha_i'(q,x) = ||q||\,\alpha_i(q/||q||, x)$ для $q \neq 0$ и $\alpha_i'(q,x) = 0$ при $q = 0$. В силу свойств α_i (предположения **A5**–**A7**) и по построению эти функции будут непрерывны и удовлетворяют **A6**, **A7**. Поэтому последующие рассуждения (в первую очередь — факт существования равновесия) можно проводить относительно функций α_i'. В дальнейшем можно опять вернуться к исходным функциям дохода, переходя в равновесии (квазиравновесии) от $q \neq 0$ к $q' = q/||q||$ и полагая $\tau' = \tau/||q||$. Можно также заметить, что если цены $q = 0$ реализуются как равновесные относительно α_i', то несложно «вычислить» такой τ, определяющий трансферабельные стоимости δ, что $q = 0$ являются равновесными ценами для того же состояния экономики относительно α_i и новых трансферабельных стоимостей (ибо при ценах равновесия $q = 0$ все агенты находятся в насыщении). □

Доказательство теоремы 2.3.1. Выберем ε из условия теоремы 2.3.1 и найдём такое нестандартное действительное $\sigma > 0$, чтобы было выполнено условие $\sigma\,\varepsilon \approx 0$. Положим $\varepsilon' = \sigma\varepsilon$. Далее воспользуемся теоремой 2.2.2, применяя к которой принцип переноса, заключаем существование ε'-равновесий. Пусть $x^\varepsilon \in {}^*L$, $z_i^\varepsilon \in {}^*\mathbb{X}$, $i \in \mathcal{N} \cup \{0\}$ и $q^\varepsilon \in {}^*\mathcal{Q}$ — нестандартные вектора, выбранные в соответствии с определением 2.2.2, относительно нестандартного вектора $\varepsilon' \approx 0$, где в условиях (i)–(iv) все множества заменены их $*$-изображениями. Далее, в силу **A1**, **A2** и конечномерности пространства L множество $\mathcal{A}(\mathbb{X})$ компактно. Отсюда, используя **A1**, несложно доказать, что норма векторов z_i^ε при $\varepsilon' \approx 0$ ограничена стандартной величиной[22] и, следовательно, в силу конечномерности L и нестандартного критерия компактных множеств (см. теорему 1.3.7), вектора z_i^ε, $i \in \mathcal{N} \cup \{0\}$ околостандартны. Таким образом, существуют $\mathrm{st}(z_i^\varepsilon)$ для всех $i \in \mathcal{N} \cup \{0\}$ и существует $\mathrm{st}(x^\varepsilon)$. Поскольку $||z_i^\varepsilon - x^\varepsilon|| \leq ||\varepsilon'||_1 \approx 0$, то $\mathrm{st}(z_i^\varepsilon) = \mathrm{st}(x^\varepsilon) = \mathrm{st}(z_j^\varepsilon)$ для всех i, j. Теперь положим $q = q^\varepsilon$, $x_i = z_i^\varepsilon$ $i \in \mathcal{N}$, $x = \mathrm{st}(z_i^\varepsilon)$ при любом $i \in \mathcal{N}$, $\tilde{x} = z_0^\varepsilon$ и $\delta = \tau\sigma \cdot \varepsilon$ при нестандартном $0 \leq \tau \leq 1$, существование которого обеспечивает теорема 2.2.2 и принцип переноса. Покажем, что тройка (x, q, δ) является нестандартным δ-квазиравновесием абстрактной модели $\mathcal{E}$.

Действительно, требование (iv) определения 2.3.3, а также свойство $q = q^\varepsilon \in {}^*L^{eff}$ (см. (2.2.10)) обеспечивают теорема 2.2.2 и принцип

[22] Это следует из того факта, что $||z_i^\varepsilon - x^\varepsilon||_2 \leq ||\varepsilon'||_1$ при $x^\varepsilon \in {}^*L$, $F(x^\varepsilon) = F(\omega)$, откуда, используя компактность $\mathcal{A}(\mathbb{X})$ и **A1**, можно заключить, что z_i^ε принадлежат изображению некоторой стандартной компактной окрестности множества $\mathcal{A}(\mathcal{X})$.

переноса. Так как $F(x^\varepsilon) = F(\omega) = \mathrm{st}F(x^\varepsilon) = F(\mathrm{st}(x^\varepsilon))$ (последнее из непрерывности $F(.)$) и $x = \mathrm{st}(x^\varepsilon) = \mathrm{st}(z_i^\varepsilon) \in \mathbb{X}$ (из $z_i^\varepsilon \in \mathbb{X}$ и в силу нестандартного критерия замкнутости), то по определению $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$, что обеспечивает условие (iii). Более того, по построению $z_i^\varepsilon \in {}^*B_i^\delta(\tilde{x}, q)$, откуда $x = \mathrm{st}(z_i^\varepsilon) \in \mathrm{st}{}^*B_i^\delta(\tilde{x}, q)$, что означает истинность (i) для всех $i \in \mathcal{N}$. Наконец рассмотрим требование (ii) определения 2.3.3. Опять, в силу теоремы 2.2.2, пункта (ii) определения 2.2.2 и принципа переноса заключаем

$$ {}^*\mathcal{P}_i(z_i^\varepsilon) \bigcap \{y \in {}^*\mathbb{X} \mid \langle q_i, y\rangle \le \alpha_i(z_0^\varepsilon, q) + \tau\varepsilon_i'\} = \emptyset \quad \forall\, i \in \mathcal{N}. $$

Далее применим утверждение 2.3.1, получая

$$ \mathrm{si}[{}^*\mathcal{P}_i(z_i^\varepsilon)] \bigcap \mathrm{st}\{y \in {}^*\mathbb{X} \mid \langle q_i, y\rangle \le \alpha_i(z_0^\varepsilon, q) + \tau\varepsilon_i'\} = \emptyset \quad \forall\, i \in \mathcal{N}, $$

где по построению

$$ \mathrm{st}{}^*B_i^\delta(\tilde{x}, q) = \mathrm{st}\{y \in {}^*\mathbb{X} \mid \langle q_i, y\rangle \le \alpha_i(z_0^\varepsilon, q) + \tau\varepsilon_i'\}. $$

Наконец, по построению, в силу утверждения 2.3.2 и предположения **A3′** имеем

$$ \mathcal{P}_i'(x) = \mathrm{si}[{}^*\mathcal{P}_i(.)](x) \subset \mathrm{si}[{}^*\mathcal{P}_i(z_i^\varepsilon)], $$

что совместно с предыдущим и доказывает пункт (ii). Теорема 2.3.1 доказана. □

2.4 Структура бюджетных множеств и свойства предпочтений

В настоящем разделе рассматриваются наиболее важные для теории равновесия с нестандартными ценами математические свойства бюджетных множеств разного типа и топологические свойства предпочтений. В рамках *предположения о полиэдральности* (многогранности) множества допустимых состояний экономики будет детально исследована структура бюджетных множеств с нестандартными ценами и схемой перераспределения избыточных стоимостей. Именно множества этого типа фигурируют в базисном для данной теории понятии *равновесия с нестандартными ценами и фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей* (определения 2.3.2, 2.3.3).

2.4.1 Бюджетные множества, условие Слейтера и непрерывные предпочтения

На первоначальном этапе рассматриваются наиболее общие свойства бюджетных множеств и предпочтений, вытекающие собственно из свойств операторов $\mathrm{st}(.)$ и $\mathrm{si}(.)$. Прежде всего, укажем на взаимосвязь между этими операциями, следующую непосредственно из их определения. Напомним, что для всякого *внутреннего* подмножества $A \subset {}^*X$, где X — топологическое пространство, определены следующие подмножества

$$\mathrm{st}A = \mathrm{st}(A) = \{y \in X \mid \mu(y) \cap A \neq \emptyset\}, \quad \mathrm{si}A = \mathrm{si}(A) = \{y \in X \mid \mu(y) \subset A\},$$

где $\mu(x)$ это *монада* точки $x \in L$. Операции $\mathrm{st}(.)$ и $\mathrm{si}(.)$ связаны между собой соотношениями:

$$\mathrm{st}(A) = X \setminus \mathrm{si}({}^*X \setminus A) \quad \& \quad \mathrm{si}(A) = X \setminus \mathrm{st}({}^*X \setminus A). \tag{2.4.15}$$

Нижеследующее утверждение фактически является следствием *нестандартного критерия открытости множества* (см. теорему 1.3.5).

Утверждение 2.4.1 *Пусть $G \subset X$ — подмножество некоторого топологического пространства X. Тогда истинны формулы*

$$\mathrm{st}({}^*G) = \mathrm{cl}(G) \quad \& \quad \mathrm{si}({}^*G) = \mathrm{int}(G), \tag{2.4.16}$$

где $\mathrm{cl}(.)$ и $\mathrm{int}(.)$ означают операции взятия замыкания и взятия внутренности множества, соответственно. В частности, если множество G замкнуто, то $\mathrm{st}({}^*G) = G$, а если оно открыто, то $\mathrm{si}({}^*G) = G$.

Доказательство утверждения 2.4.1. В силу (2.4.15) чтобы доказать (2.4.16), достаточно установить истинность одного из соотношений в (2.4.16). Докажем, что $\mathrm{si}^*G = \mathrm{int}G$.

Чтобы убедиться в истинности включения $\supset$ в последнем соотношении, возьмём любой $g \in \mathrm{int}G$. Поскольку $\mathrm{int}G \subset G$, а $\mathrm{int}G$ является открытым подмножеством в X, содержащем точку g, то по определению монады в точке заключаем

$$\mu(g) \subset {}^*[\mathrm{int}G] \subset {}^*G,$$

что всё доказывает.

Чтобы установить включение $\subset$, выберем любой $g \in \mathrm{si}^*G$. По определению имеем $\mu(g) \subset {}^*G$ и

$$\mu(g) = \cap\{{}^*D \mid D \in \mathcal{W}_g\},$$

где $\mathcal{W}_g$ — совокупность всех открытых подмножеств X, содержащих точку g. Далее, воспользуемся теоремой 1.3.4, которая утверждает, что «монада в стандартной точке содержит некоторое внутреннее подмножество, принадлежащее $*$-изображению совокупности всех открытых окрестностей данной точки», т. е. имеет место $D \subset \mu(g) \subset {}^*G$ для некоторого $D \in {}^*\mathcal{W}_g$. Следовательно, в универсуме нестандартной математики ${}^*U$ истинно

$$\exists\ D \in {}^*\mathcal{W}_g : D \subset {}^*G,$$

откуда, применяя принцип переноса (можно «стереть» звёздочки), заключаем:

$$\exists\ D \in \mathcal{W}_g : D \subset G.$$

Следовательно, $g \in \mathrm{int}G$ — что и требовалось доказать. □

Значение доказанного утверждения для теории равновесия с нестандартными ценами определяет следующее

Следствие 2.4.1 *Пусть $\succ$ бинарное отношение, определённое на множестве $\mathbb{X}$ допустимых состояний абстрактной модели экономики $\mathcal{E}$, удовлетворяющее предположению* **A3′***, т. е. $\succ$ имеет открытый график в $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$. Тогда $\succ = \mathrm{si}({}^*\succ) = \succ'$.*

В условиях этого следствия, комбинируя его с утверждением 2.3.2, заключаем, что если точечно-множественное отображение $P : X \Rightarrow X$ имеет открытый график, то

$$P(\mathrm{st}(x)) \subset \mathrm{si}({}^*P(x)),$$

если $\mathrm{st}(x)$ существует. Тем самым, если нестандартный $x \in {}^*X$ оптимален на некотором внутреннем множестве ${}^*X$ для ${}^*P(.)$, т. е. если ${}^*P(x) \cap {}^*X = \emptyset$, то $\mathrm{st}(x)$ будет оптимален (если существует) для $P(.)$ на X.

Другой важный результат состоит в том, что специфика нестандартных цен может проявиться только в ситуации, когда нарушено условие Слейтера в задаче потребителя при стандартизации нестандартных цен. А именно, если стандартизовать цены (т. е. перейти к их стандартным частям) и трансферабельные стоимости (величины, добавляемые к правым частям бюджетных ограничений) и определить соответвующие стандартные бюджетные множества, то это будут в точности множества, использованные в определении 2.3.3.

Утверждение 2.4.2 *Пусть $X \subset L$ — выпуклое замкнутое подмножество, а $p \in {}^*L$ и $\gamma \in {}^*\mathbb{R}$ таковы, что существуют $\bar{p} = \mathrm{st}(p)$ и $\bar{\gamma} = \mathrm{st}(\gamma)$, и при этом выполнено «условие Слейтера»: существует $\tilde{x} \in X$, такой, что $\bar{p}\tilde{x} < \bar{\gamma}$. Тогда имеет место*

$$\mathrm{st}\{x' \in {}^*X \mid px' \leq \gamma\} = \{x \in X \mid \bar{p}x \leq \bar{\gamma}\}.$$

Доказательство утверждения 2.4.2. Чтобы установить $\subset$, возьмём любой $x' \in {}^*X$, такой, что $px' \leq \gamma$ и существует $\mathrm{st}(x')$. В силу замкнутости X и утверждения 2.4.1 заключаем $\mathrm{st}(x') \in X$. Далее, стандартизуя неравенство, находим $\mathrm{st}(x')\mathrm{st}(p) = \mathrm{st}(px') \leq \mathrm{st}(\gamma)$, что всё доказывает.

Установим включение $\supset$. Пусть $x \in X$ и удовлетворяет $\bar{p}x \leq \bar{\gamma}$. Положим $p = \bar{p} + \Delta p$ и $\gamma = \bar{\gamma} + \Delta\gamma$, где по определению $\Delta p \approx 0$ и $\Delta\gamma \approx 0$. Необходимо найти такой $\Delta x \approx 0$, чтобы $x + \Delta x \in {}^*X$ и при этом $(\bar{p} + \Delta p)(x + \Delta x) \leq \bar{\gamma} + \Delta\gamma$. Раскрывая последнее неравенство находим

$$(\bar{p} + \Delta p)(x + \Delta x) \leq \bar{\gamma} + \Delta\gamma \Longleftrightarrow \bar{p}x + \Delta p \cdot x + \bar{p} \cdot \Delta x + \Delta p \cdot \Delta x \leq \bar{\gamma} + \Delta\gamma,$$

что, с учётом $||\Delta x|| < 1$, будет выполнено, если показать, что имеет место

$$\bar{p} \cdot \Delta x \leq (\bar{\gamma} - \bar{p}x) + \Delta\gamma - \Delta p \cdot x - ||\Delta p||.$$

Последнее эквивалентно

$$\bar{p} \cdot \Delta x \leq (\bar{\gamma} - \bar{p}x) + \rho$$

при $\rho = \Delta\gamma - x \cdot \Delta p - ||\Delta p|| \approx 0$. Далее, при $(\bar{\gamma} - \bar{p}x) > 0$, положим $\Delta x = 0$, а при $(\bar{\gamma} - \bar{p}x) = 0$ воспользуемся условием Слейтера и возьмём любой $\tilde{x} \in X$, удовлетворяющий условию $\bar{p}\tilde{x} < \bar{\gamma}$, и такой $\sigma \approx 0$, $\sigma > 0$, чтобы выполнялось условие $\sigma\bar{p}(\tilde{x} - x) \leq \rho$. В последнем случае положим $\Delta x = \sigma(\tilde{x} - x)$. Поскольку по построению имеем $x + \Delta x \in {}^*X$ и $\bar{p}\Delta x \leq \rho$, то необходимое неравенство доказано, а с ним и утверждение 2.4.2. □

Следствие 2.4.2 *Применительно к концепции δ-квазиравновесия с нестандартными ценами (x, q, δ) в модели экономики $\mathcal{E}$ при предположениях* **A1**, **A5**, *последнее утверждение означает, что если существуют $\bar{q} = (\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n) = \mathrm{st}(q) \in \mathcal{Q}$, $\bar{\delta} = (\bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_n) = \mathrm{st}(\delta)$, и для* *данного $i \in \mathcal{N}$ выполнено условие Слейтера: найдётся такой стандартный $x' \in \mathbb{X}$, что*

$$\bar{q}_i x' < \alpha_i(x, \bar{q}) + \bar{\delta}_i,$$

то «бюджетное» множество $\mathrm{st}^* B_i^{\delta}(\tilde{x}, q)$ *совпадает с*

$$\{y \in \mathbb{X} \mid \langle \bar{q}_i, y \rangle \le \alpha_i(x, \bar{q}) + \bar{\delta}_i\} = \mathrm{st}\{y \in {}^*\mathbb{X} \mid \langle q_i, y \rangle \le \alpha_i(x, q) + \delta_i\}.$$

Здесь $\tilde{x} \approx x$, $\tilde{x} \in {}^*\mathbb{X}$, существование которого постулируется в квазиравновесии (см. определение 2.3.3).

Таким образом, если условие Слейтера выполнено для каждого потребителя, то δ-квазиравновесие с нестандартными ценами превращается в стандартное равновесие $(x, \bar{q}, \bar{\delta})$ с «$\bar{\delta}$-схемой перераспределения избыточных стоимостей»[23].

2.4.2 Бюджетные множества без условия Слейтера

Представляет интерес выяснение структуры бюджетных множеств с нестандартными ценами в случае когда условие Слейтера нарушается, но при этом выполнено предположение о непустоте бюджетных множеств **A7**. Дальнейшее изложение в пределах данного пункта будет посвящено исследованию этого вопроса, ответ на который не является столь же элементарным, как в ранее рассмотренных случаях. Нам потребуется следующая вспомогательная

Лемма 2.4.1 *Для каждого $p \in {}^*\mathbb{R}^m$ найдётся такая (единственная) система ортонормальных стандартных векторов $\{e_1, \dots, e_k\}$ из $\mathbb{R}^m$, что*

$$p = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k, \quad \lambda_j \in {}^*\mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \tag{2.4.17}$$

При этом коэффициенты $\lambda_j > 0$ и удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_{j+1}/\lambda_j \approx 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1.$$

Доказательство леммы 2.4.1. Доказательство проводим по индукции, которую ведём по размерности m пространства, содержащего вектор

[23] В работе *Макаров* (1982) равновесия этого вида в модели типа Эрроу — Дебре без внешних влияний получили название «равновесия с трансферабельными стоимостями».

$p \in {}^*\mathbb{R}^m$. При $m = 1$ утверждение леммы очевидно. Предполагая её истинность при $m \leq l$, докажем для $m = l + 1$.

Предполагая $p \neq 0$, положим $p' = p/{}^*||p||$. Так как точка p' околостандартна, (ввиду компактности единичного шара в конечномерном пространстве и нестандартного критерия компактности), то можно положить $e_1 = \mathrm{st}(p')$ и $\lambda_1 = \langle p, e_1 \rangle$. Далее положим $p'' = p - \lambda_1 e_1$ и определим подпространство $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \langle e_1, x \rangle = 0\}$. Отметим, что ${}^*\mathcal{L}$ будет иметь то же «устройство», что и $\mathcal{L}$ (в силу принципа переноса). Из определения p'' получаем:

$$\langle p'', e_1 \rangle = \langle p, e_1 \rangle - \langle p, e_1 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle = 0,$$

(ибо $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$), откуда $p'' \in {}^*\mathcal{L}$. Однако $\dim\mathcal{L} \leq l$, что в силу индуктивного предположения означает существование ортонормальной системы стандартных векторов $\{e_2, \dots, e_k\}$, таких, что

$$p'' = \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k,$$

причём коэффициенты удовлетворяют $\lambda_{j+1}/\lambda_j \approx 0$, $j = 2, \dots, k-1$. Принимая $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ в качестве искомой системы, получаем

$$p = \lambda_1 e_1 + p'' = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k.$$

Ортонормальность полученной системы стандартных векторов очевидна из построения; нужно установить $\lambda_2/\lambda_1 \approx 0$. Чтобы убедиться в этом, положим $\delta = ||e_1 - p'||^2 \approx 0$ и подсчитаем

$${}^*||p' - \langle e_1, p' \rangle e_1||^2 = \langle p', p' \rangle - 2\langle e_1, p' \rangle^2 + \langle e_1, p' \rangle^2 \langle e_1, e_1 \rangle =$$

$$1 - 2\langle e_1, p' \rangle^2 + \langle e_1, p' \rangle^2 = 1 - \langle e_1, p' \rangle^2 = 1 - (1 - \frac{\delta}{2})^2 = 1 - 1 + \delta - \frac{\delta^2}{4} = \delta(1 - \frac{\delta}{4}).$$

Отсюда заключаем:

$${}^*||p''|| = {}^*||p - \lambda_1 e_1|| = {}^*||p||{}^*||p' - \langle e_1, p' \rangle e_1|| = \varepsilon {}^*||p||,$$

где $\varepsilon = \sqrt{\delta(1 - \delta/4)} \approx 0$. Однако, с другой стороны,

$${}^*||p''|| = {}^*||p - \lambda_1 e_1|| = {}^*||\lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k|| = \sqrt{\lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2}.$$

Отсюда, учитывая $\langle e_1, p' \rangle \approx 1$, получаем

$$0 \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq \frac{\sqrt{\lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2}}{\lambda_1} = \frac{{}^*||p''||}{\lambda_1} = \frac{\varepsilon {}^*||p||}{\langle e_1, p \rangle} = \frac{\varepsilon}{\langle e_1, p' \rangle} \approx 0.$$

Единственность представления нестандартного функционала по формуле (2.4.17) следует из изложенного выше построения системы $\{e_1, \ldots, e_k\}$. Действительно, предполагая наличие другого разложения и повторяя рассуждения, убеждаемся в том, что все параметры этого представления должны совпадать с полученными выше. □

В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма 2.4.2 *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — полиэдральное множество (многогранник) и $p \in {}^*\mathbb{R}^m$. Тогда $\langle p, X\rangle \geq 0$ влечёт $\langle p, {}^*X\rangle \geq 0$.*

Прежде всего отметим, что утверждение леммы ложно если множество X не является полиэдральным. Действительно, рассмотрим например $X = \{x \in \mathbb{R}^2_+ \mid (x_2)^2 \leq x_1\}$ и $p = (1, -\varepsilon)$, $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $x \in X$ получим $px = x_1 - \varepsilon x_2 \geq 0$. Однако для элемента $\tilde{x} = (\varepsilon^2/4, \varepsilon/2) \in {}^*X$ будем иметь $p\tilde{x} = \varepsilon^2/4 - \varepsilon^2/2 < 0$.

Доказательство леммы 2.4.2. По данным леммы множество X состоит из векторов из $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющих некоторой системе линейных неравенств, т. е.

$$X = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d_\alpha x \leq g_\alpha,\ \alpha \in A\},$$

где $d_\alpha \in \mathbb{R}^m$, $d \neq 0$, $g_\alpha \in \mathbb{R}$ и A конечно. Из теории многогранников (основная теорема о представлении) известно, что множество X может быть альтернативным образом описано как сумма некоторого выпуклого многогранника $Y \subset \mathbb{R}^m$ (выпуклая оболочка конечного множества векторов) и выпуклого конуса $Z \subset \mathbb{R}^m$ с конечным числом образующих, т. е. $X = Y + Z$, и для некоторых конечных $B \subset \mathbb{R}^m$, $C \subset \mathbb{R}^m$ имеет место

$$Y = \operatorname{co} B = \{\, \sum_B \beta_b b \mid \forall\, b \in B\ \beta_b \in \mathbb{R},\ \beta_b \geq 0\ \ \&\ \ \sum_B \beta_b = 1\,\}$$

и

$$Z = \operatorname{con} C = \{\sum_C \gamma_c c \mid \forall\, c \in C\ \gamma_c \in \mathbb{R},\ \gamma_c \geq 0\}.$$

Тогда по условию

$$\langle p, X\rangle \geq 0 \iff pb \geq 0\ \ \&\ \ pc \geq 0\ \ \forall\, b \in B,\ \forall\, c \in C.$$

С другой стороны, по принципу переноса ${}^*X = {}^*Y + {}^*Z$, а множества ${}^*Y$ и ${}^*Z$ описаны, как указано выше, при условии замены $\mathbb{R}$ на ${}^*\mathbb{R}$ (т. е.

«навешиваем» звезду на константу $\mathbb{R}$). Но тогда

$$pb \geq 0 \;\;\&\;\; pc \geq 0 \;\; \forall\, b \in B, \; \forall\, c \in C \quad \Longleftrightarrow \quad \langle p, {}^*X \rangle \geq 0.$$

$\square$

Одним из основных результатов настоящего раздела является нижеследующая теорема, описывающая в стандартных терминах структуру бюджетных множеств с нестандартными ценами.

Пусть $p \in {}^*\mathbb{R}^m$ — любой фиксированный нестандартный вектор. Используя лемму 2.4.1 рассмотрим представление p (единственное!) в виде (2.4.17). При фиксированном $\mathrm{w} \in \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^m$ определим следующие множества. Для $t = 1, 2, \ldots, k$ положим

$$B(t, p, \mathrm{w}) = \{y \in X \mid ye_t \leq e_t\mathrm{w}, \;\; ye_j = e_j\mathrm{w}, \;\; j = 1, 2, \ldots, t-1\},$$

для $t = k+1$ определим

$$B(k+1, p, \mathrm{w}) = \{y \in X \mid \;\; ye_j = e_j\mathrm{w}, \;\; j = 1, 2, \ldots, k\},$$

и пусть для $t = 0$

$$B(0, p, \mathrm{w}) = X.$$

Теорема 2.4.1 *Если $X \subset \mathbb{R}^m$ — полиэдральное множество, $\mathrm{w} \in \mathbb{R}^m$ — некоторый стандартный, а $p \in {}^*\mathbb{R}^m$ — любой нестандартный вектор, то*

$$\bar{B}(p) := \mathrm{st}\{x \in {}^*X \mid \langle p, x \rangle \leq \langle p, \mathrm{w} \rangle\} = B(t, p, \mathrm{w}) \tag{2.4.18}$$

при некотором натуральном $t \leq k+1$, причём для всех $t = 1, \ldots, k$ найдётся такой $y \in B(t, p, \mathrm{w})$, что $ye_t < e_t\mathrm{w}$.

Доказательство теоремы 2.4.1. Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{w} = 0$ и $p \neq 0$ (иначе тривиально). Положим $e_0 = 0$. Далее предположим, что существует $t \in \{1, \ldots, k\}$ и такой элемент

$$y \in X(e_0, \ldots, e_{t-1}) := \{y \in X \mid ye_j = 0, \;\; j = 0, 1, \ldots, t-1\},$$

что $e_t y < 0$; и пусть t *наименьший* такой номер. В случае, когда в $\{1, \ldots, k\}$ нет такого номера, положим $t = k+1$. Прежде всего, заметим, что по выбору t (из «минимальности») будем иметь

$$\langle e_j, X(e_0, \ldots, e_{j-1}) \rangle \geq 0, \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, t-1\}.$$

Далее покажем, что для $t \geq 2$ и любого $j = 2, \ldots, t-1$ имеет место

$$\langle \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_j e_j, X \rangle \geq 0.$$

Действительно, возьмём любой стандартный $x' \in X$ и рассмотрим в упорядоченном множестве $\{e_1 x', \ldots, e_j x'\}$ *первый ненулевой* элемент $e_r x'$, если он вообще существует. Так как $r \leq t-1$, то из предыдущего заключаем, что этот элемент *положительный*. Следовательно, ввиду стандартности $e_\xi x'$ и в силу $\lambda_\xi > 0$ & $\lambda_{\xi+1}/\lambda_\xi \approx 0$, $\xi = 1, \ldots, k$, где $\lambda_{k+1} = 0$, заключаем

$$\langle \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_j e_j, x' \rangle = \lambda_r e_r x' + \cdots + \lambda_j e_j x' \geq 0$$

— что и требовалось доказать. Но тогда в силу леммы 2.4.2 заключаем

$$\langle \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_j e_j, {}^*X \rangle \geq 0. \tag{2.4.19}$$

Далее докажем собственно тождество (2.4.18). Для $t = 1$ оно следует из Утверждения 2.4.2. Предположим, $t \in \{2, \ldots, k\}$ и покажем, что $\bar{B}(p) = B(t, p, \mathrm{w})$.

Начнём с проверки включения $\bar{B}(p) \subseteq B(t, p, \mathrm{w})$[24]. С этой целью возьмём произвольный $x \in \bar{B}(p)$ и предположим, что $x \notin B(t, p, \mathrm{w})$. В таком случае по выбору t найдётся такой номер $j \in \{1, \ldots, t\}$, что

$$e_j x > 0, \quad e_\xi x = 0, \quad \xi = 1, \ldots, j-1. \tag{2.4.20}$$

Теперь рассмотрим $\tilde{x} \approx x$, $\tilde{x} \in {}^*X$ и подсчитаем

$$\frac{1}{\lambda_j} p\tilde{x} = \frac{1}{\lambda_j}[\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{j-1} e_{j-1}]\tilde{x} + e_j x + \frac{1}{\lambda_j}[\lambda_{j+1} e_{j+1} + \cdots + \lambda_k e_k]\tilde{x}.$$

В силу (2.4.19) первое слагаемое суммы из правой части неотрицательно (при $j = 1$ оно отсутствует), второе слагаемое превосходит 0 на стандартную величину, а третье пренебрежимо мало. Следовательно, $(1/\lambda_j)p\tilde{x}$ строго положительно, откуда $p\tilde{x} > 0$ для всех $\tilde{x} \in {}^*X$, $\tilde{x} \approx x$, что противоречит выбору $x \in \bar{B}(p)$. Таким образом $\bar{B}(p) \subseteq B(t, p, \mathrm{w})$ доказано.

Докажем включение $\supseteq$ в равенстве (2.4.18). При $t = k+1$ доказывать нечего. Пусть $t \leq k$ и $x \in B(t, p, \mathrm{w})$. Предполагая $\langle x, e_t \rangle = 0$ (напомним,

[24] В этой части, включая лемму 2.4.2, мы следуем рассуждениям А.В. Коновалова. Оригинальное доказательство автора несколько более длинное и громоздкое.

что $\mathrm{w} = 0$), возьмём $x' \in B(t, p, \mathrm{w})$, такой, что $\langle x', e_t \rangle < 0$, и оценим величину $\langle x', p \rangle$:

$$\langle x', p \rangle = \langle x', \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j \rangle = \lambda_t \langle x', e_t \rangle + \sum_{j=t+1}^{k} \lambda_j \langle x', e_j \rangle =$$

$$\lambda_t \left[\langle x', e_t \rangle + \sum_{j=t+1}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda_t} \langle x', e_j \rangle \right].$$

Так как $\lambda_j / \lambda_t \approx 0$ при $j > t$, то должно быть $\langle x', p \rangle / \lambda_t \leq d < 0$ при некотором стандартном d. Теперь положим $x_\mu = (1 - \mu)x + \mu\, x'$, где $\mu \geq 0$ и $\mu \approx 0$. По построению $x_\mu \approx y$, $x_\mu \in {}^*X$, и справедлива оценка

$$\langle x_\mu, p \rangle = (1 - \mu)\langle x, p \rangle + \mu \langle x', p \rangle \leq (1 - \mu) \sum_{j=t+1}^{k} \lambda_j \langle x, e_j \rangle + \mu \lambda_t d.$$

Ясно, что при $\mu = \sqrt{\lambda_{t+1}/\lambda_t} \approx 0$ величина, стоящая в последнем неравенстве справа, будет отрицательна, и, стало быть, $\langle x_\mu, p \rangle \leq 0$. Таким образом, по произвольно заданному $x \in B(t, p, \mathrm{w})$ найден $x_\mu \approx x$, принадлежащий множеству $\{y \in {}^*X \mid \langle p, y \rangle \leq \langle p, \mathrm{w} \rangle\}$, что всё и доказывает. $\square$

Формулировка и особенно анализ доказательства Теоремы 2.4.1 могут породить сомнения в необходимости предположения о полиэдральности (многогранности) множества X и желание заменить его чем-нибудь более слабым, например выпуклостью. Следующий пример показывает, что для выпуклых множеств результат неверен.

Пример 2.4.1 Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^3$ задано формулой

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geq 0 \;\&\; x_2 < 0 \;\vee\; x_2 \geq 0 \;\&\; x_1 \geq x_2^2\}$$

и изображено на рис. 2.4.1.

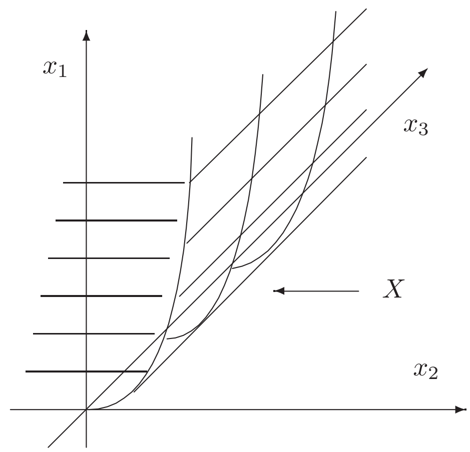

Рис. 2.4.1

Рассмотрим в качестве нестандартных цен вектор вида $p = (1, 0, 0) + 2\varepsilon^2(0, -1, 0) + \varepsilon^4(0, 0, 1)$ при $\varepsilon \approx 0, \ \ \varepsilon > 0$. Положим $\mathrm{w} = 0$ и исследуем структуру множества $\mathrm{st}\{x \in {}^*X \mid \langle p, x\rangle \leq \langle p, \mathrm{w}\rangle = 0\}$. С учётом строения множества X, для околостандартных $x = (x_1, x_2, x_3) \in {}^*X$ получаем

$$px \leq 0 \implies x_1 \lesssim 0 \ \ \& \ \ x_1 \geq 0 \implies \mathrm{st}(x_1) = 0,$$

$$px \leq 0 \implies x_2^2 - 2\varepsilon^2 x_2 \lesssim 0 \implies x_2^2 \lesssim 0 \implies \mathrm{st}(x_2) = 0,$$

$$px \leq 0 \implies \varepsilon^4 x_3 \leq 2\varepsilon^2 x_2 - x_2^2 \leq \max(-x_2^2 + 2\varepsilon^2 x_2) = \varepsilon^4 \implies \mathrm{st}(x_3) \leq 1.$$

Тем самым доказано, что

$$\mathrm{st}\{x \in {}^*X \mid px \leq 0\} \subset \{(y_1, y_2, y_3) \in X \mid y_1 = y_2 = 0, \ \ y_3 \leq 1\}.$$

Чтобы убедиться в истинности обратного включения, достаточно заметить, что для любого $y = (0, 0, y_3)$, удовлетворяющего $y_3 \leq 1$, вектор $y' = (\varepsilon^4, \varepsilon^2, y_3) \approx y$, принадлежит ${}^*X$ и удовлетворяет $py' \leq 0$.

В итоге имеем «бюджетное» множество, строение которого отличается от описанного в теореме 2.4.1. Анализ данного примера может подсказать гипотезы о строении «бюджетных множеств при выпуклом X». Последнее, однако, остаётся открытым вопросом. □

Теорема 2.4.1 не дает непосредственного ответа на вопрос относительно ключевого понятия для теории равновесия — устройства *бюд-*

жетного множества с нестандартными ценами и трансферабельными стоимостями. Тем не менее эта теорема является достаточно мощной, чтобы дать корректный ответ, нужно всего лишь воспользоваться следующим несложным техническим приёмом.

Рассмотрим $(m+1)$-мерное множество $\widehat{X} = X \times \{1\}$ и вектор цен $p^* = (p, -\gamma)$. Тогда проекция множества

$$B^* = \{x \in {}^*\widehat{X} \mid p^*x \leq 0\}$$

на первые m компонент является в точности множеством

$$B(p,\gamma) = \{y \in {}^*X \mid py \leq \gamma\}. \tag{2.4.21}$$

Ясно, что стандартная часть множества B^* может быть описана посредством теоремы 2.4.1 (относительно $\mathrm{w} = 0$), а её проекция на $\mathbb{R}^m$ совпадает со стандартной частью множества $B(p,\gamma)$ (в силу непрерывности проектирующего отображения). Далее, чтобы воспользоваться теоремой 2.4.1, с целью описать $\mathrm{st}B^*$, нужно иметь представление вектора нестандартных цен $(p,-\gamma)$ в виде «разложения по ортонормальному стандартному базису», определённому в лемме 2.4.1 с помощью формулы (2.4.17). Полученное на этом пути описание структуры множества $\mathrm{st}B(p,\gamma)$ имеет довольно громоздкий вид, и мы его опускаем. Однако важен сам принцип описания — это множества типа $B(t,p,\mathrm{w})$, определённые в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$. Из последнего в частности следует, что стандартные части множеств вида (2.4.21) имеют следующие небезынтересные математические свойства.

Следствие 2.4.3 *Если X — полиэдральное множество, то при любом $\gamma \in {}^*\mathbb{R}$ и каждом $y \in \mathrm{st}B(p,\gamma)$ имеет место*

$$\mathrm{st}\{z \in {}^*X \mid \langle p,z\rangle \leq \langle p,y\rangle\} \subset \mathrm{st}B(p,\gamma).$$

Следствие 2.4.4 *Если X — полиэдральное множество, то при любом околостандартном $x \in {}^*X$ имеет место*

$$\mathrm{st}\{z \in {}^*X \mid \langle p,z\rangle \leq \langle p,\mathrm{st}(x)\rangle\} \subset \mathrm{st}\{z \in {}^*X \mid \langle p,z\rangle \leq \langle p,x\rangle\}.$$

Следующий пример показывает, что включение, описанное в следствии 2.4.4, может быть собственным.

Пример 2.4.2 Пусть $X = [0,2] \times [0,2]$, $p = (1, \varepsilon)$, $x = (\varepsilon, 1)$ при $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon > 0$. Так как $\mathrm{st}(x) = (0,1)$ и $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, где $p = 1 \cdot e_1 + \varepsilon \cdot e_2$, то в силу теоремы 2.4.1 должно быть

$$\mathrm{st}\{z \in {}^*X \mid \langle p, z\rangle \le \langle p, \mathrm{st}(x)\rangle\} = \{(y_1, y_2) \in X \mid y_1 = 0,\ y_2 \le 1\} = \{0\} \times [0,1].$$

В то же время

$$\{(y_1, y_2) \in {}^*X \mid y_1 + \varepsilon y_2 \le 2\varepsilon\} \supset \{0\} \times [0,2]$$

и

$$\{(y_1, y_2) \in {}^*X \mid y_1 + \varepsilon y_2 \le 2\varepsilon\} \subset [0, 2\varepsilon] \times [0,2],$$

откуда следует

$$\mathrm{st}\{(y_1, y_2) \in {}^*X \mid y_1 + \varepsilon y_2 \le 2\varepsilon\} = \{0\} \times [0,2].$$

□

Особый интерес в приложениях понятия равновесия с нестандартными ценами и схемой перераспределения избыточных стоимостей к классическим моделям экономики представляет выяснение структуры бюджетных множеств с трансферабельными стоимостями, заданных с помощью функций распределения дохода, имеющих вид скалярного произведения (содержательно — это стоимость исходных запасов, по определению представленных стандартными векторами при нестандартных ценах). Изучение внутренней структуры множеств этого типа является предметом нижеследующих рассмотрений. В отличие от общего случая множеств типа (2.4.21) мы дадим, используя специфику определения, полноценное описание структуры этих множеств в исходных терминах нестандартной цены и заданных трансферабельных стоимостей (а не в терминах расширенного функционала цен, как это было отмечено выше).

Итак, далее нас будет интересовать внутреннее устройство множеств вида

$$\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p, \gamma) = \mathrm{st}\{x \in {}^*X \mid px \le p\mathrm{w} + \gamma\}$$

при некотором нестандартном $\gamma \ge 0$, где $X \subset \mathbb{R}^m$, а w — любой стандартный вектор из $\mathbb{R}^m$. Прежде всего установим следующий вспомогательный результат.

Лемма 2.4.3 *Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^m$ выпукло и замкнуто, а нестандартные вектора $p, p' \in {}^*\mathbb{R}^m$ и величины $\gamma > 0, \gamma' > 0$ удовлетворяют условиям*

$$||p - p'|| \,/\, \gamma \approx 0 \quad \& \quad \gamma/\gamma' \approx 1$$

и найдется такой околостандартный $z \in {}^*X$, *что* $pz \le p\mathrm{w}$. *Тогда*

$$\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,\gamma) = \mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p',\gamma').$$

Доказательство леммы 2.4.3. Сначала установим $\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,\gamma) = \mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,\gamma')$. Предполагая $\gamma' > \gamma$, покажем, что имеет место

$$\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,\gamma') \subset \mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,\gamma).$$

Действительно, пусть $x \in \mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,\gamma')$. По определению найдется такой $y \approx x,\ y \in {}^*X$, что $py \le p\mathrm{w} + \gamma'$. Предположим, что $py > p\mathrm{w} + \gamma$ (иначе нечего доказывать), и рассмотрим $z' = (1-\varepsilon)y + \varepsilon z = y + \varepsilon(z-y)$, где нестандартный вектор z выбран из условия леммы, а $\varepsilon \approx 0$ — из условия $\gamma' = (1+\varepsilon)\gamma$. По построению, $z' \approx y \approx x$, $z' \in {}^*X$, а из предположений следует, что $pz - py < -\gamma$, откуда получаем

$$pz' \le p\mathrm{w} + \gamma' + \varepsilon(z-y)p < p\mathrm{w} + \gamma' - \varepsilon\gamma = p\mathrm{w} + \gamma,$$

что все и доказывает. Теперь установим

$$\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,\gamma') = \mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p',\gamma').$$

Положим $p'' = p - p'$. По условию имеем $\|p''\| \big/ \gamma' \approx 0$, а значит, найдется такой $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon > 0$, что

$$\|p''\| \big/ \varepsilon\gamma' \approx 0.$$

Но тогда для всех околостандартных $y \in {}^*X$ будем иметь $|p''y| \le ||p''|| \cdot ||y|| \le \varepsilon\gamma'$, откуда следует

$$p'y - \varepsilon\gamma' \le py \le p'y + \varepsilon\gamma',$$

что влечёт

$$\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p',\gamma' - \varepsilon\gamma') \subset \mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,\gamma') \subset \mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p',\gamma' + \varepsilon\gamma').$$

Однако в силу доказанного выше, левая и правая части этой цепочки включений равны $\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p',\gamma')$. □

Следующая теорема дает полную характеристику бюджетных множеств с нестандартными ценами и трансферабельными стоимостями.

Используя лемму 2.4.1 и представление (2.4.17), для данного $p \in {}^*\mathbb{R}^m$ поставим в соответствие нестандартной величине $\gamma > 0$ такой $j = 1, \ldots, k+1$, что

$$\gamma/\lambda_{j-1} \approx 0 \quad \& \quad \gamma/\lambda_j \not\approx 0. \tag{2.4.22}$$

В (2.4.22) для определенности полагаем $\lambda_0 = +\infty$ и $\lambda_{k+1} = 0$. Такой $j = j(p, \gamma)$, в силу сказанного и леммы 2.4.1, определен корректно. Положим

$$\mu = \mathrm{st}(\gamma/\lambda_j) \quad \text{при} \quad \gamma/\lambda_j \not\approx \infty.$$

Теорема 2.4.2 *Пусть X — выпуклое полиэдральное множество, $\mathrm{w} \in X$, а $p \in {}^*\mathbb{R}^m$, нестандартный $\gamma > 0$ и номер $j = j(p, \gamma)$ связаны соотношением (2.4.22). Тогда истинна одна из альтернатив:*

(i) $\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p, \gamma) = X$ *при* $\gamma/\lambda_1 \approx +\infty$;

(ii) существует такой $t < j$, что $\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p, \gamma) = B(t, p, \mathrm{w})$, причем найдется такой $y \in X$, что $e_t y < e_t \mathrm{w}$;

(iii) $\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p, \gamma) = \{x \in X \mid e_r y = e_r \mathrm{w},\ r < j\}$ *при* $\gamma/\lambda_j \approx +\infty$;

(iv) $\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p, \gamma) = \{x \in X \mid e_r y = e_r \mathrm{w},\ r < j,\ e_j y \le e_j \mathrm{w} + \mu\}$ *при* $\gamma/\lambda_j \not\approx +\infty$.

Доказательство теоремы 2.4.2. Рассмотрим $(m+1)$-мерное множество $\widehat{X} = X \times \{1\}$, вектор «исходных» запасов $\mathrm{w}^* = (\mathrm{w}, 0)$ и «бюджетное» множество

$$\mathcal{B}^* = \{x \in {}^*\widehat{X} \mid p^* x \le p^* \mathrm{w}^*\}, \tag{2.4.23}$$

где вектор цен p^* определяется по формуле

$$p^* = \begin{cases} (p', -\gamma), & \text{при } \gamma/\lambda_j \approx +\infty, \quad p' = p - \sum\limits_{r=j}^{k} \lambda_r e_r, \\ (p', -\lambda_j \mu), & \text{при } \gamma/\lambda_j \not\approx +\infty, \quad p' = \sum\limits_{r=1}^{j} \lambda_r e_r. \end{cases}$$

По построению, в силу условия $\mathrm{w} \in X$ и Леммы 2.4.3 проекция стандартной части множества (2.4.23) совпадает с $\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p, \gamma)$. Чтобы убедиться в этом прежде всего заметим, что всегда имеет место

$$\mathrm{st}(\mathrm{pr}_{|{}^*\mathbb{R}^m}[\mathcal{B}^*]) = \mathrm{pr}_{|\mathbb{R}^m}[\mathrm{st}\mathcal{B}^*],$$

где $\mathrm{pr}_{|\mathcal{L}}[A]$ означает проекцию множества A на подпространство $\mathcal{L}$. Далее, из построения следует, что для любого $x \in {}^*X$ при $\gamma/\lambda_j \approx +\infty$ имеем $p'x - \gamma = \langle p^*, (x, 1)\rangle$, а для второй альтернативы при $\gamma' = \lambda_j \mathrm{st}(\gamma/\lambda_j)$

выполняется $p'x-\gamma' = \langle p^*, (x,1)\rangle$. Таким образом $\mathrm{st}(\mathrm{pr}_{|^*\mathbb{R}^m}[\mathcal{B}^*])$ совпадает с $\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p',\gamma)$ или $\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p',\gamma')$ соответственно. Поскольку в обоих случаях для данных p, p', γ, γ' выполнены условия Леммы 2.4.3, то мы имеем искомый результат.

Далее, из построения мы можем также написать:

$$p^* = \sum_{r<j} \lambda_r e_r^* + \lambda_j^* e_j^*,$$

где $e_r^* = (e_r, 0)$ при $r < j$, а

$$e_j^* = \begin{cases} (0,-1), & \text{при } \gamma/\lambda_j \approx +\infty, \\ (e_j, -\mu), & \text{при } \gamma/\lambda_j \not\approx +\infty \end{cases}$$

и

$$\lambda_j^* = \begin{cases} \gamma, & \text{при } \gamma/\lambda_j \approx +\infty, \\ \lambda_j, & \text{при } \gamma/\lambda_j \not\approx +\infty. \end{cases}$$

Поскольку система векторов $\{e_r^*\}_{r\le j}$ и коэффициентов $\{\lambda_r^*\}_{r\le j}$ удовлетворяет требованиям леммы 2.4.1 (строго говоря, вектор e_j^* следовало бы отнормировать, однако это несущественно), то применима теорема 2.4.1. Альтернативы (i)–(iii) получаются немедленно. При $\gamma/\lambda_j \not\approx +\infty$ величина $\mu = st(\gamma/\lambda_j) \ge 0$ существует, и в силу теоремы 2.4.1 при $t = j$ в качестве последнего линейного ограничения, определяющего $B(t, p, \mathrm{w})$, будем иметь

$$\big\langle (y,1), (e_j, -\mu)\big\rangle \le \big\langle (\mathrm{w}, 0), (e_j, -\mu)\big\rangle \implies ye_j \le \mathrm{w}e_j + \mu,$$

что все и доказывает. □

Глава 3

Неоклассические модели экономики

3.1 Модель рынка с нестандартными ценами

Модель рынка или, в другой терминологии, экономики чистого обмена, представляет из себя одну из конкретизаций абстрактной модели экономики типа Эрроу — Дебре, рассмотренной в первом разделе предыдущей главы. В рамках этой модели предполагается, что каждый экономический агент является «торговцем» (потребителем), торговцы торгуют (обмениваются) между собой продуктами, номенклатура которых образует множество $\{1, 2, \ldots, l\}$. Торговцы «потребляют» купленные (вымененные) наборы потребительских благ, которые математически представлены как вектора пространства $\mathbb{R}^l$. Будучи ограниченными разного рода институциональными, этическими и просто физическими рамками, допустимые наборы этих благ образуют «потребительские множества», которые потенциально могут быть разными у разных агентов. Итак, пусть $\mathcal{I} = \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество потребителей и $\mathbb{R}^l$ — *пространство продуктов*, а $X_i \subset \mathbb{R}^l$ — *потребительское множество* потребителя i. Тогда множество $\mathbb{X} = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i \subset \mathbb{R}^{ln}$ будет совокупностью всех *допустимых состояний* экономики, где $\mathbb{R}^{ln} = L$ отождествляется с *пространством состояний*. В простейшем варианте экономики обмена предполагается, что у каждого потребителя имеется *вектор исходных запасов*, обозначенный как $\omega_i \in \mathbb{R}^l$, $i \in \mathcal{I}$. Таким образом, заданный набор векторов $(\omega_i)_{i\in\mathcal{I}}$ формализует в модели отношения собственности, и при $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \mathbb{X}$ вектор ω можно принять в качестве «исходного» состояния экономики. В соответствии с интерпретацией достижимыми являются такие состояния экономики, которые представляют из себя допустимые обмены совокупных исходных запасов — $\sum_{\mathcal{I}} \omega_i$, т. е., принимая $F(x) = \sum_{\mathcal{I}} x_i$ при $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in L$, для $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n)$, получаем

$$\mathcal{A}(\mathbb{X}) = \{x \in \mathbb{X} \mid \sum_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} \omega_i\}.$$

С содержательной точки зрения интересы потребителей сосредоточены в сфере индивидуального потребления, поэтому в модели рынка предполагается отсутствие внешних влияний и независимость предпочтений от текущих (рыночных) цен. Таким образом, предпочтения потребителей заданы с помощью точечно-множественных отображений $\mathcal{P}_i : \mathbb{X} \Rightarrow \mathbb{X}$ и удовлетворяют определению *ограниченных внешних влияний* из первого раздела предыдущей главы (см. формулу (2.1.2)) при $T = \mathcal{I}$ и $T_i = \{i\}$, $L_i = \mathbb{R}^l$ для $i \in \mathcal{I}$, где при $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$ имеет место

$$\mathcal{P}_i(x) = \prod_{j=1}^{i-1} X_j \times \mathcal{P}_i^{\{i\}}(x) \times \prod_{j=i+1}^{n} X_j.$$

Для простоты изложения в пределах этого раздела мы будем отождествлять отображения $\mathcal{P}_i(.)$ и $\mathcal{P}_i^{\{i\}} : \mathbb{X} \Rightarrow X_i$.

Модель оснащена *механизмом стоимостного регулирования*, который включает в себя множество *допустимых рыночных цен* $Q \subset \mathbb{R}^l$, а также заданные для каждого $i \in \mathcal{I}$ *функции распределения дохода* — $\alpha_i : Q \to \mathbb{R}$. Таким образом, в отличие от абстрактной модели, где функционируют индивидуальные цены, в модели обмена цены общие, которые являются элементами l-мерного пространства, и, кроме того, функции распределения дохода зависят только от текущих рыночных цен. В простейшем варианте, для заданного набора исходных ресурсов, доход потребителя i определяется в виде $\alpha_i(p) = \langle p, \omega_i\rangle$. От цен $p \in Q$ можно перейти к соответствующему набору индивидуальных цен $q(p) = q = (q_1,\dots,q_n)$, если положить

$$(q_i)^j = \begin{cases} p, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

для $i, j \in \mathcal{I}$. Отметим, что в терминах абстрактной модели этот набор индивидуальных цен является *эффективным* по отношению к заданному выше оператору F, ибо, если $\sum_{\mathcal{I}} x_i = 0$, т. е. $x \in \ker F$, то, так как $\sum_{\mathcal{I}} q_i = (p, p, \dots, p)$, имеем $\langle \sum_{\mathcal{I}} q_i, x \rangle = \sum_{\mathcal{I}} p x_i = \langle p, \sum_{\mathcal{I}} x_i \rangle$, что означает $\ker \sum_{\mathcal{I}} q_i \supset \ker F$.

В краткой форме модель рынка может быть записана в виде пятёрки:

$$\mathcal{E}^m = \langle\, \mathcal{I},\ \mathbb{R}^l,\ \{X_i,\ \mathcal{P}_i(.)\}_{i \in \mathcal{I}},\ \omega,\ Q\, \rangle.$$

Как показывает вышеизложенный комментарий, модель рынка действительно является частным случаем абстрактной модели экономики и, следовательно, в её рамках может быть рассмотрено понятие равновесия с нестандартными ценами, адаптированная версия которого приводится ниже. Однако сначала мы напомним стандартное неоклассическое понятие конкурентного равновесия.

Состояние $x \in \mathbb{X}$ и вектор $p \in Q$ называется *конкурентным, или вальрасовским равновесием модели* $\mathcal{E}^m$, если x сбалансирован, т. е. $\sum_{\mathcal{I}} x_i = \sum_{\mathcal{I}} \omega_i$, и при этом $\mathcal{P}_i(x) \cap B_i(p) = \emptyset$ для всех $i \in \mathcal{I}$. Здесь символом $B_i(p)$ обозначено бюджетное множество потребителя i:

$$B_i(p) = \{y \in X_i \mid py \leq \alpha_i(p)\}.$$

Для данного $p \in {}^*Q$ и каждого $i \in \mathcal{I}$ рассмотрим нестандартные бюджетные множества ${}^*B_i^\delta(p)$, определяемые посредством ограничения $px' \leq \alpha_i(p) + \delta_i$, т. е. положим

$${}^*B_i^\delta(p) = \{x' \in {}^*X_i \mid px' \leq \alpha_i(p) + \delta_i\}, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Заметьте, что в отличие от случая абстрактной модели, бюджетные множества являются подмножеством собственного потребительского множества, а не множества всех допустимых состояний модели. Вектор $\delta \geq 0$, определяющий стоимости, добавленные к правым частям бюджетных ограничений потребителей, будем называть, как и в случае абстрактной модели, *схемой перераспределения избыточных стоимостей.*

Определение 3.1.1 *Допустимое состояние $x \in \mathbb{X}$ экономики $\mathcal{E}^m$ называется равновесием с нестандартными ценами $p \in {}^*Q$ и фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей $\delta \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, $\delta \geq 0$, если выполнены условия:*

(i) $x_i \in \mathrm{st}^*B_i^\delta(p) \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$;

(ii) $\mathcal{P}_i(x) \cap \mathrm{st}^*B_i^\delta(p) = \emptyset \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$;

(iii) $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$.

Тройку (x, p, δ) будем называть δ-равновесием с нестандартными ценами.

Иллюстрацией определения 3.1.1 служит приведённый выше пример 2.2.1 экономики обмена, а также следующий пример.

Пример 3.1.1 Рассмотрим заимствованный из *Маракулин* (1988) пример экономики, в котором нет ни обычного равновесия, ни равновесия и даже полуравновесия с нестандартными ценами, но есть нестандартное равновесие с трансферабельными стоимостями (см. рис. 3.1.1).

В модели имеется два агента и два типа продуктов. При этом

$$X_1 = \{(x^1, x^2) \mid 0 \leq x^j \leq 10,\ j = 1,2\}, X_2 = X_1 \cap \{(x^1, x^2) \mid x^2 \geq 4 - x^1\},$$

полезности заданы по формулам $u_1 = 16 - (x^1 - 4)^2 - (x^2 - 4)^2$ и $u_2 = x^2$, а $Q = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p\| \leq 2\}$ — множество допустимых рыночных цен и $\omega_1 = (1,3), \quad \omega_2 = (2,2)$ — исходные запасы.

При ценах $p = (p^1, p^2)$ таких, что $p^1 \leq 0$, оптимальная реакция 1-го агента такова, что его спрос на первый товар ≥ 4, т. е. больше общего имеющегося в распоряжении количества данного товара. Поэтому ни равновесие, ни даже полуравновесие в этом случае невозможно.

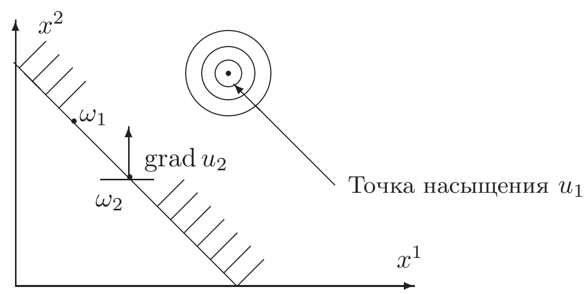

Рис. 3.1.1

При $p^2 \leq 0$ с нереальным запросом товара x^2 выступает 2-й агент: $x_2^2 = 10$. Следовательно, должно быть $p > 0$. При $p^2 \gtrapprox p^1$ оптимальная реакция 2-го агента совпадает с ω_2, а 1-го такова, что $x_1^1 > 1$, т. е. баланс снова недостижим даже в форме неравенства. При $p^1 \gtrapprox p^2$ оптимальная реакция 2-го агента это $(0, x_2^2)$, где $x_2^2 \geq 4$, а оптимальная реакция 1-го такова, что суммарный спрос на второй продукт > 5 и превышает предложение. Последнее следует из того, что все наборы (x_1^1, x_1^2), которые лучше ω_1 и такие, что $x_1^2 \leq 1$ (чтобы выдерживался баланс), находятся при этих ценах вне бюджетного множества 1-го участника. При ценах $p = (1, 1)$ так же как и при нестандартных ценах $p = (1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$, $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon > 0$, спрос на x^2 выше предложения. Цены $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ дают превышение спроса на x^1 над его предложением. Все случаи, когда нестандартность в ценах играет роль, исчерпываются двумя вышеуказанными. В остальных ситуациях бюджетные множества участников при ценах p и $\mathrm{st}p$ совпадают (см. утверждение 2.4.2). Таким образом, при любых ценах из ${}^*Q$ условие сбалансированности нарушается. Однако в этой экономике есть состояние нестандартного равновесия: $x_1 = (2, 2)$, $x_2 = (1, 3)$, реализующееся при ценах $p = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ и трансферабельных стоимостях $\delta = (0, 2\varepsilon)$ (а также при $\delta = (\varepsilon', 2\varepsilon)$ и любых $\varepsilon \approx \varepsilon' \approx 0$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$). Как видим, 1-й агент всего лишь выменял единицу 1-го продукта на единицу 2-го у 2-го агента, при этом оба существенно повысили свою полезность, но для описания этой ситуации потребовались нестандартные цены и трансферабельные стоимости. □

Следующая теорема существования нестандартных δ-равновесий фактически является следствием теоремы 2.3.1 о существовании δ-квазиравновесий с нестандартными ценами в абстрактной модели $\mathcal{E}$.

Для модели рынка $\mathcal{E}^m$ могут быть использованы стандартные предположения **A1**–**A7** и **A3′**. Здесь нужно только уточнить форму закона Вальраса:

A6$^{\mathbf{m}}$ (закон Вальраса) $\sum_{\mathcal{I}} \alpha_i(p) = \langle p, \sum_{\mathcal{I}} \omega_i \rangle$ при любом $p \in Q$.

Отметим также, что в простейшем варианте функций распределения дохода, имеющих вид $\alpha_i(p) = \langle p, \omega_i \rangle$, $p \in Q$, для того чтобы удовлетворить предположению **A7** (непустота бюджетных множеств), достаточно требовать $\omega_i \in X_i$.

Теорема 3.1.1 *Пусть $\mathcal{E}^m$ удовлетворяет предположениям* **A1**, **A2**, **A3′**, **A4**, **A5**, **A6$^{\mathbf{m}}$**, **A7** *и* $0 \in \operatorname{int} Q$. *Тогда для каждого* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$, *такого, что* $\varepsilon \gg 0$, *существуют δ-равновесия, такие, что $\delta = \tau \cdot \varepsilon$ при некотором нестандартном $\tau \geq 0$.*

Доказательство теоремы 3.1.1. Воспользуемся теоремой 2.3.1, применённой к абстрактной модели экономики, в которой $\mathcal{N} = \mathcal{I}$, $\mathbb{X} = \prod_{\mathcal{I}} X_i$,

$$\mathcal{Q} = \{(q_1, \ldots, q_n) \in (L')^{\mathcal{N}} \mid (q_i)^i \in Q \; \forall\, i \in \mathcal{N} \;\&\; (q_i)^j = 0 \; \forall\, i \neq j,\; i, j \in \mathcal{N}\}.$$

Функции дохода $\alpha_i'(.)$ агентов абстрактной экономики определим по формуле

$$\alpha_i'(x, q) = \alpha_i(q_i^i), \quad i \in \mathcal{N}.$$

Тогда для $T_i = \{i\}$ имеем $\bigcup\limits_{\mathcal{N}} T_i = \mathcal{N} = T$ и в данном случае получаем

$$L^{eff} = \{\ q = (q_1, \ldots, q_n) \in (L')^{\mathcal{N}} \mid q_i^j = 0\ \forall\, i \in \mathcal{N},\ \forall\, j \neq i,\ j \in \mathcal{N}\ \}.$$

Следовательно, в силу $0 \in \operatorname{int} Q$ заключаем $0 \in \operatorname{int}|_{L^{eff}}(\mathcal{Q} \cap L^{eff})$, что заканчивает проверку условий теоремы 2.3.1. Пусть (x, q, δ) — соответствующее δ-квазиравновесие абстрактной модели (см. определение 2.3.3). Прежде всего, рассмотрим условие (iv) эффективности равновесных цен $q \in \mathcal{A}({}^*\mathcal{Q})$. Из определения $F(.)$ (см. выше) несложно заключить, что для всех $q' = (q'_1, \ldots, q'_n) \in (L')^n$ имеет место

$$\ker \sum_{\mathcal{N}} q'_i \supset \ker F(.)\ \ \&\ \ q' \in L^{eff} \iff$$

$$\exists\, p \in \mathbb{R}^l :\ p = (q'_i)^i\ \ \&\ \ (q'_i)^j = 0\ \ \forall\, i \neq j,\ i, j \in \mathcal{N}.$$

Следовательно, из принципа переноса и по определению $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ заключаем существование такого $p \in {}^*Q$, что

$$p = (q_i)^i\ \ \forall\, i \in \mathcal{N}\ \ \&\ \ (q_i)^j = 0\ \ \forall\, i \neq j,\ i, j \in \mathcal{N}.$$

Наконец, из определений и того, что в модели рынка функции дохода потребителей не зависят от текущего состояния экономики, легко заключить, что тройка (x, p, δ) является δ-равновесием с нестандартными ценами модели $\mathcal{E}^m$. □

Замечание 3.1.1 Теорему 3.1.1 можно применить к чисто стандартному случаю, с целью определить условия, при которых существуют обычные конкурентные равновесия. Действительно, это в точности те условия, которые обеспечивают выполнение условия Слейтера для $\alpha_i(.)$ — при «потенциально равновесных» (например, всех!) $p \in Q$, таких, что для $p \neq 0$ имеет место

$$\exists\ y \in X_i :\ py < \alpha_i(p), \quad i \in \mathcal{I}.$$

Дополнительно, с тем чтобы избавиться от трансферабельных стоимостей, обычно используется предположение о локальной ненасыщаемости предпочтений в области всех достижимых состояний экономики:

$$\forall\, x \in \mathcal{A}(\mathbb{X}), \quad \forall\, i \in \mathcal{I} \quad x_i \in \operatorname{cl} \mathcal{P}_i(x).$$

Чтобы убедиться в этом, прежде всего укажем, что при условии ненасыщаемости цены $p = 0$ не могут реализоваться как равновесные, ибо тогда ${}^*B_i^\delta(p) = X_i$ и нарушено условие (ii) определения 3.1.1. Следовательно, $p \neq 0$, $p \in {}^*Q$ и, так как тогда можно считать функции $\alpha_i(.)$ однородными по p степени 1 (см. замечание 2.3.1), то можно предполагать, что цены равновесия удовлетворяют ${}^*||p|| = 1$ (достаточно разделить бюджетное ограничение на ${}^*||p||$ и рассмотреть новые трансферабельные стоимости $\delta_i' = \delta_i/{}^*||p||$). Далее, используя утверждение 2.4.2, заключаем

$$\mathrm{st}{}^*B_i^\delta(p) = \{y \in X_i \mid y\bar{p} \leq \alpha_i(\bar{p}) + \bar{\delta}_i\},$$

где $\bar{p} = \mathrm{st}(p)$, $\bar{\delta}_i = \mathrm{st}(\delta_i)$. Теперь, в силу (iii) и *локальной ненасыщаемости* предпочтений для равновесных $(x, \bar{p}) \in \mathbb{X} \times Q$ находим $\bar{x}_i\bar{p} = \alpha_i(\bar{p}) + \bar{\delta}_i$ для всех $i \in \mathcal{I}$. Суммируя эти неравенства и используя закон Вальраса **A6$^{\mathbf{m}}$**, в силу $\sum_{\mathcal{I}} \bar{x}_i = \sum_{\mathcal{I}} \omega_i$, находим $\sum_{\mathcal{I}} \bar{\delta}_i = 0$, что при $\bar{\delta}_i \geq 0$ возможно только при $\bar{\delta}_i = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$. Таким образом $(\bar{x}, \bar{p})$ — стандартное равновесие модели $\mathcal{E}^m$. □

Далее, рассмотрим модель $\mathcal{E}^m$ применительно к случаю, в котором функции дохода принимают наиболее естественный вид $\alpha_i(p) = \langle p, \omega \rangle$, а также при полиэдральных потребительских множествах X_i. В данных условиях возможно совместное использование теорем 3.1.1, 2.4.2. Теорема 2.4.2 характеризует структуру бюджетных множеств, по отношению к которым и формулируется понятие δ-равновесия в модели $\mathcal{E}^m$. Теперь, в силу произвола в выборе нестандартного вектора $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \gg 0$ — это вектор, задающий в теореме 3.1.1 вектор δ в виде $\delta = \tau\varepsilon$, $\tau \geq 0$, без ущерба к содержательной стороне вопроса можно считать стандартным и, более того, конкретизировать (например положить $\varepsilon = (1, 1, \ldots, 1)$, постулируя тем самым равномерную схему перераспределения избыточных стоимостей $\delta = (\tau, \tau, \ldots, \tau)$). В таком случае величину τ можно рассматривать как своего рода цену на избыточные финансовые ресурсы и, таким образом, вектор (p, τ) можно понимать как нестандартный расширенный вектор цен. Сказанное выше в данных условиях можно положить в основу понятия «обобщенного равновесия» в модели $\mathcal{E}^m$, по сути очень близкого к понятию равновесия в меновых стоимостях (а также и обобщённого равновесия) по Данилову – Сотскову (см. *Danilov, Sotskov* (1990)). В силу теорем 3.1.1 и 2.4.2 отвечающие этому понятию состояния экономики будут существовать только если $\omega_i \in X_i$ и при прочих других «естественных» предположениях **A2**, **A3′**[1] и **A4** (ограниченность сбалансированных состояний,

[1] Напомним, что в силу замечания 2.2.1 при полиэдральных потребительских множествах или порядковых предпочтениях предположение **A3′** эквивалентно более слабому требованию **A3**.

открытость графика предпочтений, а также их выпуклость и иррефлексивность). Итак, перейдём к определению (одному из возможных вариантов) обобщённого равновесия.

Любой *упорядоченный набор* ортонормальных векторов $\{e_j\}_{j=1}^{j=k}$, $k \leq l$, связанное с ним число $h \geq 0$ и вектор $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta) \gg 0$ назовём *β-обобщённой ценой* рынка. Набору $\{e_j\}_{j=1}^{j=k}$ сопоставим матрицу P, строка j которой совпадает с вектором e_j. Вектору $x \in \mathbb{R}^l$ поставим в соответствие k-мерный вектор стоимостных оценок Px. Теперь предположим, что некоторый потребитель имеет «доходы», формализованные посредством k-мерного вектора γ. Тогда его потребительский выбор $x \in \mathbb{R}^l$ должен удовлетворять «бюджетному ограничению» $\mathrm{P}x \underset{leks}{\leq} \gamma$, где посредством $\underset{leks}{\leq}$ обозначено лексикографическое упорядочивание в $\mathbb{R}^k$.[2] Таким образом, в силу свойств $\underset{leks}{\leq}$ введение обобщённой цены и связанный с ним способ стоимостного сравнения потребительских наборов, постулируют иерархию стоимостных оценок, отвечающую упорядочению, заложенному в определении обобщённой цены посредством набора векторов $\{e_j\}$. В модели рынка, имеющийся у потребителя, вектор доходов естественно положить равным набору стоимостных оценок, полученных из имеющихся у него исходных ресурсов. Тем самым логично считать, что потребительский выбор торговца i удовлетворяет ограничению $\mathrm{P}x \underset{leks}{\leq} \mathrm{P}\omega_i$ для $x \in X_i$. Однако множества вида

$$\{x \in X_i \mid \mathrm{P}x \underset{leks}{\leq} \mathrm{P}\omega_i\}$$

обладают плохими математическими свойствами и, в частности, могут быть незамкнуты (что может повлечь невозможность решить задачу потребителя). Более того, нетрудно видеть, что в общем случае, даже при «обычных» ценах, в силу закона Вальраса все рынки продуктов могут быть одновременно сбалансированы (в форме равенства) только при наличии какого-либо механизма перераспределения избыточных стоимостей (в соответствии с некоторой схемой перераспределения). Оказывается, что в случае обобщенного стоимостного регулирования достаточно использовать этот механизм только на последнем, k-м иерархическом уровне. Этот механизм вводится с помощью вектора $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \gg 0$, определяющего пропорции (доли) потребителей в общем объёме избыточной стоимости k-го уровня. В итоге в качестве ключевого понятия *бюджетного множества с обобщённой ценой* при-

[2] Если $x, y \in \mathbb{R}^k$, то $x \underset{leks}{\leq} y \Longleftrightarrow x = y$ или $\exists r \leq k: \ x_j = y_j \ \forall j \leq r \ \& \ x_{r+1} < y_{r+1}$.

мем множества вида

$$\mathcal{B}_i^\delta(e_1,\ldots,e_k)=\mathrm{cl}\{x\in X_i \mid \mathrm{P}x \underset{leks}{\leq} \mathrm{P}(\omega_i+\delta_i\, e_k)\}, \tag{3.1.1}$$

где $\delta_i = h\,\beta_i$, $i\in\mathcal{I}$, т. е. мы полагаем $\delta = h\,\beta$. Теперь, чтобы ввести понятие β-обобщённого равновесия, достаточно в определении 3.1.1 заменить нестандартный вектор цен p обобщённой ценой $(e_1,\ldots,e_n,h)$, предположить стандартность $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)=h\cdot\beta$ и заменить в условиях $(i)-(iii)$ множества $\mathrm{st}^*B_i^\delta(p)$ на $\mathcal{B}_i^\delta(e_1,\ldots,e_n)$.

Бюджетным множествам, заданным формулой (3.1.1), можно дать и другую, более привычную характеризацию. Для каждого $i\in\mathcal{I}$ определим номер $t(i)\leq k$ по следующему правилу: положим $t(i)=k$, если функционалы e_j опорны к X_i в точке ω_i для всех $j<k$; в противном случае определим такой $t(i)<k$, что все e_j опорны в ω_i к X_i при $j<t(i)$ и при этом существует такой $y\in X_i$, что $\langle e_{t(i)},y\rangle<\langle e_{t(i)},\omega_i\rangle$. Теперь, анализируя свойства $\underset{leks}{\leq}$ и формулу (3.1.1), несложно убедиться в том, что при $t(i)<k$ имеет место

$$\mathcal{B}_i^\delta(e_1,\ldots,e_n)=\{x\in X_i \mid e_jx=e_j\omega_i,\ j<t(i)\ \ \&\ \ \langle e_{t(i)},x\rangle\leq\langle e_{t(i)},\omega_i\rangle\}, \tag{3.1.2}$$

а при $t(i)=k$ имеем

$$\mathcal{B}_i^\delta(e_1,\ldots,e_n)=\{x\in X_i \mid e_jx=e_j\omega_i,\ j<k\ \ \&\ \ \langle e_k,x\rangle\leq\langle e_k,\omega_i\rangle+\delta_i\}. \tag{3.1.3}$$

Имеется ещё одна возможность найти номер $t(i)$, определяющий «длину цепочки линейных ограничений» в структуре обобщённого бюджетного множества. Именно, для $i\in\mathcal{I}$ определим k-мерный вектор γ_i как минимум оператора $\mathrm{P}:\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^k$ на множестве X_i, где на $\mathbb{R}^k$ рассматривается лексикографическое упорядочение $\underset{leks}{\leq}$. Отметим, что при многогранном X_i этот минимум всегда существует[3]. Далее сравним вектор γ_i с вектором $\mathrm{P}(\omega_i+\delta_i\,e_k)$. Очевидно, что $\gamma_i\underset{leks}{\leq}\mathrm{P}(\omega_i+\delta_i\,e_k)$. Теперь в качестве $t(i)$ нужно взять минимальный номер компоненты, для которой имеет место строгое неравенство $(\gamma_i)^j<(\mathrm{P}(\omega_i+\delta_i\,e_k))^j$. Из сказанного в частности следует, что обобщённое бюджетное ограничение $\mathrm{P}x\underset{leks}{\leq}\mathrm{P}(\omega_i+\delta_i\,e_k)$ удовлетворяет *обобщённому условию Слейтера* на

[3] Убедиться в этом можно по-разному, но проще всего рассмотреть нестандартный функционал $p=\lambda_1\,e_1+\lambda_2\,e_2+\cdots+\lambda_k\,e_k$, где $\lambda_1=1$ и $\lambda_{j+1}/\lambda_j\approx 0\ \&\ \lambda_{j+1}>0$ для всех $j=1,2,\ldots,k-1$. Теперь, поскольку $X_i=\mathrm{co}\,A$ при некотором конечном $A\subset\mathbb{R}^l$, то у нестандартной задачи оптимизации $px\to\min$, $x\in{}^*X_i$ имеется решение $\bar a$ в (стандартном) множестве A. Очевидно, что $\mathrm{P}\bar a$ реализует искомый минимум оператора P на X_i.

X_i, если только $\delta_i > 0$: существует $y \in X_i$, такой, что $\mathrm{P}y \underset{leks}{<} \mathrm{P}(\omega_i + \delta_i\, e_k)$. В случае $\delta_i = 0$ условие Слейтера может нарушиться, причём только если $\langle e_j, X_i \rangle \geq \langle e_j, \omega_i \rangle$ для всех $j = 1, 2, \ldots, k$.

Итак, если резюмировать сказанное в комментариях к понятию обобщённого равновесия, то можно заключить, что это понятие полностью совпадает с понятием равновесия с нестандартными ценами и схемой распределения избыточных стоимостей, заданной с помощью *стандартного* вектора $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \gg 0$, определяющего трансферабельные стоимости по правилу $\delta = \tau \cdot \beta$, где *нестандартный* $\tau \geq 0$.

Действительно, каждому обобщённому равновесию можно поставить в соответствие нестандартный вектор цен $p = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_k e_k \in {}^*Q$, где коэффициенты $\lambda_j \in {}^*\mathbb{R}$ удовлетворяют единственному требованию — $\lambda_{j+1}/\lambda_j \approx 0$, $\lambda_j > 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, k$ $(\lambda_{k+1} = 0)$, и набор *нестандартных* трансферабельных стоимостей δ_i из условия $\delta_i/\lambda_k \approx \mu_i = h\beta_i$ (т. е. полагаем $\tau = \lambda_k\, h$). Тогда в силу теоремы 2.4.2, где нужно принять $\mathrm{w} = \omega_i$, $\gamma = \delta_i$ при $j(p, \gamma) = k$ заключаем, что $\mathrm{st}^* B_i^{\delta}(p)$ является множеством, определяемом в (3.1.2), (3.1.3), и, следовательно, совпадает с $\mathcal{B}_i^{\delta}(e_1, \ldots, e_k)$. Таким образом, каждому обобщённому равновесию отвечает нестандартное, удовлетворяющее определению 3.1.1.

Чтобы убедиться в обратном, предположим, что задано некоторое нестандартное δ-равновесие, такое, что $\delta = \tau\beta$, где $\beta \gg 0$ — некоторый заданный стандартный вектор и $\tau \geq 0$. Чтобы охарактеризовать бюджетные множества, вновь воспользуемся теоремой 2.4.2. Отметим, что номер j, фигурирующий в этой теореме в описании структуры множеств $\mathcal{B}^{\omega_i}(p, \delta_i) = \mathrm{st}^* B_i^{\delta}(p)$, является общим для всех $i \in \mathcal{I}$ (ибо $\delta_i/\delta_{i'} = \beta_i/\beta_{i'} \not\approx 0$ при $\tau \neq 0$), т. е. $j = j(p, \delta_i) = j(p, \delta_{i'}) = j(p, \tau)$, при любых $i \neq i'$. Теперь, при $\tau/\lambda_j \not\approx \infty$, выберем в качестве обобщённой цены набор функционалов $\{e_r\}_{r=1}^{r=j}$, тот же вектор β, а в качестве h возьмём $\mathrm{st}(\tau/\lambda_j)$. В случае $\tau/\lambda_j \approx \infty$ в качестве обобщённой цены примем $\{e_r\}_{r=1}^{j-1}$, β и $h = 0$. В силу теоремы 2.4.2, формул (3.1.2), (3.1.3) и по определению имеем искомый результат.

Прежде чем сформулировать теорему существования обобщённых равновесий, которая является, таким образом, следствием теоремы 3.1.1 и 2.4.2, напомним, что при полиэдральных X_i, $i \in \mathcal{I}$ и **A4** предположение **A3** — слабая непрерывность предпочтений — эквивалентно предположению **A3′** — открытость графика предпочтений, см. замечание 2.2.1.

Теорема 3.1.2 *Пусть $\mathcal{E}^m$ удовлетворяет* **A2**–**A4**, *потребительские множества X_i полиэдральны, $\omega_i \in X_i$, а функции дохода определяются* *как* $\alpha_i(p) = \langle p, \omega_i \rangle$*,* $i \in \mathcal{I}$*. Тогда, если* $0 \in \mathrm{int}Q$*, то при любом* $\beta \gg 0$ *существуют обобщённые* β*-равновесия.*

Иерархия стоимостных оценок, положенная в основу понятия обобщённого равновесия, индуцирует иерархическое расслоение экономических агентов, что позволяет дать этому понятию следующую интерпретацию (см. также *Danilov, Sotskov* (1990)). Действительно, в состоянии обобщённого равновесия потребителей экономики $\mathcal{E}^m$ можно расклассифицировать по признаку принадлежности бюджетных множеств $\mathcal{B}_i^\delta(e_1, \ldots, e_k)$ к тому или иному типу, определяемому соотношениями (3.1.2), (3.1.3). Точнее, для $t = 1, \ldots, k$ определим $A_t \subset \mathcal{I}$ как множество $A_t = \{i \in \mathcal{I} \mid t = t(i)\}$, где номер $t(i)$, определённый выше, отвечает номеру первого ограничения, удовлетворяющего условию Слейтера. Далее, в пространстве продуктов $\mathbb{R}^l$ всегда можно перейти к другому ортонормальному базису, обладающему тем свойством, что первые $k \le l$ базисных векторов совпадают с векторами $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Содержательно последнее означает переход от отдельных продуктов к «продуктовым корзинам». В таком случае можно предполагать, без ограничения общности, что вектора $e_1, e_2, \ldots, e_k$ изначально совпадают с единичными ортами исходного пространства продуктов. Теперь тот факт, что $i \in A_t$ можно понимать так, что данный агент обладает ненулевыми ресурсами продукта t (в количестве $(\omega_i)_t - (\gamma_i)_t$, где вектор γ_i был определён выше), которые могут быть реализованы (проданы) на t-м рынке. Имеющаяся иерархия стоимостных оценок предполагает, что при $i \in A_t$, $t < k$ потребитель i может потреблять любое количество продуктов с номерами $t+1, \ldots, l$, или, в другой терминологии, обменять сколь угодно малое количество продукта t на любое (сколь угодно большое) количество продукта более низкого иерархического уровня. Наличие механизма перераспределения избыточных стоимостей означает, что если $i \in A_t$ вдруг решит потреблять продукт t в количестве меньшем, чем имеется у него в наличии (т. е. если он достиг насыщения), то неизрасходованный остаток этого ресурса должен быть передан агентам данного и более низких уровней. Последнее очевидно приводит к тому, что агенты более низких уровней, получив ненулевое количество ресурса t, поднимаются на уровень t. В особом случае, когда потребительские множества совпадают с положительным ортантом, в пространстве продуктов можно не переходить к новому базису, а ситуацию интерпретировать как расслоение общего рынка продуктов на «подрынки», на каждом из которых ходит собственная «валюта», причём так, что агенты данного рынка всегда имеют доступ на рынки более низкого уровня и способны «обменять» единицу своей валюты на любое количество валюты «более низкого качества». При этом существует строгий запрет на вход на рынок более высокого уровня. Данилов — Сотсков в *Danilov, Sotskov* (1990) указанную ситуацию описывают в терминах меновых стоимостей, допуская возможность пропорциям обмена обращаться в 0 или ∞.

3.2 Экономики с производством – модель Эрроу – Дебре

Неоклассическая модель децентрализованной экономики типа Эрроу — Дебре предполагает наличие двух секторов — потребительского и производственного. Производственный сектор описывается конечным множеством фирм (более общо — производителей), каждая из которых характеризуется посредством собственного производственного (технологического) множества, описывающего производство в терминах «потоков», и формально является подмножеством пространства продуктов. Цель фирмы, являющейся по определению акционерным обществом, состоит в максимизации прибыли (математически выраженной как скалярное произведение вектора цен на технологический вектор), которая затем распределяется среди «пайщиков» (акционеров). Потребительский сектор включает в себя конечное множество потребителей, описанных так же, как в модели рынка. Единственное отличие состоит в способе определения функций распределения дохода: потребители формируют свой доход из двух источников — от продажи имеющихся у них в наличии исходных ресурсов, а также из дивидендов по акциям фирм, которые предполагаются полностью распределёнными между потребителями. В краткой математической форме модель представлена следующей шестёркой:

$$\mathcal{E}^{AD} = \langle\, \mathcal{I},\ \mathcal{J},\ \mathbb{R}^l,\ \{X_i,\ \mathcal{P}_i,\ \omega_i,\ \theta_i\}_{i\in\mathcal{I}},\ \{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}},\ Q\,\rangle.$$

Здесь $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество номеров потребителей, $\mathcal{J} = \{n+1, n+2, \ldots, n+r\}$ — номера производителей; $\mathbb{R}^l$ — *пространство продуктов*, где $\{1, 2, \ldots, l\}$ — их номенклатура; $X_i \subset \mathbb{R}^l$ — *потребительское множество* потребителя i, где $x_i \in X_i$ — его *потребительские планы*, а $Y_j \subset \mathbb{R}^l$ — *производственное (технологическое) множество* фирмы j, где $y_j \in Y_j$ — *производственные планы* этой фирмы. В данном случае $\mathbb{X} = \prod_{\mathcal{I}} X_i \times \prod_{\mathcal{J}} Y_j \subset \mathbb{R}^{l(n+r)}$ является множеством *допустимых состояний*, где $\mathbb{R}^{l(n+r)} = L$ играет роль *пространства состояний*. Каждый потребитель характеризуется также вектором *исходных ресурсов* $\omega_i \in \mathbb{R}^l$ и отношением предпочтения $\mathcal{P}_i : \mathbb{X} \Rightarrow X_i$, $i \in \mathcal{I}$. Таким образом, как и в случае модели рынка, предполагается, что в модели Эрроу — Дебре *отсутствуют внешние влияния*. Величины $\theta_i^j \geq 0$ — компоненты вектора $\theta_i = (\theta_i^{n+1}, \ldots, \theta_i^{n+r})$ — указывают на *долю* (в акциях, дивидендах и т. д.) потребителя i в j-м производстве. Из контекста ясно, что они должны удовлетворять условию $\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i^j = 1$ для всех $j \in \mathcal{J}$.

Механизм стоимостного регулирования в модели $\mathcal{E}^{AD}$ определяется посредством множества *допустимых рыночных цен* $Q \subset \mathbb{R}^l$ и функций распределения дохода $\alpha_i : \mathbb{X} \times Q \to \mathbb{R}$, определённых по формуле

$$\alpha_i(x, y, p) = \alpha_i(y, p) = \langle p, \omega_i \rangle + \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_i^j \langle p, y_j \rangle, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Первое слагаемое в доходах потребителя i представляет стоимость его исходных ресурсов, а второе, поскольку $\langle p, y_j \rangle$ следует понимать как прибыль полученную от реализации производственного плана y_j при ценах p (ибо y_j описывает технологию в терминах потоков), является совокупным (суммарным) дивидендом, полученным потребителем из производственного сектора (заметьте, что эта величина может быть отрицательной). Отметим, что в модели $\mathcal{E}^{AD}$ постулируется определённая форма поведения производителей, вытекающая из интересов потребителей — владельцев акций, реализующая принцип максимизации прибыли при экзогенно заданных ценах p.

В *стандартной постановке* в качестве равновесия понимается такая тройка $(x, y, p) \in \mathbb{X} \times Q$ (совокупность всех потребительских и производственных планов и отвечающий им вектор цен), что выполнено условие баланса

$$\sum_{\mathcal{I}} x_i = \sum_{\mathcal{J}} y_j + \sum_{\mathcal{I}} \omega_i,$$

производители максимизируют доход —

$$py_j \geq \langle p, Y_j \rangle \;\;\&\;\; y_j \in Y_j \;\; \forall\, j \in \mathcal{J},$$

а потребители решают «задачу потребителя» — имеет место $x_i p \leq \alpha_i(y, p)$ и при этом

$$\mathcal{P}_i(x) \cap B_i(y, p) = \emptyset \;\; \forall\, i \in \mathcal{I},$$

где по определению

$$B_i(y, p) = \{y \in X_i \mid px_i \leq \alpha_i(y, p)\} \; -$$

бюджетное множество потребителя i.

Чтобы перейти к понятию равновесия с нестандартными ценами, прежде всего необходимо уточнить используемое здесь понятие бюджетного множества. Для данного $i \in \mathcal{I}$, заданных $p \in {}^*Q$, $(x, y) \in \mathbb{X}$ и нестандартного $\delta_i \geq 0$ в качестве *нестандартного бюджетного множества с трансферабельной стоимостью* δ_i примем подмножество ${}^*X_i$, элементы которого удовлетворяют ограничению $px' \leq \alpha_i(y, p) + \delta_i$. Положим

$$ {}^*B_i^\delta(y, p) = \{x' \in X_i \mid px' \leq \alpha_i(y, p) + \delta_i\}, \quad i \in \mathcal{I}. $$

Определение 3.2.1 *Состояние экономики $(x, y) \in \mathbb{X}$ и нестандартный вектор цен $p \in {}^*Q$ называется равновесием модели $\mathcal{E}^{AD}$ с фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$, $\delta \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, $\delta \geq 0$, если выполнены условия*

(i) $x_i \in \mathrm{st}\,{}^*B_i^\delta(y, p) \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$;

(ii) $\mathcal{P}_i(x) \cap \mathrm{st}\,{}^*B_i^\delta(y, p) = \emptyset \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$;

(iii) $\langle p, y_j \rangle \geq \langle p, Y_j \rangle \quad \forall\, j \in \mathcal{J}$;

(iv) $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = \sum_{j \in \mathcal{J}} y_j + \sum_{i \in \mathcal{I}} \omega_i$.

Модель $\mathcal{E}^{AD}$ может быть приведена к форме абстрактной модели экономики. Проделаем это. Положим $\mathcal{N} = \mathcal{I}$ и рассмотрим то же самое множество допустимых состояний $\mathbb{X} = \prod_{\mathcal{I}} X_i \times \prod_{\mathcal{J}} Y_j$. В качестве предпочтений экономических агентов, принимающих свои значения в $\mathbb{X}$, примем отображения $\mathcal{P}_i^{abs} : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$, заданные по формуле

$$ \mathcal{P}_i^{abs}(x, y) = \prod_{t<i} X_t \times \mathcal{P}_i(x, y) \times \prod_{t>i} X_t \times \prod_{j \in \mathcal{J}} Y_j $$

для всех $i \in \mathcal{N}$ и $(x, y) \in \mathbb{X}$, таких, что $\mathcal{P}_i(x, y) \neq \emptyset$. В качестве «балансового оператора» возьмём

$$ F(x, y) = \sum_{\mathcal{I}} x_i - \sum_{\mathcal{J}} y_j, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{l(n+r)} $$

и примем как «исходное» состояние $\omega^{abs} = (\omega_1, \ldots, \omega_n, 0, \ldots, 0)$. Ключевым в переходе от $\mathcal{E}^{AD}$ к абстрактной модели является адекватное определение механизма стоимостного регулирования. С этой целью сначала определим совокупность допустимых индивидуальных цен. Пусть $T = \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ (по определению $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \emptyset$) и определим

$$\mathcal{Q}^{abs} = \{ \ (q_1, \ldots, q_n) \in (L')^{\mathcal{N}} \mid \forall i \in \mathcal{I}, \ \forall j \in \mathcal{J} : \ (q_i)_i \in Q, \ (q_1)_j \in Q \ \ \& \\ (q_i)_t = 0, \ \ t \neq i, \ t \in \mathcal{I} \ \ \& \ \ (q_i)_t = 0, \ \ i \neq 1, \ t \in \mathcal{J} \ \}. \qquad (3.2.4)$$

По построению $\mathcal{Q}^{abs}$ «компоненты» векторов индивидуальных цен, отвечающие производственному сектору, могут быть ненулевыми только у 1-го агента. В потребительском секторе «компонента» индивидуальной цены данного агента ненулевая, если только она отвечает потребительским планам этого агента. Легко видеть, что множество $\mathcal{Q}^{abs}$ изоморфно $Q^T \subset L'$.

Далее определим *функции распределения дохода*. Пусть $(x, y) \in \mathbb{X}$ и $q \in \mathcal{Q}^{abs}$. Для $i = 1$ положим

$$\alpha_1^{abs}(x, y, q) = \langle q_{11}, \omega_1 \rangle + \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \theta_1^j) \langle y_j, q_{1j} \rangle. \qquad (3.2.5)$$

Для прочих $i = 2, 3, \ldots, n$ определим доходы формулой

$$\alpha_i^{abs}(x, y, q) = \langle q_{ii}, \omega_i \rangle + \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_i^j [\langle y_j, q_{1j} \rangle]^-. \qquad (3.2.6)$$

В последнем случае величина z^- по определению равна $-z$ при $z \le 0$ и 0 — иначе[4]. Построенную модель обозначим символом $\mathcal{E}_{AD}^{abs}$.

Следует указать на некоторые важные свойства определённых выше функций распределения дохода в абстрактной модели. Поскольку $\theta_i^j \ge 0$, то второе слагаемое в правой части (3.2.6) будет *неотрицательное*. Отсюда в частности следует, что при $\omega_i \in X_i$, $i \ge 2$ доходы i-го агента в модели $\mathcal{E}_{AD}^{abs}$ удовлетворяют предположению **A7** (непустота бюджетных множеств). При $i = 1$ и $\omega_1 \in X_1$ это предположение также будет выполнено, если дополнительно предположить, что Y_j выпуклы и $0 \in Y_j$ для всех $j \in \mathcal{J}$. Действительно, в таком случае вектор

$$\kappa = (\omega_1, x_2, \ldots, x_n, (1 - \theta_1^{n+1}) y_{n+1}, \ldots, (1 - \theta_1^{n+r}) y_{n+r}) \in \mathbb{X}$$

при любых $y_j \in Y_j$, $x_i \in X_i$, $i \neq 1$, $i \in \mathcal{N}$, и, следовательно, $\kappa \in B_1(x, y, q)$.

Существование равновесий с нестандартными ценами в модели $\mathcal{E}^{AD}$ устанавливает следующая

[4] Точнее, $z^- = (-z) \vee 0$.

Теорема 3.2.1 *Пусть модель* $\mathcal{E}^{AD}$ *удовлетворяет предположениям* **A1**–**A4**. *Дополнительно предположим, что* X_i *и* Y_j *полиэдральны и при этом* $\omega_i \in X_i$, $0 \in Y_j$ *при всех* $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{J}$. *Пусть также* $0 \in \operatorname{int} Q$ *и существует* $i_0 \in \mathcal{I}$ *— локально ненасыщаемый потребитель, т. е. такой, что* $x_{i_0} \in \operatorname{cl} \mathcal{P}_{i_0}(x,y)$ *при любом* $(x,y) \in \mathbb{X}$. *Тогда для любого* $\varepsilon \gg 0$, $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ *существует* δ*-равновесие с нестандартными ценами, такое, что* $\delta = \tau\,\varepsilon$ *при некотором нестандартном* $\tau \geq 0$.

В соответствии с принятой символикой мы полагаем

$$\mathcal{A}(\mathbb{X}) = \left\{ (x,y) \in \prod_{\mathcal{I}} X_i \times \prod_{\mathcal{J}} Y_j \mid \sum_{\mathcal{I}} x_i = \sum_{\mathcal{J}} y_j + \sum_{\mathcal{I}} \omega_i \right\}.$$

Замечание 3.2.1 Предположения теоремы 3.2.1 не являются максимально общими. В частности, полиэдральность X_i была использована только с целью применить более слабое предположение о непрерывности предпочтений **A3** вместо **A3′** (а также из соображений симметрии с полиэдральностью производственных множеств). Полиэдральность Y_j играет более существенную роль и требуется, чтобы удовлетворить условию (*iii*) определения 3.2.1. В общем случае (при выпуклых и замкнутых Y_j) можно только гарантировать существование таких нестандартных $\gamma_j \geq 0$, что в «равновесии» имеет место $\langle p, y_j\rangle + \gamma_j \geq \langle p, Y_j\rangle$ (величины γ_j можно определить как $\gamma_j = py'_j - py_j$ при некотором $y'_j \approx y_j$, $y'_j \in Y_j$, удовлетворяющем $\langle p, y'_j\rangle \geq \langle p, Y_j\rangle$[5]). В таком случае в качестве трансферабельных стоимостей необходимо также принять $\delta_i = \tau\,\varepsilon_i + \sum_{\mathcal{J}} \theta_i^j \gamma_j$. Последнее обобщение может иметь значение например, для того, чтобы установить существование *стандартных равновесий* (здесь можно использовать соображения подобные указанным в замечании 3.1.1 по отношению к модели рынка). Дополнительно можно заметить, что функции распределения дохода также могут иметь более общий вид. В действительности главное, что необходимо, — это предполагать не общую форму их зависимости от p и y, но зависимость от стоимостных величин $\langle p, y_j\rangle$, $j \in \mathcal{J}$.

Можно также отметить возможность замены требования о существовании локально ненасыщаемого потребителя на просто ненасыщаемого,

[5] Нижеследующий пример 3.2.1 показывает, что в общем случае *выпуклости и замкнутости* Y *недостаточно*, чтобы свойство $\langle p, \operatorname{st}(y)\rangle \geq \langle p, Y\rangle$ следовало из условия $\langle p, y\rangle \geq \langle p, {}^*Y\rangle$, однако при полиэдральным Y это так, и, более того, $p\,y = p\operatorname{st}(y)$, если $\operatorname{st}(y)$ существует.

используя стандартный приём, связанный с переходом в модели от исходного предпочтения к «приращённому», см. по этому поводу *Gale, Mas-Colell* (1975) и *Gale, Mas-Colell* (1979). Более того, требование о том, что этот агент является ненасыщаемым на всём $\mathbb{X}$, можно заменить требованием ненасыщаемости на $\mathcal{A}(\mathbb{X})$ — множестве всех *достижимых* состояний экономики. Действительно, если это так, то ненасыщаемость будет иметь место на некоторой окрестности множества $\mathcal{A}(\mathbb{X})$ (из непрерывности предпочтения), и, следовательно, можно стандартным приёмом перейти к другой модели, в которой множество *допустимых* состояний совпадает с этой окрестностью (выпуклым замкнутым подмножеством в $\mathbb{X}$). Легко видеть, что полученное в новой модели равновесие будет также равновесием в исходной. □

Доказательство теоремы 3.2.1. Доказательство будет основано на применении теоремы 2.3.1 о существовании нестандартных δ-квазиравновесий к модели абстрактной экономики $\mathcal{E}^{abs}_{AD}$, построенной выше. Сразу укажем, что без ограничения общности мы будем считать в условиях теоремы $i_0 = 1$ (т. е. потребитель с номером 1 является локально ненасыщаемым на $\mathbb{X}$). Условия теоремы 3.2.1 обеспечивают предположения **A1**–**A5** и **A7**, а также **A3′** применительно к модели $\mathcal{E}^{abs}_{AD}$ (напомним, что из построения и условий следует **A7**, а из полиэдральности $\mathbb{X}$ и **A3**, **A4** следует **A3′**, см. замечание 2.2.1). Таким образом, чтобы воспользоваться теоремой 2.3.1, достаточно установить **A6** — закон Вальраса. Сделаем это.

Положим $T_i = \{i\}$ при $i \in \mathcal{I}$, $i \geq 2$ и $T_1 = \{1\} \cup \mathcal{J}$. Здесь $T_i \cap T_k = \emptyset$ для всех $i \neq k$ и $\bigcup\limits_{\mathcal{N}} T_i = T = \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$. Следовательно, существует единственное согласованное отображение проектирования $g : L^{\mathcal{N}} \to L$, такое, что $(g(z_1, \ldots, z_n))_t = (z_i)_t$ при $t \in T_i$ и любом $i \in \mathcal{I}$. По выбору T_i и определению $\alpha_i^{abs}(y, q)$ достаточно рассмотреть оптимальные реакции 1-го агента. Итак, пусть

$$\langle q_1, (x, y)\rangle \leq \langle q_1, \mathcal{P}_1^{abs}(x, y)\rangle \quad \& \quad \mathcal{P}_1^{abs}(x, y) \cap B_1(x, y, q) = \emptyset,$$

где

$$B_1(x, y, q) = \{(x', y') \in \mathbb{X} \mid \langle q_{11}, x_1'\rangle + \sum_{\mathcal{J}} \langle q_{1j}, y_j'\rangle \leq \alpha_1^{abs}(y, q)\}.$$

По построению $\mathcal{P}_1^{abs\{T_1\}}(x, y) = \mathcal{P}_1(x, y) \times \prod\limits_{\mathcal{J}} Y_j$ и при этом $x_1 \in \operatorname{cl} \mathcal{P}_1(x, y)$. Ясно, что первая часть предыдущего соотношения возможна только если[6]

$$\langle q_{1j}, y_j\rangle \le \langle q_{1j}, Y_j\rangle \quad \forall\, j \in \mathcal{J},$$

откуда в силу $0 \in Y_j$ заключаем

$$\langle q_{1j}, y_j\rangle \le 0 \implies [\langle q_{1j}, y_j\rangle]^- = -\langle q_{1j}, y_j\rangle \quad \forall\, j \in \mathcal{J}.$$

Теперь, подставляя эти равенства в правую часть (3.2.6) и суммируя (3.2.5) и (3.2.6) по $i \in \mathcal{I} = \mathcal{N}$, с учётом построения $\mathcal{Q}$, см. (3.2.4), находим

$$\sum_{\mathcal{N}} \alpha_i^{abs}(x, y, q) = \sum_{\mathcal{N}} \langle q_{ii}, \omega_i\rangle = \langle \sum_{\mathcal{N}} q_i, (\omega_1, \dots, \omega_n, 0, \dots, 0)\rangle,$$

что и доказывает **A6**.

Итак, пусть (x, y, q) — δ-квазиравновесие абстрактной модели, существующее в силу теоремы 2.3.1, где $\delta = \tau\,\varepsilon$, $\tau \ge 0$, $\tau \in {}^*\mathbb{R}$. Пусть также $(\tilde{x}, \tilde{y}) \approx (x, y)$ — нестандартное состояние модели, отвечающее определению 3.1.1. Теперь в силу теоремы 2.3.1 (см. последнее из заключений теоремы), «устройства» отображения проектирования $g(.)$, а также ввиду ненасыщаемости 1-го агента и того факта, что $\tilde{y}$ является «фрагментом» его оптимальной реакции, заключаем, что

$$\langle q_{1j}, \tilde{y}_j\rangle \le \langle q_{1j}, {}^*Y_j\rangle, \quad j \in \mathcal{J}. \tag{3.2.7}$$

При этом, поскольку $0 \in Y_j$ для всех j, то бюджетные ограничения имеют вид

$$\langle q_{ii}, x_i''\rangle \le q_{ii}\omega_i - \sum_{\mathcal{J}} \theta_i^j \langle q_{1j}, \tilde{y}_j\rangle + \delta_i, \quad i \in \mathcal{I} \tag{3.2.8}$$

для $i \ge 2$. Кроме того, в силу пункта (ii) определения нестандартного квазиравновесия, для 1-го агента имеет место

$$\mathcal{P}_1^{abs}(x, y) \cap \mathrm{st}^*B_1^\delta(\tilde{y}, q) = \emptyset,$$

где множество ${}^*B_1^\delta(\tilde{y}, q) = {}^*B_1^\delta$ задаётся формулой

$${}^*B_1^\delta = \{(x'', y'') \in \mathbb{X} \mid q_{11}x_1'' + \sum_{\mathcal{J}} q_{1j}y_j'' \le q_{11}\omega_1 + \sum_{\mathcal{J}} (1 - \theta_1^j)\langle q_{1j}, \tilde{y}_j\rangle + \delta_1\}.$$

---

[6]Если $\langle y', q_{1\mathcal{J}}\rangle < \langle y, q_{1\mathcal{J}}\rangle$ для некоторого $y' \in \prod_{\mathcal{J}} Y_j$, то из локальной ненасыщаемости найдётся $x_1' \in \mathcal{P}_1(x, y)$, такой, что $\langle (x_1', y_1'), q_1\rangle < \langle q_1, (x, y)\rangle$ — противоречие с первой частью предыдущего соотношения.

Последнее условие эквивалентно $\mathcal{P}_1(x,y) \cap \mathrm{pr}_{|X_1}[\mathrm{st}^*B_1^\delta(\tilde{y},q)] = \emptyset$[7]. Однако в силу (3.2.7) при определении проекции нестандартного множества ${}^*B_1^\delta(\tilde{y},q)$ (очевидно, что в силу «прямоугольности» $\mathbb{X}$ порядок применения операций проектирования $\mathrm{pr}_{|X_1}[.]$ и взятия стандартной части множества может быть любым) в левой части определяющего его бюджетного неравенства величины $\langle q_{1j}, y_j''\rangle$ можно заменить на $\langle q_{1j}, \tilde{y}_j\rangle$, что после их «переноса» в правую часть даёт ограничение $q_{11}x_1'' \le q_{11}\omega_1 - \sum\limits_{\mathcal{J}} \theta_1^j \langle q_{1j}, \tilde{y}_j\rangle + \delta_1$. Таким образом, для всех $i \in \mathcal{I}$ имеет место

$$\mathcal{P}_i(x,y) \bigcap \mathrm{st}\{x_i'' \in {}^*X_i \mid q_{ii}x_i'' \le q_{ii}\omega_i - \sum_{\mathcal{J}} \theta_i^j \langle q_{1j}, \tilde{y}_j\rangle + \delta_i\} = \emptyset. \quad (3.2.9)$$

Далее, по определению δ-квазиравновесия должно быть $q \in \mathcal{A}({}^*\mathcal{Q})$, откуда получаем

$$\ker \sum q_i \supset \ker F \ \& \ q \in L^{eff} \iff \exists p \in \mathbb{R}^l: \ p = q_{ii} \ \ \forall i \in \mathcal{I} \ \ \&$$

$$q_{it} = 0, \ t \ne i, \ i \ne 1 \ \ \forall i \in \mathcal{I} \ \ \forall t \in T \ \ \& \ \ q_{1j} = -p \ \ \forall j \in \mathcal{J}.$$

Теперь, чтобы получить искомый результат, достаточно заменить в (3.2.9) «компоненты» вектора q_i на p или $-p$ и установить тот факт, что $p\tilde{y}_j = py_j$ для всех j.

Чтобы убедиться в последнем, воспользуемся (3.2.7), что в данном случае даёт

$$\langle p, \tilde{y}_j\rangle \ge \langle p, {}^*Y_j\rangle, \quad j \in \mathcal{J},$$

и полиэдральностью Y_j. Действительно, без ограничения общности можно считать Y_j многогранником (в силу ограниченности $\mathcal{A}(\mathbb{X})$), т. е. предположить, что $Y_j = \mathrm{co}\, A_j$ при некотором *конечном* $A_j \subset \mathbb{R}^l$.[8] Но тогда множество решений задачи $py_j' \to \max$, $y_j' \in Y_j$ может быть записано в виде $\mathrm{co}A_j'$ для некоторого $A_j' \subset A_j$. Таким образом, вектор $\tilde{y}_j$ представляется как (нестандартная) выпуклая комбинация конечного числа (стандартных) точек из $\mathbb{R}^l$, на которых нестандартный функционал p достигает максимума и, очевидно, $pa = pa'$ для всех $a,\ a' \in A_j'$. Отсюда по линейности заключаем $p\tilde{y}_j = p(\mathrm{st}\,\tilde{y}_j)$, что ввиду $\mathrm{st}\,\tilde{y} = y$ всё доказывает. □

[7]Напомним, что $\mathrm{pr}_{|X_1}[A]$ — это проекция множества $A \subset \mathbb{X}$ на X_1.

[8]Можно также в общем случае использовать лемму Фаркаша.

Заканчивая данный раздел, приведём пример, показывающий, что условия *выпуклости и замкнутости* множества $Y \subset \mathbb{R}^l$ *недостаточно*, для того, чтобы из $\langle p, y\rangle \geq \langle p, {}^*Y\rangle$ при $y \in {}^*Y$ следовало бы $\langle p, \mathrm{st}(y)\rangle \geq \langle p, Y\rangle$. Любопытно, что в двумерном случае это всегда так (легко доказывается).

Пример 3.2.1 Пусть $Y \subset \mathbb{R}^3$ и определён следующим образом:

$$\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y = h(x_1, x_2, 0)+(1-h)(0, 0, 1),\ 0 \leq h \leq 1,\ x_1^2+x_2^2 \leq 1\}.$$

Другими словами, Y представляет из себя выпуклую оболочку диска единичного радиуса с центром в нуле в подпространстве, определённом ортами e_1 и e_2, с точкой $(0, 0, 1)$ — это круговой усечённый конус, представленный на рис. 3.2.1.

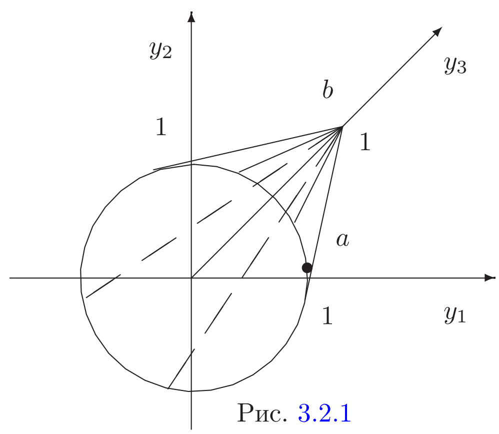

Рис. 3.2.1

Выберем точки $a = (\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, 0)$, $b = (0, 0, 1)$, принадлежащие ${}^*Y$, и проведём через них опорную гиперплоскость. Эта гиперплоскость определяется вектором нормали $p = \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, 1)$. Действительно, вычисление показывает, что $\langle p, a\rangle = \langle p, b\rangle = 1/2$. Однако при этом для $y \in {}^*Y$ имеем $\langle y, p\rangle =$

$$\frac{hx_1}{2\sqrt{1+\varepsilon^2}} + \frac{h\varepsilon x_2}{2\sqrt{1+\varepsilon^2}} + \frac{1}{2}(1-h) = \frac{1}{2}\Big[\Big\langle (x_1, x_2), \Big(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\Big)\Big\rangle h + (1-h)\Big].$$

Положим $x = (x_1, x_2)$ и $d = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right)$. По условию $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1$ и $||d||_2 = 1$. Поскольку $\langle x, d\rangle = ||x||_2||d||_2 \cos(\alpha)$, где α —

угол между векторами x и d, то $\langle x, d\rangle \leq 1$ и, значит, $\langle p, y\rangle \leq 1/2$, т. е. $\langle p, {}^*Y\rangle \leq \langle p, a\rangle$. Однако

$$\langle p, \mathrm{st}(a)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{1+\varepsilon^2}} < \langle p, a\rangle = \langle p, b\rangle = \frac{1}{2},$$

т. е. отрезок $(\mathrm{st}(a), b]$ не пересекается с $\{y \in Y \mid \langle p, y\rangle \leq \langle p, \mathrm{st}(a)\rangle\}$. $\square$

3.3 Экономики с общественными благами

Модель экономики с общественными благами характеризуется наличием продуктов специального вида, которые по своим физическим качествам являются продуктами общественного потребления. Примерами общественных благ[9] являются общественные теле- и радиотрансляции, уличное освещение, дороги, разного рода продукция типа «безопасность» (полиция, государственная оборона и т. д.). Список примеров можно продолжить, однако ясно, что во всех этих случаях имеется продукт (благо), одновременно потребляемый многими агентами. Этот продукт нужно воспроизводить (ремонтировать дороги, производить телепрограммы и осуществлять вещание), что нужно как-то финансировать. Понятно, что финансирование воспроизводства продукта коллективного потребления должно осуществляться за счёт всех его потребителей. В неоклассической теории децентрализованной экономической системы в основу механизма стоимостного регулирования общественных благ положено понятие индивидуальных стоимостных оценок, вычисляемых как произведение индивидуальной цены на общий объём потребления. Конечно, в экономике могут быть и обычные продукты, процессы обмена и воспроизводства которых осуществляются по обычным рыночным правилам. В теории определяется соответствующее понятие равновесия (по Линдалю), обладающее в том числе тем свойством, что отвечающие ему состояния экономики оптимальны по Парето. Трудным теоретическим вопросом является проблема практического определения индивидуальных цен. Действительно, в случае продуктов индивидуального потребления этот вопрос решается автоматически, посредством рыночного механизма, основанного на большом числе сделок обмена, методом «нащупывания». По отношению к общественным благам этот способ не срабатывает, ибо индивиды в принципе не могут обмениваться частями общественных благ[10]. С теоретической

[9] В англоязычной литературе — «public goods».

[10] Поэтому на практике рекомендуется всегда, когда это возможно, посредством разного рода специфических приёмов «представлять общественное благо как част-

точки зрения индивидуальные цены должны быть пропорциональны маргинальным нормам замещения (обмена), а в терминах функций полезности — фрагменту градиента, отвечающему общественным благам. Таким образом, чтобы «вычислить» индивидуальные цены, нужно обладать сугубо частной информацией о предпочтениях индивидуумов, что практически неосуществимо.

Формально модель экономики с общественными благами имеет следующий вид. В модели имеется конечное число потребителей, образующих множество $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$, и конечное число производителей (фирм) $\mathcal{J} = \{n+1, \ldots, n+r\}$. В экономике представлено l типов продуктов частного потребления, их номенклатура $\{1, \ldots, l\}$, и s видов общественных благ, занумерованных индексами $\{l+1, \ldots, \ l+s\}$. Таким образом, всего имеется $l+s$ продуктов. Потребители оснащены индивидуализированными *потребительскими множествами частных продуктов* $X_i^p \subset \mathbb{R}^l$ и *общим* для всех потребителей множеством *допустимых* к потреблению *общественных благ* $X^c \subset \mathbb{R}^s$. Здесь $\mathbb{R}^{l+s}$ — это пространство продуктов. Кроме того, потребители обладают исходными запасами частных продуктов $\omega_i \in \mathbb{R}^l$, $i \in \mathcal{I}$, а экономика в целом — запасами общественных благ $\omega^c \in \mathbb{R}^s$. Фирмы могут производить и затрачивать как частные так и общественные блага, их производственные возможности заданы посредством технологических множеств $Y_j \subset \mathbb{R}^{l+s}$, $j \in \mathcal{J}$. Производственные планы $y_j \in Y_j$ будут записываться в виде $y_j = (y_j^p, y_j^c)$, где $y_j^p \in \mathbb{R}^l$ соответствует продуктам частного потребления, а $y_j^c \in \mathbb{R}^s$ — общественного. Множество $\mathbb{X}^{pg} = \prod\limits_{\mathcal{I}} X_i^p \times X^c \times \prod\limits_{\mathcal{J}} Y_j$ отождествляется с совокупностью всех *допустимых состояний*, а пространство $L = \mathbb{R}^{ln+s+r(l+s)} \supset \mathbb{X}^{pg}$ есть *пространство состояний*. Предпочтения потребителей определены на $\mathbb{X}^{pg}$ и принимают значения в $X_i^p \times X^c$, т. е. $\mathcal{P}_i : \mathbb{X}^{pg} \rightrightarrows X_i^p \times X^c$. Как мы видим, в данной модели имеются *внешние влияния*, сконцентрированные *в сфере общественных благ*. Кроме того, так же как и в модели Эрроу — Дебре, определены *доли* $\theta_i^j \geq 0$ — компоненты вектора $\theta_i = (\theta_i^{n+1}, \ldots, \theta_i^{n+r})$ — потребителя i в прибыли производителя j. Эти величины удовлетворяют условию $\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i^j = 1$ для всех $j \in \mathcal{J}$ (т. е. прибыль полностью распределяется между акционерами).

Процессы обмена и воспроизводства благ регулируются посредством индивидуальных цен на общественные блага $q_i \in \mathbb{R}^s$ и рыночных цен $p \in \mathbb{R}^l$ на продукты частного потребления. Множество $Q^c \subset \mathbb{R}^s$ опреде-

ное», с тем чтобы задействовать рыночный механизм. Примером может служить переход к счётчикам при оплате водоснабжения.

ляет *допустимые наборы индивидуальных цен* для каждого потребителя, а $Q^p \subset \mathbb{R}^l$ — это множество всех *допустимых рыночных цен*.

Механизм стоимостного регулирования определяется как обычно, с помощью функций распределения дохода $\alpha_i : \prod_{\mathcal{J}} Y_j \times Q \to \mathbb{R}$, где $Q = Q^p \times [Q^c]^{\mathcal{I}}$, которые задают бюджетное ограничение

$$\langle x_i, p\rangle + \langle x^c, q_i\rangle \le \alpha_i(y, q, p), \quad x_i \in X_i^p,\ x^c \in X^c, \quad i \in \mathcal{I},$$

где $y = (y_1, \dots, y_r) \in \prod_{\mathcal{J}} Y_j$, $q = (q_1, \dots, q_n) \in [Q^c]^{\mathcal{I}}$ и $p \in Q^p$. В чисто неоклассическом варианте функции распределения дохода «вычисляются» по формуле

$$\alpha_i(y, q, p) = \langle \omega_i, p\rangle + \langle \omega^c, q_i\rangle + \sum_{j\in\mathcal{J}} \theta_i^j (p y_j^p + \bar{q} y_j^c), \quad i \in \mathcal{I},$$

где $\bar{q} = \sum_{\mathcal{I}} q_i$. Как видим, в последнем случае «доходы» формируются из трёх источников: от продажи исходных ресурсов ω_i по рыночным ценам p, индивидуализированной стоимостной оценки общественных благ $\langle q_i, \omega^c\rangle$ и как «сумма дивидендов» из прибыли производителей. Отметим (это важно), что прибыль определяется с помощью «производственных цен» $(p, \bar{q})$.

Кратко модель экономики с общественными благами может быть записана в виде

$$\mathcal{E}^{pg} = \langle\, \mathcal{I},\ \mathcal{J},\ \mathbb{R}^l,\ \mathbb{R}^s,\ \{\ X_i^p,\ \mathcal{P}_i(.),\ \theta_i,\ \omega_i\ \}_{i\in\mathcal{I}},\ \{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}},\ X^c,\ Q^c,\ Q^p,\ \omega^c\,\rangle.$$

В неоклассической постановке в качестве *равновесия* (по Линдалю) принимается такое состояние $z = (x, x^c, y) \in \mathbb{X}^{pg}$ и набор цен $(p, q_1, \dots, q_n) \in Q$, что при $\bar{q} = \sum_{\mathcal{I}} q_i$ выполняется

$$\bar{q} y_j^c + p y_j^p \ge \bar{q}\tilde{y}_j^c + p\tilde{y}_j^p, \quad j \in \mathcal{J},$$

для каждого $(\tilde{y}_j^p, \tilde{y}_j^c) \in Y_j$ (принцип максимизации прибыли производителями); имеет место $x_i p + x^c q_i \le \alpha_i(y, q, p)$ и

$$\mathcal{P}_i(x, x^c, y) \cap B_i(y, q, p) = \emptyset, \quad i \in \mathcal{I};$$

и при этом выполнены: баланс по продуктам частного потребления —

$$\sum_{\mathcal{I}} x_i = \sum_{\mathcal{I}} \omega_i + \sum_{\setminus J} y_j^p$$

и баланс общественных благ —

$$x^c = \omega^c + \sum_{\mathcal{J}} y_j^c.$$

Здесь $B_i(y,q,p)$ — это бюджетное множество потребителя i, заданное по формуле

$$B_i(y,q,p) = \{(\tilde{x}_i, \tilde{x}^c) \in X_i^p \times X^c \mid \tilde{x}_i p + \tilde{x}^c q_i \leq \alpha_i(y,q,p)\}.$$

Как это следует из формального определения, в понятие равновесия по Линдалю в модели $\mathcal{E}^{pg}$ заложен принцип максимизации прибыли производителями по совокупным производственным ценам $(p,\bar{q})$, $\bar{q} = \sum_{\mathcal{I}} q_i$. Прочие требования, предъявляемые в понятии равновесия с общественными благами, имеют обычный содержательный смысл и аналогичны соответствующим условиям, которым удовлетворяет конкурентное равновесие модели Эрроу–Дебре. Нужно только обратить внимание на специфическую форму балансовых ограничений общественных благ — это принципиально и следует из содержательной стороны вопроса.

С целью перейти к понятию равновесия с нестандартными ценами необходимо определить понятие *бюджетного множества*. При фиксированных $y \in \prod_{\mathcal{J}} Y_j$, нестандартных ценах $(p,q) \in {}^*Q$ и для нестандартного $\delta_i \geq 0$ положим

$${}^*B_i^\delta(y,q,p) = \{(\tilde{x}_i^p, \tilde{x}^c) \in {}^*X_t^p \times {}^*X^c \mid \tilde{x}_i^p p + \tilde{x}^c q_i \leq \alpha_i(y,q,p) + \delta_i\}.$$

Величины $\delta_i \geq 0$ условимся, как обычно, называть трансферабельными стоимостями, а вектор $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ — схемой перераспределения избыточных стоимостей.

Определение 3.3.1 *Состояние экономики* $(x, x^c, y) \in \mathbb{X}^{pg}$*, набор нестандартных индивидуальных цен* $q = (q_1, \ldots, q_n)$*,* $q_i \in {}^*Q^c$*,* $i \in \mathcal{I}$ *и нестандартный вектор рыночных цен* $p \in {}^*Q^p$ *называется равновесием модели* $\mathcal{E}^{pg}$ *с фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей* $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$*,* $\delta \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$*,* $\delta \geq 0$*, если выполнены условия*

(i) $(x_i, x^c) \in \mathrm{st}\,{}^*B_i^\delta(y,q,p) \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$;

(ii) $\mathcal{P}_i(x, x^c, y) \cap \mathrm{st}\,{}^*B_i^\delta(y,q,p) = \emptyset \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$;

(iii) $\langle p, y_j^p\rangle + \langle \sum_{\mathcal{I}} q_i, y_j^c\rangle \geq \langle p, \tilde{y}_j^p\rangle + \langle \sum_{\mathcal{I}} q_i, \tilde{y}_j^c\rangle \quad \forall\, (\tilde{y}_j^p, \tilde{y}_j^c) \in Y_j, \ \forall\, j \in \mathcal{J}$;

(iv) $\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum_{j\in\mathcal{J}} y_j^p + \sum_{i\in\mathcal{I}} \omega_i, \quad x^c = \sum_{j\in\mathcal{J}} y_j^c + \omega^c.$

Исследование модели $\mathcal{E}^{pg}$ и проблемы существования равновесий с нестандартными ценами будет осуществлено стандартным приёмом, посредством сведения $\mathcal{E}^{pg}$ к модели абстрактной экономики. С этой целью положим $\mathcal{N} = \mathcal{I}$, а в качестве пространства состояний L и множества допустимых состояний $\mathbb{X}$ возьмём

$$L = \mathbb{R}^{ln+s+r(l+s)} \quad \& \quad \mathbb{X} = \prod_{\mathcal{I}} X_i^p \times X^c \times \prod_{\mathcal{J}} Y_j,$$

соответственно.

Предпочтения агентов абстрактной экономики $\mathcal{P}_i^{abs} : \mathbb{X} \Rightarrow \mathbb{X}$ определим по формуле

$$\mathcal{P}_i^{abs}(x, x^c, y) = \prod_{t \neq i \;\; t \in \mathcal{N}} X_t^p \times \mathcal{P}_i(x, x^c, y) \times \prod_{\mathcal{J}} Y_j$$

для всех $i \in \mathcal{N}$ и (x, x^c, y) таких, что $\mathcal{P}_i(x, x^c, y) \neq \emptyset$. Ясно, что таким образом определены предпочтения с ограниченными внешними влияниями.

Далее определим балансовый оператор $F : L \to \mathbb{R}^{l+s}$, полагая $F = (F^p, F^c)$, где $F^p : L \to \mathbb{R}^l$ и $F^c : L \to \mathbb{R}^s$ задаются тождествами

$$F^p(x, x^c, y) = \sum_{\mathcal{I}} x_i - \sum_{\mathcal{J}} y_j^p \;\; \& \;\; F^c(x, x^c, y) = x^c - \sum_{\mathcal{J}} y_j^c, \;\; (x, x^c, y) \in L.$$

Примем в качестве «исходного состояния» вектор

$$\omega^{abs} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega^c, 0, \ldots, 0) \in L.$$

В таком случае имеем $F(\omega^{abs}) = (\sum \omega_i, \omega^c)$.

Наконец, необходимо подходящим образом определить механизм стоимостного регулирования. Положим $T = \mathcal{I} \cup \mathcal{J} \cup \{c\}$, где индекс «c» отвечает множеству X^c допустимых общественных благ, и определим

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{abs} = \{\; (q_1, \ldots, q_n) \in (L')^{\mathcal{N}} \;\mid\; (q_{ii}^p, q_i^c),\; q_{1j} \in Q^p \times Q^c \;\; i \in \mathcal{I}, \;\; j \in \mathcal{J} \;\; \& \\ (q_i)_t = 0, \;\; t \neq i, \;\; t \in \mathcal{I} \;\; \& \;\; (q_i)_t = 0, \;\; i \neq 1, \;\; t \in \mathcal{J} \;\}. \qquad (3.3.10) \end{aligned}$$

Здесь (q_{ii}^p, q_i^c) — это «фрагмент» вектора q_i, отвечающий потреблению агента i, где q_{ii}^p — для частных, а q_i^c — общественных благ. Аналогично, $(q_i)_t$ — это «фрагмент», отвечающий $t \in T$. Заметьте, что только у 1-го агента компоненты индивидуальной цены, соответствующие производственному сектору, могут принимать ненулевое значение.

Из построения множества $\mathcal{Q}^{abs}$ и определения предпочтений в абстрактной модели следует, что в качестве эффективной области изменения цен можно принять подпространство

$$L^{eff} = \{ \ (q_1, \ldots, q_n) \in (L')^{\mathcal{N}} \ \mid \quad \begin{array}{lll} (q_i)_t = 0, & t \neq i, & t \in \mathcal{I} \ \& \\ (q_i)_t = 0, & i \neq 1, & t \in \mathcal{J} \ \}. \end{array}$$

Функции распределения дохода зададим по формулам

$$\alpha_i^{abs}(y, q, p) = \langle q_{ii}^p, \omega_i \rangle + \langle q_i^c, \omega^c \rangle + \sum_{j \in \mathcal{J}} \theta_i^j [\langle y_j, q_{1j} \rangle]^-$$

при $i \neq 1$ и $i \in \mathcal{N}$. Для $i = 1$ положим

$$\alpha_1^{abs}(y, q, p) = \langle q_{11}^p, \omega_1 \rangle + \langle q_1^c, \omega^c \rangle + \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \theta_1^j) \langle y_j, q_{1j} \rangle.$$

Так же как и в модели Эрроу–Дебре легко убедиться в том, что условия $\omega_i \in X_i^p$, $\omega^c \in X^c$ и $0 \in Y_j$ при выпуклых Y_j для всех $i \in \mathcal{I}$ и $j \in \mathcal{J}$ влекут истинность предположения **A7** в абстрактной модели — ибо ω^{abs} принадлежит бюджетному множеству при $i \geq 2$, а $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega^c, (1 - \theta_1^{n+1}) y_{n+1}, \ldots, (1 - \theta_1^{n+r}) y_{n+r})$ находится в бюджетном множестве агента 1.

Прежде чем перейти к теореме существования равновесий с нестандартными ценами, установим следующий вспомогательный результат.

Лемма 3.3.1 *Пусть* $q_1, q_2, \ldots, q_n \in L'$. *Тогда условие* $\ker \sum_{\mathcal{N}} q_i \supset \ker F$ *для* $q = (q_1, \ldots, q_n) \in L^{eff}$ *эквивалентно существованию такого* $p \in \mathbb{R}^l$, *что*

(i) $\quad q_{ii}^p = p \quad \forall\, i \in \mathcal{I};$

(ii) $\quad \sum_{\mathcal{I}} q_i^c = \bar{q} = -(q_{1j})^c, \ q_{1j} = -(p, \bar{q}) \quad \forall\, j \in \mathcal{J};$

(iii) $\quad (q_i)_t = 0, \quad t \neq i \quad \forall\, t, i \in \mathcal{I};$

(iv) $\quad (q_i)_t = 0, \quad i \neq 1 \quad \forall\ t \in \mathcal{J}, \ \forall\, i \in \mathcal{I}.$

Доказательство леммы 3.3.1. По определению имеем

$$\ker F = F^{-1}(0) = [F^p]^{-1}(0) \cap [F^c]^{-1}(0) = \ker F^p \cap \ker F^c.$$

С другой стороны, для любого линейного $h : L \to \mathbb{R}$ условие $\ker(h) \supset \ker F$ эквивалентно

$$h \in (\ker F)^{\perp} = (\ker F^p)^{\perp} + (\ker F^c)^{\perp}.$$

Таким образом, чтобы получить необходимую характеризацию, нужно определить $(\ker F^p)^{\perp}$ и $(\ker F^c)^{\perp}$. Легко видеть, что $h' \in (\ker F^p)^{\perp} \iff$

$$\exists\, p \in \mathbb{R}^l : \; h'_i = p, \; h'_c = 0, \; h'_j = (-p, 0) \in \mathbb{R}^{l+s} \;\; \forall\, i \in \mathcal{I}, \; j \in \mathcal{J},$$

и $h'' \in (\ker F^c)^{\perp} \iff$

$$\exists\, \bar{q} \in \mathbb{R}^s : \; h''_i = 0, \; h'_c = \bar{q}, \; h''_j = (0, -\bar{q}) \in \mathbb{R}^{l+s} \;\; \forall\, i \in \mathcal{I}, \; j \in \mathcal{J}.$$

Учитывая условие $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in L^{eff}$ и, таким образом, $\sum_{\mathcal{N}} q_i = h' + h''$, имеем искомый результат. □

Существование равновесий с нестандартными ценами и фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей в модели $\mathcal{E}^{pg}$ будет установлено для полиэдрального множества допустимых состояний и основано на применении теоремы о существовании δ-квазиравновесий в абстрактной модели.

Теорема 3.3.1 *Пусть модель $\mathcal{E}^{pg}$ удовлетворяет предположениям* **A1**–**A4**. *Дополнительно предположим, что X_i^p, X^c и Y_j полиэдральны и при этом $\omega_i \in X_i^p$, $\omega^c \in X^c$, $0 \in Y_j$ при всех $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{J}$. Пусть также $0 \in \operatorname{int} Q^p$, $0 \in \operatorname{int} Q^c$ и существует $i_0 \in \mathcal{I}$ — локально ненасыщаемый потребитель, т. е. такой, что $(x_{i_0}, x^c) \in \operatorname{cl} \mathcal{P}_{i_0}(x, x^c, y)$ при любом $(x, x^c, y) \in \mathbb{X}^{pg}$. Тогда для любого $\varepsilon \gg 0$, $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ существует δ-равновесие с нестандартными ценами, такое, что $\delta = \tau\,\varepsilon$ при некотором нестандартном $\tau \geq 0$.*

Доказательство теоремы 3.3.1. Доказательство идёт симметрично теореме 3.2.1 о существовании нестандартных равновесий в модели Эрроу–Дебре. Напомним, что в условиях полиэдральности $\mathbb{X}^{pg}$ и **A4** предположение **A3** эквивалентно **A3′**. Таким образом, в силу условий теоремы выполнены предположения **A1**–**A5** и **A7** в абстрактной модели экономики. Проверка закона Вальраса — предположения **A6** — осуществляется с помощью тех же аргументов, что и в теореме 3.2.1. В данном случае нужно положить $T_1 = \{1, c\} \cup \mathcal{J}$ и $T_i = \{i, c\}$ для всех $i \neq 1$. Далее, используя локальную ненасыщаемость 1-го агента (так можно считать без ограничения общности), заключаем, что для оптимальных реакций (x, x^c, y, q) имеет место

$$\langle q_{1j}, y_j\rangle \leq \langle q_{1j}, Y_j\rangle \quad \forall\, j \in \mathcal{J}.$$

Отсюда, в силу $0 \in Y_j$, следует $\langle q_{1j}, y_j\rangle \leq 0$, что даёт $[\langle q_{1j}, y_j\rangle]^- = -\langle q_{1j}, y_j\rangle$ для всех $j \in \mathcal{J}$. Последнее из определений и после несложных вычислений даёт

$$\sum_{\mathcal{N}} \alpha_i^{abs}(y, q) = \langle \sum_{\mathcal{N}} q_i, \omega^{abs}\rangle,$$

что доказывает **A6**.

Итак, выполнены все условия теоремы 2.3.1 в абстрактной модели, отвечающей $\mathcal{E}^{pg}$, используя которую, заключаем, что существует δ-квазиравновесие, такое, что $\delta = \tau\,\varepsilon$ при некотором нестандартном $\tau \geq 0$. Пусть (x, x^c, y, q) и есть это δ-квазиравновесие, а $(\tilde{x}, \tilde{x}^c, \tilde{y}) \approx (x, x^c, y)$ — нестандартное состояние экономики, отвечающее определению 2.3.3 и обладающее свойствами, указанными в теореме 2.3.1. Опять, также как в доказательстве теоремы 3.2.1, из локальной ненасыщаемости 1-го агента следует

$$\langle q_{1j}, \tilde{y}_j\rangle \leq \langle q_{1j}, {}^*Y_j\rangle \quad \forall\, j \in \mathcal{J}, \tag{3.3.11}$$

откуда, используя свойство (ii) определения квазиравновесия, а также из построения, несложно заключить, что $\mathcal{P}_i(x, x^c, y)$ не пересекается с

$$\mathrm{st}\{(x_i', x^{c\prime}) \in {}^*(X_i^p \times X^c) \mid q_{ii}^p x_i' + q_i^c x^{c\prime} \leq q_{ii}^p \omega_i + q_i^c \omega^c - \sum_{j\in\mathcal{J}} \theta_i^j \langle \tilde{y}_j, q_{1j}\rangle + \delta_i\} \tag{3.3.12}$$

для всех $i \in \mathcal{N}$. Действительно, проверки требует только случай $i = 1$, ибо $q_{ij} = 0$ для $i \geq 2$, $j \in \mathcal{J}$ по построению $\mathcal{Q}^{abs}$, а дальше из определения равновесия. Напомним, что в рассматриваемом случае бюджетное ограничение для $i = 1$ имеет вид

$$q_{11}^p x_1^{p\prime} + q_1^c x^{c\prime} + \sum_{j\in\mathcal{J}} q_{1j} y_j' \leq q_{11}^p \omega_1 + q_i^c \omega^c + \sum_{j\in\mathcal{J}} (1 - \theta_1^j)\langle \tilde{y}_j, q_{1j}\rangle + \delta_1,$$

$x_1^{p\prime} \in {}^*X_1^p$, $x^{c\prime} \in {}^*X^c$, $y_j' \in {}^*Y_j$, $j \in \mathcal{J}$. Однако опять, в силу теоремы 2.3.1 (см. последний фрагмент), последнее неравенство остаётся истинным при замене в его левой части $x_1^{p\prime}$, $x_1^{c\prime}$, y_j' на $\tilde{x}_1^p$, $\tilde{x}_1^c$, $\tilde{y}_j$ и, кроме того, имеет место

$$\mathcal{P}_1^{abs}(\tilde{x}, \tilde{x}_1^c, \tilde{y}_j) \cap {}^*B_1^\delta(\tilde{y}, p, q) = \emptyset.$$

Отсюда, стандартным образом используя ненасыщаемость 1-го агента, заключаем истинность нужного соотношения (грубо говоря величину $\sum_{\mathcal{J}} q_{1j} y_j$ нужно перенести в правую часть бюджетного неравенства и «сократить» с $\sum_{\mathcal{J}} q_{1j} \tilde{y}_j$).

Наконец, используя (3.3.11) и полиэдральность $\mathbb{X}$, заключаем, что $\langle q_{1j}, \tilde{y}_j \rangle = \langle q_{1j}, y_j \rangle$, $j \in \mathcal{J}$, что можно подставить в (3.3.12). Чтобы закончить доказательство, осталось воспользоваться свойством $q = (q_1, \ldots, q_n) \in {}^*\mathcal{Q}^{abs} \cap {}^*L^{eff}$, пунктом (iv) определения нестандартного квазиравновесия, что влечёт $\ker \sum_{\mathcal{N}} q_i \supset \ker F$, и применить принцип переноса к лемме 3.3.1. □

3.4 Конечность числа нестандартных равновесий

Джерард Дебре, один из основоположников равновесного анализа, в *Debreu* (1970) впервые установил конечность числа равновесий для «почти всех» экономик чистого обмена. Тем самым чисто математическими методами была подтверждена самодостаточность понятия экономического равновесия, которое, будучи представлено ранее как чисто дескриптивное понятие, теперь уже можно было принять в качестве полноценного экономического решения[11]. Подход Дебре основывался на рассмотрении такого класса моделей, где все параметры фиксированы, но изменяются исходные запасы экономических агентов. Используя теорему Сарда, применённую к функции избыточного спроса, Дебре установил конечность равновесий для почти всех — в смысле меры Лебега — экономик. Несколько позже появились и другие подходы, основанные на изменениях другого параметра модели, — функций полезности участников экономики. Здесь используются методы дифференциальной топологии и в первую очередь теоремы Р. Тома об открытости и плотности трансверсальных сечений. П. Дубей был одним из первых, кто использовал эту технику, — в *Dubey* (1978) он доказал, в частности, конечность (и неэффективность) числа равновесий Нэша для «почти всех» игр в нормальной форме. Впоследствии его результаты были обобщены автором на случай моделей экономики *Маракулин* (1981). Термин «для почти всех» понимается здесь как «для всех экономик из открытого всюду плотного (или массивного) подмножества в соответствующем функциональном пространстве «полезностей». С целью придать законченность

[11] Единственность равновесий реализуется довольно редко, необходимы дополнительные ограничения на модель типа условия валовой заменимости.

теории равновесия с нестандартными ценами необходимо прояснить вопрос о конечности отвечающих им равновесных распределений.

Чтобы дать корректный ответ на этот вопрос, мы будем использовать второй подход, т. е. варьируются функции полезности участников экономики. Последнее вызвано тем, что при «вариациях» исходных запасов нестандартные равновесия «почти всегда» являются обычными равновесиями (ибо почти всегда исходные запасы потребителей находятся во внутренности потребительских множеств и, следовательно, будет выполнено условие Слейтера в задаче потребителя), что очевидным образом (в силу теоремы Дебре) влечет их конечность. В то же время если исходные запасы фиксированы и расположены на границе потребительских множеств, (а именно этот случай наиболее реалистичен), то условие Слейтера выполняется не для всех цен, и вопрос о конечности нестандартных равновесий становится нетривиальным.

Для исследуемого вопроса наличие производственного сектора в модели экономики не является математически значимым фактором, но делает изложение более громоздким. Поэтому мы ограничимся рассмотрением простейшей модели экономики чистого обмена, описанной в §3.1 и представленной четверкой

$$\mathcal{E}^m(u) = \langle\ \mathcal{I},\ \mathbb{R}^l,\ \{X_i,\ u_i,\ \omega_i\}_{i\in\mathcal{I}},\ Q\ \rangle.$$

Напомним значение параметров этой модели. Здесь $\mathcal{I} = \{1, .., n\}$, — множество номеров потребителей, $X_i \subset \mathbb{R}^l$, $i \in \mathcal{I}$ — их потребительские множества, где $\mathbb{R}^l$ — пространство продуктов, а l — их число; $\omega_i \in X_i$, $i \in \mathcal{I}$ — начальные запасы потребителей, и $Q \subset \mathbb{R}^l$ — множество допустимых цен. Предпочтения потребителей задаются с помощью функций полезности $u_i : \prod_{\mathcal{I}} X_i \to \mathbb{R}$ по правилу

$$\mathcal{P}_i(x) = \{y_i \in X_i \mid u_i(x|y_i) > u_i(x)\},\quad i \in \mathcal{I},$$

где по определению $(x|y_i) = (x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)$.

Вопрос о конечности нестандартных равновесий будет исследоваться применительно к понятию равновесия с нестандартными ценами и фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей, отвечающему определению 3.1.1. Отметим, что, в рамках модели $\mathcal{E}^m(u)$ и сделанных предположений, это понятие эквивалентно понятию обобщённого равновесия, введённого в §3.1. Там же была установлена общая теорема существования (теорема 3.1.1) нестандартных равновесий этого типа. Ниже приводится адаптированная формулировка этого понятия.

Определение 3.4.1 *Допустимое состояние* $x \in \prod_{\mathcal{I}} X_i$ *экономики* $\mathcal{E}^m(u)$ *называется равновесием с нестандартными ценами* $p \in {}^*Q$

и фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей $\delta \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{I}},\ \delta \geq 0$, *если выполнены условия:*

(*i*) *индивидуальная рациональность:* $u_i(x) = \max\{u_i(x|x'_i) \mid x'_i \in B_i^{\delta}(p)\}$ *для каждого* $i \in \mathcal{I}$;

(*ii*) *сбалансированность:* $\sum\limits_{\mathcal{I}} x_i = \sum\limits_{\mathcal{I}} \omega_i$,

где максимум в (*i*) *берется по множеству*

$$B_i^{\delta}(p) = \mathrm{st}\{x' \in {}^*X_i \mid px' \leq p\omega_i + \delta_i\}.$$

В отличие от традиционных, равновесия с трансферабельными стоимостями предполагают возможность перераспределения избыточной стоимости (т. е. стоимостей, не израсходованных агентами, достигшими насыщения в своем потреблении) между «ненасыщенными» агентами. Причем передача избыточных стоимостей может осуществляться как для величин стандартного типа, так и для бесконечно малых. Важной особенностью рассматриваемой ситуации является то, что агент может и не потреблять наилучший с его точки зрения набор благ, т. е. не достигать насыщения в обычном смысле, но при этом для увеличения полезности ему требуется стоимость бесконечно большая относительно имеющейся у него неизрасходованной стоимости. В этом и состоит специфика используемого нами термина «насыщаемость», предопределённая нестандартностью цен и трансферабельных стоимостей. В идеале ситуацию можно интерпретировать как существование некоего «банка», принимающего от агентов ненужную им стоимость и выдающего её в виде кредитов желающим их получить. Можно, однако, просто считать, что посредством трансферабельных стоимостей осуществляется расширение бюджетных возможностей участников, позволяющее им достигать равновесного состояния в ситуации, когда этого нельзя сделать в рамках традиционных бюджетных ограничений.

В рассмотренном выше примере 3.1.1 число состояний нестандартного равновесия с трансферабельными стоимостями конечно, однако в общем случае гипотеза о конечности неверна. В следующем примере имеется континуум нестандартных равновесий с трансферабельными стоимостями (рис. 3.4.1).

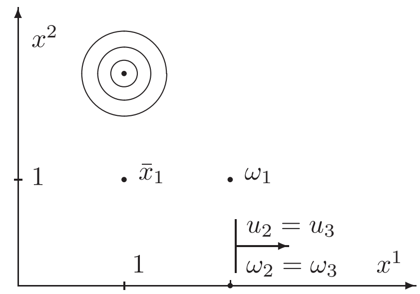

Рис. 3.4.1

Пример 3.4.1 Рассмотрим экономику обмена со следующими параметрами. Пусть $X_1 = X_2 = X_3 = \{(x^1, x^2) \mid 0 \le x^j \le 10,\ j = 1, 2\}$, $Q = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p\| \le 2\}$, $u_1 = 5 - (x^1 - 1)^2 - (x^2 - 2)^2$, $u_2 = u_3 = x^1$, $\omega_1 = (2, 1)$, $\omega_2 = \omega_3 = (2, 0)$. Несложный анализ показывает, что точки $\bar{x}_1 = (1, 1)$, $\bar{x}_2 = (2 + \lambda, 0)$, $\bar{x}_3 = (3 - \lambda, 0)$, $0 \le \lambda \le 1$, будут нестандартными равновесиями с трансферабельными стоимостями при $p = (\varepsilon, 1)$, $\delta = (0, \lambda\varepsilon, (1 - \lambda)\varepsilon)$, $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon \ge 0$. Более того, ясно, что для всех достаточно малых «возмущений» функций полезности в данной экономике имеется бесконечное число (континуум) нестандартных равновесий с трансферабельными стоимостями. $\square$

Отметим ещё раз, что если в примере 3.4.1 рассмотреть «вариации» исходных запасов, то число равновесий будет конечным «почти всегда». Последнее должно быть ясно, ибо в этом случае в «возмущенной» модели условие Слейтера (здесь это $\omega_i \gg 0,\ \ i = 1, 2, 3$) будет выполнено «почти всегда», а значит, нестандартные равновесия с трансферабельными стоимостями являются обычными равновесиями (в силу утверждения 2.4.2 и ненасыщаемости предпочтений, что исключает $p = 0$ как цены равновесия). Именно поэтому, исследуя вопрос о конечности числа нестандартных равновесий с целью получить нетривиальный математический результат, мы должны использовать «вариации» функций полезности, а не исходных запасов (как это было сделано в работе *Debreu* (1970)).

В этом разделе вводится специфическое понятие нестандартного равновесия, аналогичное определению 3.1.1, но с конкретизированными трансферабельными стоимостями δ, которое далее условимся называть β-равновесием. Пусть стандартный вектор

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \gg 0$$

строго положителен и фиксирован.

Определение 3.4.2 *Распределение $x \in \prod_{\mathcal{I}} X_i$ называется состоянием β-равновесия экономики $\mathcal{E}^m(u)$, если найдутся такие $\nu \in {}^*\mathbb{R}$, $\nu \geq 0$ и $p \in {}^*Q$, что (x, p) является δ-равновесием при $\delta = \nu\beta$.*

Нижеследующее определение выделяет класс β-равновесий, конечность которых будет доказываться.

Определение 3.4.3 *Состояние β-равновесия $x \in \prod_{\mathcal{I}} X_i$ невырождено, если найдется такой $i_0 \in \mathcal{I}$, что выполнено включение $x_{i_0} \in \mathrm{int} X_{i_0}$.*

В дальнейшем всюду полагаем X_i и ω_i фиксированными для всех $i \in \mathcal{I}$. Основной результат будет установлен при следующих предположениях.

FA1. Для всех $i \in \mathcal{I}$ множество X_i — выпуклое, замкнутое, ограниченное снизу полиэдральное множество (многогранник), причем $\mathrm{int}\, X_i \neq \emptyset$.

FA2. Функции полезности u_i участников экономики определены и дважды непрерывно дифференцируемы на некоторой непустой открытой окрестности $\tilde{X}$ множества X.

Таким образом, рассматриваемое в работе пространство «экономик» — U — совпадает с $C^2(\tilde{X}, \mathbb{R}^n)$. На U мы будем рассматривать стандартную топологию равномерной сходимости на компактах: если $\{f_\xi\}_{\xi=1}^\infty \subset C^2(\tilde{X}, \mathbb{R}^n)$, то $f_\xi \to f_0 \in C^2(\tilde{X}, \mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда для всякого компакта $K \subset \tilde{X}$ имеем $f_\xi|_K \to f_0$ при $\xi \to \infty$ в норме $\|.\|_{C^2}$ пространства $C^2(K, \mathbb{R}^n)$. Норма $\|.\|_{C^2}$ определяется по формуле

$$\|g\|_{C^2(K,\mathbb{R}^n)} = \max\{\|g_i\|_{C(K)},\ i \in \mathcal{I},\ \|\tfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\|_{C(K)},\ i \in \mathcal{I},\ j \in \mathcal{I} \times \{1, \ldots, l\},$$
$$\|\tfrac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_s}\|_{C(K)},\ i \in \mathcal{I},\ j, s \in \mathcal{I} \times \{1, \ldots, l\}\},$$

где для $f \in C(K)$ полагается

$$\|f\|_{C(K)} = \max\{|f(x)| \mid x \in K\}.$$

Основным результатом является следующая

Теорема 3.4.1 *Для любого стандартного вектора $\beta \gg 0$ существует массивное (второй категории, следовательно, всюду плотное) множество $G \subset U$ такое, что для всякого $u \in G$ множество невырожденных состояний β-равновесия конечно.*

Доказательство этой теоремы, основанное на применении теорем Тома о плотности и открытости трансверсальных сечений, довольно громоздко и мы его опускаем (см. *Коновалов, Маракулин* (1997)).

Литература

Anderson, R. M. Non-standard analysis with applications to economics // Hildenbrand, W., Sonnenschein, H. (eds.): Handbook of Mathematical Economics. vol. IV. Amsterdam: North-Holland, 1992, p. 2145–2208

Arrow, K. J., Debreu, G. Existence of equilibrium for a competitive economy // Econometrica. **22** (1954). p. 265–290

Brown, D. J., Robinson A. The cores of large standard exchange economies // Journal of Economic Theory. **9** (1974). p. 245–254

Danilov, V. I., Sotskov, A. I. A generalized economic equilibrium // Journal of Mathematical Economics. **19** (1990). p. 341–356

Debreu, G. Economies with a finite set of equilibria // Econometrica. **38** (1970). p. 387–392

Dubey, P. Finitness and inefficiency of Nash equilibria / Cowles Foundation Discussion Paper № 508 R, 1978

Gale, D., Mas-Colell, A. An equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences // Journal of Mathematical Economics. **2** (1975). p. 9–15

Gale, D., Mas-Colell, A. Correction to an equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences // Journal of Mathematical Economics. **6** (1979). p. 297–298

Loeb, P. A. An introduction to non-standard analysis// Loeb P.A., Wolff M. (eds.): Nonstandard analysis for the working mathematician. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000

Marakulin, V. M. Equilibrium with nonstandard individual prices in economies with externalities / Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск. Препринт. 1990. № 31. 36 с. (in English)

Michael, E. Continuous Selections I // Annals of Mathematics. **63**, № 2 (1956). p. 361–382

Rashid, S. Economies with many agents: an approach using nonstandard analysis. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1987

Robinson, A. Non-standard analysis, studies in logic and foundation of mathematics. Amsterdam: North Holland, 1966

Ruys, P. H. M. Public goods and decentralization. The Netherland: Tilburg University Press, 1974, 235 p.

Алипрантис К., Браун Д., Бёркеншо О. Существование и опримальность конкурентного равновесия /Пер. с англ. М.: Мир, 1995. 384 с.

Брёнстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников / Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 240 с.

Берж К. Общая теория игр нескольких лиц / Пер. с франц. М.: Физматгиз, 1961. 126 с.

Девис М. Прикладной нестандартный анализ / Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 236 с.

Коновалов А. В., Маракулин В. М. О конечности экономических равновесий с нестандартными ценами / Ин-т математики СО РАН, Новосибирск. Препринт. 1997. № 39. 26 с.

Макаров В. Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства // Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. М: ВИНИТИ АН СССР. Т. 19 (1982). с. 23–58

Маракулин В. М. Неэффективность равновесия в гладких экономиках с функциями полезности общего вида // Оптимизация. 1981. Вып. № 27, с. 44–64. Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР

Маракулин В. М. Равновесие с нестандартными ценами и его свойства в математических моделях экономики / Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск. Препринт. 1988. № 18. 52 с.

Маракулин Валерий Михайлович, к.ф.-м.н.

РАВНОВЕСНЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИКИ С НЕСТАНДАРТНЫМИ ЦЕНАМИ

Теория Игр
пособие
часть III

Рецензент *В. И. Шмырёв*

Подписано в печать 2001.
Формат 60 × 84 1/16. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. Тираж 50 экз.
Заказ № Цена

Лицензия ЛР № 021285 от 6 мая 1998 г.
Редакционно-издательский центр НГУ
2 ул. Пирогова, Новосибирск 630090.