Совершенная конкуренция без условия Слейтера: эквивалентность нестандартного и договорного подхода

МАРАКУЛИН В. М.[*,†]

19 января 2018 г.

Аннотация

В неоклассической модели Эрроу — Дебре в условиях совершенной конкуренции *каждое* распределение из ядра допускает ценовую децентрализацию, т. е. является равновесным распределением. Более того, именно условия при которых ядро и равновесие совпадают и называются совершенной конкуренцией. Однако во всех известных в литературе моделях совершенной конкуренции соответствующая теорема о совпадении ядра и равновесия доказывается исключительно в рамках условия выживаемости (survival assumption), которое обеспечивает выполнение условия Слейтера в задаче потребителя. Насколько значимо это дополнительное требование и что будет если его отбросить? — эта проблема изучается в настоящей работе. Анализируется классический подход Дебре — Скарфа, который сравнивается с разработанной автором договорной моделью совершенной конкуренции. Показано, что именно договорной подход обеспечивает наиболее точную модель. Именно, это концепция нечётко договорного распределения — требуется стабильность относительно заключения нового договора при частично-асимметричном разрыве уже имеющихся. При слабых предположениях доказано, что эти распределения совпадают с равновесиями с нестандартными ценами. Распределения, которые при этом реализуются, вообще говоря отличаются от элементов классического ядра в условиях совершенной конкуренции (равновесия Эджуорта). Однако в случае, когда модельные предположения (неразложимость) обеспечивают условие выживаемости для нестандартных равновесий, договорной подход совпадает с классическим.

Ключевые слова и фразы: Равновесие с нестандартными ценами, условие выживаемости (Слейтера), совершенная конкуренция, нечёткое ядро и нечётко договорные распределения, равновесия Эджуорта

JEL Classification Numbers: C 62, D 51

[*]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга 4, 630090, Новосибирск; **e-mail**: marakulv@gmail.com

[†]Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, 630090, Новосибирск, Россия

Perfect competition without Slater condition: the equivalence of non-standard and contractual approach

MARAKULIN V. M.[1,2]

Abstract

In the neoclassical Arrow–Debreu model under the conditions of perfect competition *every* allocation from the core allows price decentralization, i. e. it is an equilibrium allocation. Moreover, precisely the conditions, under which the core and equilibria coincide, are called perfect competition. However, in all known models of perfect competition the exact theorem on the coincidence of the core and equilibria is proved exclusively under the survival assumption, which implies that Slater's condition for consumer's problem is fulfilled. How important is this additional requirement and what will happen if it is discarded? The paper is addressed to this problem; the classical Debreu–Scarf approach is analyzed and is compared with the contractual model of perfect competition developed by the author. It is shown that the most accurate model of this is provided by the contractual approach; namely, this is a concept of fuzzy contractual allocation which provides stability with respect to the signing of a new contract and an asymmetric partial break of already existing ones. Under weak assumptions, it is proved that these allocations coincide with those with nonstandard prices. In this case implemented allocations generally are different from the elements of the classical core in perfect competition conditions (Edgeworth equilibria). However, in the case when model assumptions (irreducibility) provide the survival assumption for non-standard equilibria, the contractual approach coincides with the classical one.

Keywords and Phrases: competitive equilibrium, survival assumption (Slater condition), perfect competition, fuzzy core and fuzzy contractual allocations, Edgeworth equilibria.

JEL Classification: C62, D51

[1]Sobolev Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, 4 Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, Russia, 630090, e-mail: marakulv@gmail.com

[2]Novosibirsk State University, Pirogova 2, 630090, Novosibirsk, Russia

Валерий Михайлович МАРАКУЛИН, д.ф.-м.н., доцент,
(1) ведущий науч. сотрудник
Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090, г. Новосибирск, Россия,
раб. +7 (383) 329-75-27;
(2) профессор Новосибирского государственного университета (НГУ),
ул. Пирогова, 2, 630090, г. Новосибирск, Россия;
E-mail: marakul@math.nsc.ru
E-mail: marakulv@gmail.com
Личная страница:
http://www.math.nsc.ru/∼mathecon

Valeriy Marakulin, Doctoral degree in Mathematics, Docent
Affiliations:
(i) Leading Researcher of Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
4 Acad. Koptyug avenue, 630090 Novosibirsk Russia;
(ii) Professor of Novosibirsk State University,
2 Pirogova st., Novosibirsk 630090;
E-mail: marakul@math.nsc.ru
E-mail: marakulv@gmail.com
Phone: +7 (383) 329 75 27
Fax: +7 (383) 333 25 98
Web page: www.math.nsc.ru/∼mathecon

Введение

В неоклассической постановке концепция конкурентного равновесия получает существенную поддержку в виде того (стабилизирующего) фактора, что никакая группа агентов (коалиция) не имеет стимулов к образованию автономной подэкономики (говорят, что равновесное распределение принадлежит ядру — т. е. не доминируется никакой коалицией). Более того, в условиях совершенной конкуренции *каждое* распределение из ядра допускает ценовую децентрализацию, — т. е. является равновесным распределением (это известная гипотеза Эджуорта). Таким образом, в идеальном мире экономики Эрроу — Дебре конкурентное равновесие, изначально определённое в сугубо дескриптивных категориях, получает нормативное обоснование как идеально стабильное (устойчивое в указанном смысле) распределение.

Современные представления о совершенной конкуренции восходят к классическим трудам Эджуорта (Edgeworth)[3], который на частном примере экономики с двумя продуктами и двумя агентами заметил и продемонстрировал важный факт сжатия кривой контрактов (ядра — в современной терминологии) при увеличении числа идентичных агентов и предположил, что это множество стягивается к равновесию. Бесплодные попытки развить этот подход и обосновать (а не постулировать) саму концепцию совершенной конкуренции продолжались вплоть до начала второй половины 20-го века, когда Дебре и Скарф (*Debreu, Scarf*, 1963) впервые строго математически обосновали взгляды Эджуорта. Они предложили подход, основанный на концепции реплицированной экономики: к заданной модели добавляются её точные копии (агенты из копии получают новые имена-индексы), которые объединяются в общую экономику и этот процесс копирования устремляется к бесконечности. Реплицированные таким образом распределения ресурсов исходной модели являются распределениями в реплицированной. Дебре и Скарф интересуются такими (исходными) распределениями, которые после реплицирования не теряют ключевого свойства стабильности — не существует группы агентов, для которой было бы выгодно отказаться от данного распределения и, организовав автономную экономику, найти для неё лучшее для себя перераспределение ресурсов. В рамках стандартных на тот момент предположений (позднее ослабленных) было доказано, что этим свойством стабильности обладают только распределения, отвечающие конкурентному равновесию.

В дальнейшем в теории общего равновесия появились и другие методы моделирования совершенной конкуренции. В первую очередь это работы Ауманна (*Aumann*, 1964), затем продолженные рядом других авторов, в которых исследовалась экономика с измеримым пространством экономических агентов с заданной на нём неатомической мерой. Коалиции представлены как измеримые подмножества пространства агентов, их ресурсы определяются как интеграл по этому множеству (измеримого) отображения, задающего начальные запасы. Так как для неатомической меры мера любого конечного множества равна нулю, то и вклад отдельного индивидуума в коалиционные возможности будет нулевым. При прочих более-менее стандартных предположениях Ауманн доказывает, что в этой модели ядро и равновесие совпадают — весьма нетривиальный результат, в доказательстве которого применяется (с этой целью разработанная Ауманном) сложная теория интегрирования точечно-множественных отображений (см. также *Гильдебрант* (1986)). Таким

[3] В первую очередь это *Математическая психика* (“Mathematical Psychics”, 1881).

образом, в отличии от Дебре и Скарфа, где был представлен асимптотический результат, Ауманн сразу работает с «предельной экономикой», которая и представляет модель совершенной конкуренции, где отдельно взятый индивид пренебрежимо мал и не способен повлиять на выбор итогового распределения.

Третий метод моделирования совершенной конкуренции появляется в работе Брауна и Робинсона (*Brown, Robinson*, 1974), он основан на применении методов нестандартного анализа и состоит в рассмотрении модели экономики с гиперконечным множеством экономических агентов. Здесь постулируется, что общее число экономических агентов равно *бесконечному* натуральному $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, а исходные запасы $\mathbf{e}_i$ индивида $i \in \{1, \ldots, n\} = \mathcal{I}$ по норме ограничены *конечным* стандартным $m(i) \in \mathbb{N}$. Таким образом, доля индивида i в общих ресурсах экономики является бесконечно малой: $\mathbf{e}_i/n \approx 0$, $i \in \mathcal{I}$. Вновь авторы доказывают совпадение равновесий с распределениями из ядра. Подробное описание нестандартного подхода можно найти в *Rashid* (1987), *Anderson* (1992). Однако нужна ли в действительности столь сложная и продвинутая математика, чтобы обосновать совершенную конкуренцию?

Четвёртый и ключевой для данной работы метод был предложен автором при разработке договорного подхода. Бартерный договор это любой допустимый обмен, реализованный между экономическими агентами-членами некоторой коалиции S, формально представленный вектором $v = (v_i)_{\mathcal{I}}$, $\sum_S v_i = 0$, $v_i = 0\ \forall i \notin S$. Добавление договора v к текущему распределению $x = (x_i)_{\mathcal{I}}$ образует новое распределение $z = (z_i)_{\mathcal{I}} = v + x = (v_i + x_i)_{\mathcal{I}}$. Договоры (контракты) можно объединять, разрывать и заключать новые (обычно взаимовыгодные). Конечное множество договоров образует сеть если после разрыва любого набора заключённых ранее договоров образуется допустимое распределение. Понятие коалиционного доминирования переносится на доминирование между сетями договоров, что позволяет квалифицировать их по признаку стабильности. Допущение разрыва договоров играет здесь ключевую роль, причём разрыва частичного (замещения контракта $v = (v_i)_{\mathcal{I}}$ контрактом $w = tv = (tv_i)_{\mathcal{I}}$, $0 \leq t \leq 1$) и даже асимметричного (на стадии планирования новых сделок — теперь уже не контрактом $w = (t_i v_i)_{\mathcal{I}}$, $0 \leq t_i \leq 1\ \forall i$). Ранее было показано (напр. *Маракулин* (2011, 2014)), что посредством введения частичного разрыва договоров в модели задаются условия совершенной конкуренции — сети договоров, стабильные относительно (одновременного) заключения нового контракта и частичного разрыва имеющихся, реализуют равновесные распределения. При этом собственно метод моделирования совершенной конкуренции существенно проще известных ранее в литературе. Более того, теперь равновесное распределение и распределения из ядра становятся объектами одного порядка: реализуются сетью договоров, стабильной в специфическом смысле, причём стабильность у равновесия заведомо более сильная.

При каких прочих условиях, помимо собственно *конструкции* модели с совершенной конкуренцией, имеет место факт совпадения ядра и равновесия, что и означает реализацию условий совершенной конкуренции? В сущности это почти те же условия при которых в современной литературе доказывается теорема существования равновесия: выпуклость множеств $\mathcal{P}_i(x_i)$ всех наборов предпочитаемых потребительских благ даёт описание элементов из ядра в виде (нетривиального) квазиравновесия — это суррогат равновесия такой, что $\exists p \neq 0 : py_i \geq px_i = p\mathbf{e}_i$ $\forall y_i \in \mathcal{P}_i(x_i)$, $\forall i$. Далее на модель накладываются условия, обеспечивающие превращение квазиравновесия в равновесие, обычно это так называемое условие выживаемости (survival assumption). Это то, что для цен квазиравновесия обеспечивает выполнение условия Слейтера в задаче потребителя: $\inf_{X_i} y_i p < \mathbf{e}_i p$, где X_i — потребительское множество агента i (нужна также открытость $\mathcal{P}_i(x_i)$). Это обеспечивает предположение о «неразложимости» (нередуцируемости) экономики (см. основной текст, определение 8) — наиболее значимо из известных в литературе.

Итак, совпадение ядра и равновесия при совершенной конкуренции и факт существования равновесия доказаны в рамках условия выживаемости. Однако для существования ядра это условие не играет никакой роли — его значение исключительно в том, чтобы обеспечить существование стандартного равновесия. В то же время при его отсутствии существуют равновесия с нестандартными ценами, однако совпадают ли эти равновесия в условиях совершенной конкуренции с распределениями из ядра? — это вопрос, на который нацелено исследование данной работы. Ответ следующий: в экономике без условия выживаемости равновесия с нестандартными ценами — концепция, разработанная автором, см. *Маракулин* (1988, 2012) — и только они являются нечётко договорными распределениями — это распределения, реализованные сетью договоров, стабильных относительно заключения нового взаимовыгодного контракта при одновременном несимметричном разрыве текущих договоров. Таким образом, в работе установлено, что договорная модель является наиболее точным методом моделирования совершенной конкуренции.

Работа организована следующим образом. В первом разделе даётся (очень краткое) введение в нестандартный анализ, с тем чтобы познакомить с читателя с этим разделом математического анализа, напомнить и ввести обозначения. Во втором разделе формулируются основные концепции теории равновесия, исследуемые в данной работе: модель экономики чистого обмена, понятия конкурентного равновесия и ядра, а также равновесия Эджуорта и его аналогов и концепция нечётко договорного распределения. Третий раздел посвящён анализу концепции равновесия с нестандартными ценами; четвёртый — нечётко договорных распределений и их стоимостной характеризации. Пятый раздел содержит основные результаты об эквивалентности нестандартных и нечётко договорных распределений, а также анализ равновесий Эджуорта. Заключение завершает работу.

1 Методы нестандартного анализа

Нестандартный анализ, иногда называемый также инфинитезимальным анализом, — это, скорее, математическая техника, нежели самостоятельная теория. Нестандартный анализ оперирует с идеальными элементами, которые могут быть как бесконечно близки к интересующему объекту, так и бесконечно далеки от него. В данном разделе я попробую объяснить смысл этой теории, хотя, конечно, для читателя совершенно с ней незнакомого, понять доказательства будет непросто. С её деталями можно ознакомится в *Девис* (1980), *Anderson* (1992), *Loeb* (2000).

Большинство из приложений нестандартного анализа основывается на идее гиперконечного множества — это множество, которое может быть занумеровано нестандартными натуральными числами, не превосходящими некоторое фиксированное нестандартное натуральное число. Используя это понятие, можно аппроксимировать бесконечные (и даже бесконечномерные) объекты множествами, к которым применимы стандартные заключения о конечных объектах. В частности, в экономикоматематической литературе имеется значительное количество работ, использующих идею гиперфинитного множества — это в основном результаты, в которых исследуются «большие» модели экономики (с бесконечным числом агентов или продуктов). Например, таким способом моделируются ситуации, отражающие условия совершенной конкуренции, — это модели, в которых имеется «много» индивидуумов, каждый из которых имеет пренебрежимо малое влияние на экономику в целом. Такого рода постановки приводят к рассмотрению моделей с гиперфинитным множеством экономических агентов, оснащённых стандартно ограниченными возможностями влиять на текущую ситуацию (в модели обмена — околостандартными векторами исходных запасов). Первый результат этого типа появился в пионерской работе Брауна и Робинсона (*Brown, Robinson*, 1974), в которой вводится и изучается гиперконечная экономика чистого обмена. Описание достижений в этой области равновесного анализа можно найти в *Rashid* (1987) и *Anderson* (1992). Имеется также множество других приложений методов нестандартного анализа к математической экономике и теории игр. В их числе работы по моделям с перекрывающимися поколениями экономических агентов, с бесконечным временным горизонтом, экономикам с общественными благами, бескоалиционным играм с «большим» числом игроков и т. д. С помощью методов нестандартного анализа также разрешается проблема существования экономического равновесия при отсутствии в модели (очень нереалистичного) условия Слейтера в задаче потребителя или каких-либо его аналогов (survival assumption), см. *Маракулин* (1988, 2012).

Теория нестандартного анализа работает с двумя структурами — *стандартным универсумом* U и *нестандартным универсумом* ${}^*U$, которые связывает между собой взаимооднозначное отображение (инъекция) $* : U \to {}^*U$. Кроме того, имеется формальный язык, который применяется для формулировки разного рода утверждений в каждой из этих структур. Показано, что множество ${}^*U$ содержит огромное количество новых идеальных объектов, в том числе бесконечно малые и бесконечно большие числа. Элементы ${}^*U$ вида ${}^*x = *(x)$ для некоторого $x \in U$ называются стандартными; прочие элементы ${}^*U$ называются нестандартными. Множество $S \subset {}^*U$ элементов нестандартного универсума называется *внутренним*, если S само является элементом нестандартного универсума; в противном случае S называется *внешним* множеством. Внешние множества существуют — уже совокупность натуральных чисел является внешним множеством. Множество ${}^*\mathbb{R}$ является нестандартным расширением числовой прямой и включает в себя бесконечно малые и бесконечно большие числа, имеющее те свойства числовой прямой, которые выражаются в определённом формальном языке. Величина $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ бесконечно малая, если $|\xi| < 1/n$ для каждого натурального $n \in \mathbb{N}$. Множество всех таких чисел называется монадой (нуля) $\mu(0)$, причём $\mu(0) \ni \xi \iff \xi \approx 0$. Монада $x \in {}^*\mathbb{R}$ это $\mu(x) \ni y \iff |x - y| \approx 0$. Стандартной частью $\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$ числа $x \in {}^*\mathbb{R}$ называется действительная величина такая, что $|\mathrm{st}(x) - x| \approx 0$. Числа из ${}^*\mathbb{R}$, имеющие стандартную часть, называются околостандартными (при $\xi \approx 0$, $\xi \neq 0$ величина $1/\xi \approx \infty$ существует и не имеет стандартной части). Понятия монады, стандартной части и т. д. переносятся на любые топологические пространства; отображение $*(\cdot)$ сохраняет векторные и алгебраические свойства объектов стандартной математики.

Имеется три основных инструмента — вида математической техники — нестандартного анализа. Первый из них — это *принцип переноса*, который, грубо говоря, утверждает, что любое утверждение, истинное в стандартном универсуме, является истинным в нестандартном, и наоборот. Другая техника — это *теорема направленности.* Эта теорема гарантирует, что расширенная структура содержит достаточно много идеальных элементов и, в частности, включает в себя все мыслимые пополнения, компактификации и т. д. Третья техника — это принцип доказательства от противного в предположении, что то или иное множество является *внутренним.* Сводка некоторых востребованных в работе результатов нестандартного анализа содержится в Приложении.

2 Модель равновесного рынка: нестандартные цены или стабильные системы договоров?

Рассмотрим стандартную модель экономики обмена (нет производства). В этой модели $L = \mathbb{R}^l$ обозначает (конечномерное) *пространство продуктов* и имеется (конечное) множество агентов (торговцев или потребителей) $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$. Потребитель $i \in \mathcal{I}$ стандартным образом характеризуется собственным потребительским множеством $X_i \subset L$, вектором исходных запасов $\mathbf{e}_i \in L$ и отношением предпочтения, описанным как точечно-множественное отображение $\mathcal{P}_i : X_i \rightrightarrows X_i$, где множество $\mathcal{P}_i(x_i)$ содержательно означает совокупность всех потребительских наборов, строго предпочитаемых агентом i набору x_i. Будет использоваться также обозначение $y_i \succ_i x_i$, которое по определению эквивалентно $y_i \in \mathcal{P}_i(x_i)$. Таким образом, рассматриваемая экономика чистого обмена может быть представлена в виде тройки

$$\mathcal{E}^m = \langle \mathcal{I}, L, (X_i, \mathcal{P}_i, \mathbf{e}_i)_{i \in \mathcal{I}} \rangle.$$

Обозначим символом $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ вектор исходных запасов (всех) торговцев рассматриваемой модели, положим $\mathbb{X} = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ и определим

$$\mathcal{A}(\mathbb{X}) = \{\, x \in \mathbb{X} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{e}_i \,\} \ -$$

это множество всех *достижимых распределений* (состояний) модели $\mathcal{E}^m$.

В дальнейшем всегда предполагается, что $\mathcal{E}^m$ удовлетворяет следующему предположению.

(**A**) *Для каждого $i \in \mathcal{I}$: множество X_i выпуклое, замкнутое, $\mathcal{P}_i(x_i) \cup \{x_i\}$ и $\mathcal{P}_i(x_i)$ выпуклы и $x_i \notin \mathcal{P}_i(x_i)$ для каждого $x_i \in X_i$.*

Заметьте, что в силу (**A**) предпочтения могут быть насыщаемые, т. е. возможно $\mathcal{P}_i(x_i) = \emptyset$ для некоторых i и $x_i \in X_i$. Однако если $\mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset$, то предпочтения *локально ненасыщаемые* в точке x_i.

Наиболее значимые результаты настоящей работы получены для модели экономики, в которой потребительские множества полиэдральные (многогранные, т. е. являются пересечением конечного числа полупространств). Поэтому для упрощения изложения дадим следующее определение.

Назовём модель $\mathcal{E}^m$ ***полиэдральной***, если все множества X_i полиэдральные. Наряду с этим мы обычно будем предполагать, что $\mathbf{e}_i \in X_i$ и $\mathcal{P}_i(x_i)$ открыты в X_i $\forall i \in \mathcal{I}$.

Данная модель является частным случаем модели Эрроу — Дебре; напомним далее известные в литературе концепции конкурентного и кооперативного равновесия, а также представление совершенной конкуренции.

2.1 Конкурентное равновесие

Определение 1 *Пара* (x, p), *где* $x \in \mathbb{X} = \prod_{\mathcal{I}} X_i$ *и* $p \neq 0$ *— линейный функционал над* L, *называется квазиравновесием модели* $\mathcal{E}^m$, *если* x *сбалансирован, т. е.* $\sum_{\mathcal{I}} x_i = \sum_{\mathcal{I}} \mathbf{e}_i$, *и*

$$\langle p, \mathcal{P}_i(x_i)\rangle \geq px_i = p\mathbf{e}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}. \tag{1}$$

Квазиравновесие такое, что $x_i' \in \mathcal{P}_i(x_i)$ *влечёт* $px_i' > px_i$[4] *называется вальрасовским или конкурентным равновесием.*

Ясно, что если определить *бюджетное множество* потребителя $i \in \mathcal{I}$:

$$B_i(p) = \{y \in X_i \mid py \leq p\mathbf{e}_i\},$$

то (в строгой форме неравенства!) условие равновесия (1) можно переписать в виде

$$\mathcal{P}_i(x_i) \cap B_i(p) = \emptyset.$$

При всех своих достоинствах данное классическое понятие равновесия обладает одним существенным недостатком: оно может не существовать при, казалась бы, всех нужных (и «естественных») предположениях, обеспечивающих непрерывность, выпуклость и компактность необходимых модельных параметров. Причина этому в возможном нарушении «условия Слейтера» в задаче потребителя: чтобы обеспечить его, приходится накладывать дополнительные жесткие требования. Причём эта «проблема условия Слейтера» проявляется (хотя и в несколько ином виде) и в ряде других более общих моделей — например, для экономики с общественными благами. По этой причине в теории общего равновесия рассматривается ряд обобщённых концепций; одним из наиболее продуктивных подходов здесь является концепция равновесия с нестандартными ценами, см. *Маракулин* (2012), предварительному анализу которой посвящён данный раздел.

С целью пояснить исследуемую проблему мы сначала рассмотрим один показательный пример, заимствованный из *Маракулин* (1988) (см. *Маракулин* (2012), пример 1.2.1 на с. 89), а уже затем изложим формальное понятие равновесия с нестандартными ценами.

Пример 1 В модели $\mathcal{E}^m$ имеется два агента и два типа продуктов. При этом:

$$X_1 = \{(x, y) \mid (0, 0) \leq (x, y) \leq (10, 10)\},$$

$$X_2 = X_1 \cap \{(x, y) \mid y \geq 4 - x\},$$

$$u_1(x, y) = 16 - (x - 4)^2 - (y - 4)^2, \quad u_2(x, y) = y,$$

$$\mathbf{e}_1 = (1, 3), \quad \mathbf{e}_2 = (2, 2).$$

[4] Далее это зачастую записывается в виде $\langle p, \mathcal{P}_i(x_i)\rangle > px_i$.

Рис. 1 иллюстрирует данную постановку. Рассмотрим далее имеющиеся возможности для нахождения того, что можно было бы назвать равновесием. При ценах $p = (p^x, p^y)$ таких, что $p^x \leq 0$, оптимальная реакция 1-го агента такова, что его спрос на первый товар ≥ 4, т. е. больше общего количества данного товара. Поэтому ни равновесие, ни даже полуравновесие[5] в этом случае невозможно. При $p^y \leq 0$ с нереальным запросом на товар y выступает агент 2: $y_2 = 10$. Следовательно, должно быть $p \gg 0$. При $p^y \gtrsim p^x$ оптимальная реакция 2-го агента совпадает с $\mathbf{e}_2$, а 1-го такова, что $x_1 > 1$, т. е. баланс снова недостижим даже в форме неравенства. При $p^x \gtrsim p^y$ оптимальной реакцией агента 2 будет $(0, y_2)$, где $y_2 \geq 4$, а оптимальная реакция 1-го такова, что суммарный спрос на второй продукт > 5 и превышает предложение. Последнее следует из того, что все наборы (x_1, y_1), которые лучше $\mathbf{e}_1$ и такие, что $x_2 \leq 1$ (чтобы выдерживался баланс), при этих ценах находятся вне бюджетного множества участника 1. При ценах $p = (1, 1)$ так же, как и при нестандартных ценах $p = (1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$, $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon > 0$, спрос на y выше предложения. Цены $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ дают превышение спроса на x над его предложением. Все случаи, когда нестандартность в ценах играет роль, исчерпываются двумя вышеуказанными (в силу однородности доходов). В остальных ситуациях бюджетные множества участников при ценах p и $\mathrm{st}p$ совпадают[6] (см. *Маракулин* (2012), утверждение 1.1.5 на с. 64). Таким образом, при любых ценах (в том числе нестандартных) условие сбалансированности итогового распределения нарушается. Тем не менее в этой экономике есть состояние нестандартного равновесия: $(x_1, y_1) = (2, 2)$, $(x_2, y_2) = (1, 3)$, реализующееся при ценах $p = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon \neq 0$ и том условии, что к доходам 2-го агента (правая часть бюджетного ограничения) добавить величину 2ε. В целом такая конструкция называется равновесием с нестандартными ценами и трансферабельными стоимостями $\delta = (0, 2\varepsilon)$ (равновесие будет также при $\delta = (\varepsilon', 2\varepsilon)$ и любых $\varepsilon \approx \varepsilon' \approx 0$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$).

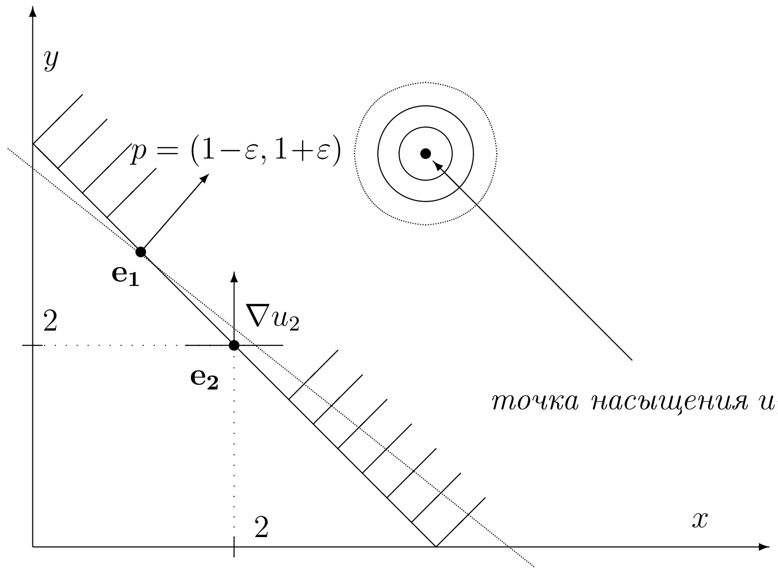

Рис. 1: *Равновесие с нестандартными ценами и трансфер. стоимостями*

[5] Баланс в форме неравенства: $\sum_{\mathcal{I}} x_i \leq \sum_{\mathcal{I}} \mathbf{e}_i$.

[6] Это ситуация, в которой при ценах $\bar{p} = \mathrm{st}p \neq 0$ в задаче потребителя выполнено условие Слейтера: $\inf_{X_i} \bar{p} x_i < \bar{p}\mathbf{e}_i$.

Как мы видим, для того чтобы определить в модели экономики обоснованное равновесное распределение, нам потребовалось прибегнуть к весьма нетривиальному стоимостному механизму, использующему нестандартные цены и трансферабельные стоимости. Однако, с другой стороны, то же распределение можно достичь, если просто позволить агентам обмениваться продуктами (а как это можно запретить?). Действительно, в (равновесном) состоянии $(x_1, y_1) = (2, 2)$, $(x_2, y_2) = (1, 3)$ агент 1 всего лишь выменял у агента 2 единицу 1-го продукта на единицу 2-го, и при этом оба существенно повысили свою полезность. Подобного рода операция называется заключением взаимовыгодного бартерного контракта (договора) и здесь мы приходим к понятию стабильной сети договоров, развитой в рамках общей теории договоров (разрабатывается автором). ■

В современной теории договоров (бартерное взаимодействие) существует множество типов стабильных систем (сетей) договоров (слабых и сильных), но ключевым моментом в этой теории является возможность разрыва договоров. В различных постановках этот разрыв может быть разным — полный, частичный, асимметричный частичный и даже разрыв договоров из эквивалентной (в некотором смысле) сети договоров. Предыдущие исследования показывают, что для описания равновесия наиболее адекватной формой договорного взаимодействия является концепция нечётко договорного распределения, суть которой состоит в том, что при договорном взаимодействии при заключении нового взаимовыгодного контракта одновременно допускается асимметричный частичный разрыв договоров — стабильные распределения в данном смысле (не допускающие такого рода манипуляций) и называются нечётко договорными, см. *Маракулин* (2011); *Marakulin* (2013). В разделе 2.3 этот подход будет описан формально. Однако в каких именно модельных рамках имеет место эквивалентность между равновесием и договорными распределениями? Имеется ли какое-нибудь различие между распределениями, соответствующими «нестандарным равновесиям» и «нечётко договорным»?

Рассмотрим далее формальную концепцию равновесия с нестандартными ценами и трансферабельными стоимостями в простейшем случае модели обмена с частной собственностью, см. *Маракулин* (1988, 2012).

В работе регулярно используется следующие понятия и обозначения: для *внутреннего* подмножества $A \subset {}^*L$ определены стандартная часть и стандартная внутренность, соответственно,

$$\mathrm{st}A = \{y \in L \mid \mu(y) \cap A \neq \emptyset\}, \quad \mathrm{si}A = \{y \in L \mid \mu(y) \subset A \neq \emptyset\},$$

где посредством $\mu(y)$ обозначена *монада* точки $y \in L$. Известно, что $\mathrm{st}A$ — замкнутое и $\mathrm{si}A$ — открытое множества (несложно, напр. утв. 2.14 из *Маракулин* (1988)).

Для данного $p \in {}^*L$ и $\delta \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, $\delta \geq 0$ рассмотрим нестандартные бюджетные множества ${}^*B_i(p, \delta_i)$, определяемые ограничением $px' \leq p\mathbf{e}_i + \delta_i$, $x' \in {}^*X_i$, т. е. положим

$${}^*B_i(p, \delta_i) = \{x' \in {}^*X_i \mid px' \leq p\mathbf{e}_i + \delta_i\}, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Заметьте, что это внутреннее подмножество в ${}^*X_i$. Использованный здесь вектор $\delta \geq 0$, определяющий стоимости, добавленные к правым частям бюджетных ограничений, называется *схемой перераспределения избыточных стоимостей.*

Определение 2 *Состояние $x \in \mathbb{X}$ называется равновесием с нестандартными ценами $p \in {}^*L'$ и фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей $\delta \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, $\delta \geq 0$, если выполнены условия:*

(i) $x_i \in \mathrm{st}^*B_i(p,\delta_i) \ \ \forall i \in \mathcal{I}$;

(ii) $\mathcal{P}_i(x_i) \cap \mathrm{st}^*B_i(p,\delta_i) = \emptyset \ \ \forall i \in \mathcal{I}$;

(iii) $\sum_{\mathcal{I}} x_i = \sum_{\mathcal{I}} \mathbf{e}_i$.

Для краткости тройка (x,p,δ) также называется δ-равновесием с нестандартными ценами. Иллюстрацией определения 2 служит приведённый выше пример 1 экономики обмена. Следующая теорема обеспечивает существование нестандартных δ-равновесий.

Теорема 1 *Пусть* $\mathcal{E}^m$ *удовлетворяет* $(\mathbf{A})$, $\mathbf{e}_i \in X_i \ \forall i \in \mathcal{I}$ *и* $\mathcal{A}(\mathbb{X})$ *ограничено. Пусть также для каждого* $i \in \mathcal{I}$ *предпочтения* $\mathcal{P}_i(\cdot)$ *имеют открытый график*[7] *в* $X_i \times X_i$. *Тогда для каждого* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ *такого, что* $\varepsilon \gg 0$, *существуют* δ*-равновесия такие, что* $\delta = \tau \cdot \varepsilon$ *при некотором нестандартном* $\tau \geq 0$.

Пример 1 и многие другие показывают, что, для существования *стандартных* равновесий предположений, приведённых в теореме 1, недостаточно, однако нестандартные существуют. Причина этому конечно в том, что предположение $\mathbf{e}_i \in X_i$ не обеспечивает выполнение «условия Слейтера» — $\inf_{X_i} px_i < p\mathbf{e}_i$ — в задаче потребителя для всех потенциально равновесных (стандартных) цен $p \in L'$. Для существования стандартного равновесия с трансферабельными стоимостями достаточно постулировать $\mathbf{e}_i \in \mathrm{int}\, X_i \ \forall i \in \mathcal{I}$. С содержательной точки зрения это, конечно, является чрезмерным требованием (фактически означает, что каждый агент имеет ненулевые запасы каждого продукта). Подробности и доказательство теоремы 1 можно найти в *Маракулин* (2012).

Замечание 1 Термин «равновесие с нестандартными ценами и фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей» аппелирует к тому, что в любом равновесии есть финансовый баланс $\sum_{\mathcal{I}} px_i = \sum_{\mathcal{I}} p\mathbf{e}_i$ и, следовательно, агент i может потратить больше денег чем у него есть только в том случае, когда в его распоряжение поступили деньги $px_i - p\mathbf{e}_i = \delta_i > 0$, полученные от агентов, которые в них не нуждаются. В стандартной постановке это могут быть только насыщенные агенты. В равновесии с нестандартными ценами ситуация тоньше и неравенство $px_j < p\mathbf{e}_j$ может появиться даже в случае ненасыщенных индивидов $j \in \mathcal{I}$. Это возможно в случае когда величины $\delta_i > 0$ бесконечно малые, образованные из остаточных (избыточных!) стоимостей $\gamma_j = p\mathbf{e}_i - px_j > 0$ индивидов, для которых любое увеличение полезности возможно только для «бесконечно б*о*льших» стоимостей (при их делении на γ_j получаем бесконечно большую величину). Таким образом, невостребованные избыточные ресурсы как-то собираются и передаются заинтересованным в них агентам. В теореме 1 это перераспределение между агентами может осуществляться в любых наперёд заданных пропорциях, заданных посредством вектора $\varepsilon \gg 0$. Тот факт, что к правой части каждого агента что-то добавляется иллюзорный — для насыщенных индивидов эти деньги не расходуются, а как-то передаются прочим — по «схеме» $\varepsilon \gg 0$. В итоге агенты дополнительно получают стоимостные величины $\delta_i = \tau\varepsilon_i \geq 0$, где $\tau \geq 0$ можно интерпретировать как

[7] График отображения $\mathcal{P}_i : X_i \Rightarrow X_i$ это множество $Gr(\mathcal{P}_i) = \{(x_i, y_i) \in X_i \times X_i \mid y_i \in \mathcal{P}_i(x_i)\}$.

цену избыточных финансовых ресурсов. Теорема 1 говорит о том, что такие равновесия существуют при любом $\varepsilon \gg 0$ и, более того, как это доказано в *Konovalov, Marakulin* (2006), гарантировать (почти всегда) конечное число равновесий можно только для фиксированной схемы перераспределения, иначе их может оказаться бесконечно много. Соответствующий пример (устойчивый относительно вариаций полезностей) имеется в *Konovalov, Marakulin* (2006); *Маракулин* (2012).

2.2 Ядро, реплики и равновесия Эджуорта

Прежде всего рассмотрим формальные определения. Напомним, что распределение $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ *доминируется* (блокируется по) коалицией (непустой) $S \subset \mathcal{I}$, если существует такой $y^S \in \prod_{i \in S} X_i$, что $\sum_{i \in S} y_i^S = \sum_{i \in S} \mathbf{e}_i$ и $y_i^S \succ_i x_i$ для каждого $i \in S$.

Ядро модели $\mathcal{E}^m$ — обозначенное как $\mathcal{C}(\mathcal{E}^m)$ — это множество всех $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$, которые не блокируются никакой коалицией.

Концепция ядра экономики формализует идею того, что не существует группы агентов (коалиции), у которой были бы выявленные стимулы к образованию автономной подэкономики: распределение из ядра разрушает такого рода деструктивную кооперацию и экономическая система сохраняет целостность. В общей теории равновесия хорошо известно (несложно доказать), что конкурентное равновесие всегда принадлежит ядру и, следовательно, обладает теми же свойствами кооперативной стабильности. Проблема однако в том, чтобы установить обратное включение. Именно, требуется выявить условия, при которых в модели *каждый элемент* ядра является равновесием, — это и будут условия *совершенной конкуренции.*

Классическим и исторически первым методом моделирования совершенной конкуренции является подход, основанный на понятии реплицированной модели экономики. Именно таким способом Дебре и Скарф сумели впервые обосновать гипотезу Эджуорта, на которой основываются современные представления о совершенной конкуренции. В *Debreu, Scarf* (1963) было доказано, что ядро стягивается к равновесию если (грубо) объём реплики стремится к бесконечности. В последствии подход Дебре и Скарфа обобщался и развивался многими авторами, причём на этом пути были разработаны не только новые методы моделирования совершенной конкуренции, но и получены наиболее мощные теоремы существования равновесия в моделях экономики с бесконечномерным пространством продуктов, см. *Алипрантис и др.* (1989), *Маракулин* (2012). Ниже описывается базовая конструкция этого подхода.

Репликой модели $\mathcal{E}^m$ объёма $r \in \mathbb{N}$ (т. е. r-кратной репликой) называется модель $\mathcal{E}_r^m$, составленная из r штук подэкономик, каждая из которых совпадает с исходной моделью $\mathcal{E}^m$. Иначе говоря, параметры реплицированной модели получены как r-кратное копирование параметров исходной экономики. Более точно, модель $\mathcal{E}_r^m$ включает в себя $\mathcal{I}_r = \{(i,m)\}_{m=1, i \in \mathcal{I}}^{m=r}$ потребителей, которые обладают тем свойством, что их параметры (потребительские множества, предпочтения, исходные запасы и др.), имеющие двойной индекс — (i,m), полностью определяются их «типом» в исходной модели, т. е. первым индексом. При этом предпочтения потребителей также задаются точечно-множественным отображением $\mathcal{P}_{im}(\cdot) = \mathcal{P}_i(\cdot)$, но теперь уже определённым и принимающим значения в X_{im} для всех $m = 1, 2, \ldots, r$.

Распределению $x = (x_i)_{\mathcal{I}}$ модели $\mathcal{E}^m$ поставим в соответствие распределение $x^r = (x_{im}^r)$ из реплики по правилу $x_{im} = x_i \; \forall i, m$. Подобным образом, распределению $(x_{im})_{\mathcal{I}_r}$ из реплики можно поставить в соответствие распределение в исходной модели, если $x_{im} = x_{im'}$ для всех $i \in \mathcal{I}$, $m, m' = 1, \ldots, r$, т. е. если агенты одного типа потребляют одинаковые наборы благ[8]. Следуя *Алипрантис и др.* (1989), определим основной предмет в анализе совершенной конкуренции — концепцию равновесия по Эджуорту.

Определение 3 *Достижимое распределение $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ называется равновесием Эджуорта, если $x^r \in \mathcal{C}(\mathcal{E}_r^m)$ для каждого натурального $r \geq 1$. Совокупность всех равновесий Эджуорта обозначено как $\mathcal{C}^e(\mathcal{E}^m)$.*

Одним из эффективных инструментов в анализе совершенной конкуренции является понятие нечёткого ядра, определение и основные свойства которого приводятся ниже. Как мы увидим в дальнейшем, это формально другое понятие реализует распределения аналогичные равновесиям Эджуорта, т. е. математически эти концепции эквивалентны. Напомним, что любой вектор

$$t = (t_1, \ldots, t_n) \neq 0, \quad 0 \leq t_i \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

отождествляется с *нечёткой коалицией*, где вещественные t_i интерпретируются как мера участия потребителя i в данной коалиции.

Определение 4 *Говорят, что нечёткая коалиция t доминирует (блокирует) распределение $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$, если найдётся такой $y^t \in \prod_{\mathcal{I}} X_i$, что*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} t_i y_i^t = \sum_{i \in \mathcal{I}} t_i \mathbf{e}_i \iff \sum_{i \in \mathcal{I}} t_i (y_i^t - \mathbf{e}_i) = 0 \tag{2}$$

и при этом

$$y_i^t \succ_i x_i, \quad \forall i \in \operatorname{supp}(t) = \{i \in \mathcal{I} \mid t_i > 0\}. \tag{3}$$

Множество всех неблокируемых по нечётким коалициям достижимых состояний обозначается $\mathcal{C}^f(\mathcal{E}^m)$ и называется нечётким ядром модели $\mathcal{E}^m$.

Для ненасыщенных предпочтений, т. е. когда $\mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset$, $\forall i \in \mathcal{I}$, ситуацию нечёткого доминирования можно переписать в эквивалентном виде[9]:

$$0 \in \sum_{i \in \mathcal{I}} t_i (\mathcal{P}_i(x_i) - \mathbf{e}_i).$$

Таким образом, если $\mathcal{E}^m$ удовлетворяет (**A**) (выпуклые предпочтения), то условие $x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E})$ эквивалентно[10]

$$0 \notin \operatorname{co}[\bigcup_{\mathcal{I}} (\mathcal{P}_i(x_i) - \mathbf{e}_i)], \tag{4}$$

откуда, в частности, (после применения теоремы отделимости) следует тот факт, что элементы нечёткого ядра являются квазиравновесиями. В *Маракулин* (2011) была предложена другая характеризация нечёткого ядра и была доказана следующая

[8] В теории равновесия это известно как требование “equal treatment”.

[9] Допуская небрежность, здесь и ниже в формулах мы отождествляем вектор с содержащим его одноэлементным множеством.

[10] Ибо доминирование по произвольным нечётким коалициям эквивалентно доминированию по нормированным коалициям.

Лемма 1 *Если выполняется* (**A**), *то распределение* $x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E}^m)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\prod_{\mathcal{I}} \mathrm{co}(\mathcal{P}_i(x_i) \cup \{\mathbf{e}_i\}) \bigcap \{(z_1, \ldots, z_n) \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}\}. \tag{5}$$

Заметьте, что характеризация (5) имеет место и для насыщенных предпочтений.

Результат следующей леммы хорошо известен в теории равновесия, он приводит анализ равновесий Эджуорта к анализу элементов нечёткого ядра.

Лемма 2 *Если выполнено* (**A**) *и* $\mathcal{P}_i(x_i)$ *открыты в* X_i $\forall i \in \mathcal{I}$, *то*

$$\mathcal{C}^f(\mathcal{E}^m) = \mathcal{C}^e(\mathcal{E}^m).$$

Доказательство леммы 2. Сначала покажем $\mathcal{C}^f(\mathcal{E}^{in}) \subseteq \mathcal{C}^e(\mathcal{E}^{in})$. С этой целью предположим, что для некоторого r коалиция $S \subseteq \mathcal{I} \times \{1, \ldots, r\}$ доминирует распределение x^r при $x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E}^m)$. Пусть $\mathcal{I}(S) \subseteq \mathcal{I}$ — множество всех типов агентов, нетривиально представленных в коалиции S. По определению доминирование означает, что для каждого $(i, m) \in S$ найдутся такие $y_{im} \in \mathcal{P}_i(x_i)$, что

$$\sum_{(i,m) \in S} y_{im} = \sum_{(i,m) \in S} \mathbf{e}_{im}.$$

Теперь, если «усреднить» доминирующие потребительские наборы, отвечающие каждому из типов агента, т. е. если положить

$$y_i = \left(\sum_{m | (i,m) \in S} y_{im} \right) / s_i \quad \forall i \in \mathcal{I}(S),$$

где s_i — число элементов (мощность) множества $S^i = \{m \mid (i, m) \in S\}$ (имеем $i \in \mathcal{I}(S) \iff S^i \neq \emptyset$), то из предыдущих равенств получим

$$\sum_{\mathcal{I}(S)} s_i y_i = \sum_{\mathcal{I}(S)} s_i \mathbf{e}_i.$$

В силу выпуклости $\mathcal{P}_i(x_i)$ также имеем $y_i \in \mathcal{P}_i(x_i)$ для всех $i \in \mathcal{I}(S)$. Определим далее вектор $t = (t_1, \ldots, t_n)$, полагая

$$t_i = s_i / r, \ i \in \mathcal{I}(S) \ \ \& \ \ t_i = 0, \ i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}(S).$$

Ясно, что в предыдущем равенстве *натуральные* числа s_i можно эквивалентным образом заменить на *рациональные* t_i. Таким образом, равновесия Эджуорта характеризуются тем фактом, что доминирование невозможно по нечётким рациональным коалициям, а в нечётком ядре — для любых. Включение установлено.

Далее установим $\mathcal{C}^e(\mathcal{E}^m) \subseteq \mathcal{C}^f(\mathcal{E}^m)$. Предполагая противное, найдём $x \in \mathcal{C}^e(\mathcal{E}^m)$, который доминируется нечёткой коалицией $t \neq 0$. По определению найдётся $y^t \in \prod_{\mathcal{I}} X_i$, удовлетворяющий соотношениям (2) и (3). Покажем, что тогда распределение x доминируется нечёткой коалицией $q = (q_1, \ldots, q_n)$ с *рациональными* компонентами q_i, $i \in \mathcal{I}$. С этой целью для $t_i > 0$ положим

$$x_i' = (t_i / q_i) y_i + (1 - t_i / q_i) \mathbf{e}_i \implies q_i (x_i' - \mathbf{e}_i) = t_i (y_i - \mathbf{e}_i),$$

где *рациональные* q_i удовлетворяют условию $t_i \le q_i \le 1$, а для $t_i = 0$ определим $q_i = 0$ и $x'_i = y^t_i$. Так как $\mathbf{e}_i \in X_i$, то по построению $x' = (x'_i)_\mathcal{I} \in \prod_\mathcal{I} X_i$ и

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} q_i(x'_i - \mathbf{e}_i) = 0.$$

Однако в силу открытости $\mathcal{P}_i(x_i)$ величины q_i можно выбрать так, чтобы $x'_i \in \mathcal{P}_i(x_i)$ выполнялось для всех i, удовлетворяющих $q_i > 0$. Пришли к противоречию с выбором $x \in \mathcal{C}^e(\mathcal{E}^{in})$. Итак, доказано совпадение нечёткого ядра с множеством равновесий Эджуорта. Лемма 2 доказана. ■

2.3 Кооперативное равновесие как нечётко договорное распределение

В *Маракулин* (2011) была предложена и изучалась другая «нечёткая» концепция, это понятие нечётко договорного распределения. Здесь мы даём его в несколько упрощённом виде (достаточном для наших целей), избегая подробных пояснений и терминологии договорного подхода. Пусть, как и ранее, $t = (t_1, \dots, t_n)$, $0 \le t_i \le 1$ $\forall i \in \mathcal{I}$ вектор, подобный нечёткой коалиции (допускаем $t = 0$) и $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ — допустимое распределение, которому соответствует валовой контракт $x - \mathbf{e} = v = (v_i)_{i \in \mathcal{I}}$ (net trade). Предполагается, что агенты экономики могут (нечётко — асимметрично) «разрывать» $v = (v_i)_{i \in \mathcal{I}}$, уменьшая индивидуальные потоки (фрагменты) этого контракта в долях $(1 - t_i)_{i \in \mathcal{I}}$, образуя при этом кортеж[11]

$$v^t = (t_1 v_1, t_2 v_2, \dots, t_n v_n)$$

продуктовых наборов, которые они могут использовать совместно с исходными запасами в последующих меновых операциях. После заключения некоторой коалицией $S \subseteq \mathcal{I}$ нового договора $w^S = (w_i)_\mathcal{I} \in L^\mathcal{I}$, $\sum_\mathcal{I} w_i = 0$ ($i \notin S \Rightarrow w_i = 0$) они достигнут (возможно недостижимого!) «распределения»

$$\xi(t, v, w) = w + v^t + \mathbf{e} = (w_1 + t_1 v^t_1 + \mathbf{e}_1, \dots, w_n + t_n v^t_n + \mathbf{e}_n).$$

Определение 5 *Распределение $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ называется **нечётко договорным** если для каждого $t = (t_i)_{i \in \mathcal{I}}$, $0 \le t_i \le 1$, $\forall i \in \mathcal{I}$ не существует такого бартерного контракта $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^{ln}$, $\sum_\mathcal{I} w_i = 0$, что при $x - \mathbf{e} = v$ и*

$$\xi_i = \xi_i(t, v, w) = w_i + t_i v_i + \mathbf{e}_i, \quad i \in \mathcal{I} \tag{6}$$

имеет место

$$\xi_i \succ_i x_i \quad \forall i: \ \xi_i \ne x_i. \tag{7}$$

Множество всех нечётко договорных распределений обозначено как $\mathcal{FC}(\mathcal{E}^m)$.

Отметим, что в силу (7) допустимо $w = 0$, т. е. возможен только частичный разрыв договоров. Отрицание возможности такого доминирования означает, что сеть договоров *правильная* и распределение является *устойчивым относительно* асимметричного *частичного разрыва договоров*. Непосредственно из определения 5 следует характеристическая (см. также *Маракулин* (2011))

[11] Это не контракт, ибо *не выполнено* его ключевое свойство $\sum_\mathcal{I} t_i v_i = 0$.

Лемма 3 *Распределение $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ является нечётко договорным тогда и только тогда, когда*[12]

$$\mathcal{P}_i(x_i) \cap [x_i, \mathbf{e}_i] = \emptyset \quad \forall i \in \mathcal{I} \tag{8}$$

и при этом

$$\prod_{\mathcal{I}} [(\mathcal{P}_i(x_i) + [0, \mathbf{e}_i - x_i]) \cup \{\mathbf{e}_i\}] \bigcap \{(z_i)_{\mathcal{I}} \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i\in\mathcal{I}} z_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}\}. \tag{9}$$

Условие (8) говорит о том, что частичный разрыв договоров без заключения нового контракта никому не выгоден, т. е. $\{x - \mathbf{e}\}$ — правильная сеть. Требование (9) отрицает наличие доминирующей коалиции после частично-асимметричного разрыва договора $v = (x - \mathbf{e})$. Утверждение леммы 3 можно переформулировать в несколько ином виде, удобном для дальнейшего анализа.

Следствие 1 *Распределение $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ нечётко договорное если и только если выполнено (8) и*

$$\prod_{S} (\mathcal{P}_i(x_i) + [0, \mathbf{e}_i - x_i]) \bigcap \{(z_i^S)_S \in L^S \mid \sum_{S} z_i^S = \sum_{S} \mathbf{e}_i\} = \emptyset \quad \forall S \subseteq \mathcal{I}. \tag{10}$$

Далее заметим, что для каждого $x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in \mathbb{X}$ при предположении ($\mathbf{A}$) мы имеем

$$\mathbf{e}_i \in \mathrm{co}(\mathcal{P}_i(x_i) \cup \{\mathbf{e}_i\}) \subset (\mathcal{P}_i(x_i) + [0, \mathbf{e}_i - x_i]) \cup \{\mathbf{e}_i\}, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

откуда в силу леммы 1 и (5) непосредственно заключаем, что каждое нечётко договорное распределение принадлежит нечёткому ядру. Следующее утверждение отчасти обосновывает обратную взаимосвязь между двумя «нечёткими» понятиями.

Лемма 4 *Пусть выполняется* ($\mathbf{A}$), *$x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ и $\mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset$ для всех $i \in \mathcal{I}$. Тогда $x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E})$ влечёт*:

$$\prod_{\mathcal{I}} (\mathcal{P}_i(x_i) + [0, \mathbf{e}_i - x_i]) \bigcap \{(z_1, \ldots, z_n) \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i\in\mathcal{I}} z_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{e}_i\} = \emptyset. \tag{11}$$

Доказательство леммы 4. Покажем, что (5) влечёт (11). Предположим, что x удовлетворяет (5), но при этом (11) ложно. Тогда найдутся вектор $t = (t_i)_{i\in\mathcal{I}}$, $0 \leq t_i \leq 1$ и наборы $z_i \succ_i x_i$, $i \in \mathcal{I}$ такие, что

$$\sum_{\mathcal{I}} z_i + \sum_{\mathcal{I}} t_i(\mathbf{e}_i - x_i) = \sum_{\mathcal{I}} \mathbf{e}_i. \tag{12}$$

Далее для действительного $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ рассмотрим вектор $y = y(\beta) = (y_i)_{i\in\mathcal{I}}$, полагая

$$y_i(\beta) = \beta[z_i + t_i(\mathbf{e}_i - x_i)] + (1 - \beta)x_i, \quad i \in \mathcal{I}.$$

В силу (12) и $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ имеем $\sum_{\mathcal{I}} y_i(\beta) = \sum_{\mathcal{I}} \mathbf{e}_i$ для каждого β. Далее векторы $y_i(\beta)$ представим в виде

$$y_i(\beta) = (1 - \beta t_i)x_i + \beta t_i \mathbf{e}_i + (1 - \beta t_i)\frac{\beta}{1 - \beta t_i}(z_i - x_i), \quad i \in \mathcal{I},$$

[12] *Линейный* отрезок с концами $a, b \in L$ это $[a, b] = \mathrm{co}\{a, b\} = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

где по выбору β имеем $\mu_i = \frac{\beta}{1-\beta t_i} \leq 1$. Последнее в силу (**A**) для $i \in \mathcal{I}$ влечёт

$$\mu_i(z_i - x_i) \in \mathcal{P}_i(x_i) - x_i \ \Rightarrow \ \exists\, \eta_i \in \mathcal{P}_i(x_i): \ \mu_i(z_i - x_i) = \eta_i - x_i.$$

Следовательно, из предыдущей формулы заключаем

$$y_i = (1 - \beta t_i)\eta_i + \beta t_i \mathbf{e}_i,$$

что влечёт $y_i \in \mathrm{co}(\mathcal{P}_i(x_i) \cup \{\mathbf{e}_i\})$, $i \in \mathcal{I}$. Теперь можно применить (5), заключая $y = y(\beta) = \mathbf{e}$ для *всех* действительных $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$. Запишем далее это равенство покомпонентно и по определению $y_i(\beta)$ найдём

$$\beta[z_i + t_i(\mathbf{e}_i - x_i)] + (1-\beta)x_i = \mathbf{e}_i \ \Rightarrow \ z_i + t_i(\mathbf{e}_i - x_i) = x_i + \frac{\mathbf{e}_i - x_i}{\beta},$$

что должно выполняться для всех $i \in \mathcal{I}$ и *всех* $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$. Однако эти равенства выполняются для *разных* β, что возможно только если $x_i = \mathbf{e}_i = z_i$, $i \in \mathcal{I}$, что по выбору z_i влечёт $x_i \succ_i x_i$, но это противоречит (**A**) (предпочтения иррефлексивны). Лемма 4 доказана. ■

3 Равновесие с нестандартными ценами: характеризация и свойства

Далее мы рассмотрим одну полезную спецификацию нестандартного равновесия, которая существенно упрощает теоретическую конструкцию и используется в последующем анализе. Действительно, в случае *стандартного* рыночного равновесия с трансферабельными стоимостями потребительские наборы индивидуумов удовлетворяют бюджетному неравенству

$$\langle p, z\rangle \leq \langle p, \mathbf{e}_i\rangle + \delta_i.$$

При этом для локально ненасыщенных предпочтений для равновесного плана x_i выполнено $px_i = p\mathbf{e}_i + \delta_i$, что позволяет переписать ограничение в виде

$$\langle p, z\rangle \leq \max\{\langle p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle p, x_i\rangle\}, \quad i \in \mathcal{I}. \tag{13}$$

Теперь ограничения вида (13) можно применить для определения концепции обобщённого равновесия. Очевидно, верно и обратное: если определить стоимости как $\delta_i = \max\{\langle p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle p, x_i\rangle\} - \langle p, \mathbf{e}_i\rangle \geq 0$, то равновесие на основе ограничений (13) преобразуется в стандартное равновесие с трансферабельными стоимостями.

В случае *нестандартного* равновесия ситуация далеко не столь тривиальна. Далее мы подробно изучим эту конструкцию.

Определение 6 *Допустимое состояние $x \in \mathbb{X}$ экономики $\mathcal{E}^m$ называется равновесием с нестандартными ценами $p \in {}^*L'$, если выполнены условия:*

(i) $\mathcal{P}_i(x_i) \cap \mathrm{st}\{z \in {}^*X_i \mid \langle p, z\rangle \leq \max\{\langle p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle p, x_i\rangle\} = \emptyset \ \ \forall i \in \mathcal{I},$

(ii) $\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{e}_i.$

В данном определении бюджетное ограничение имеет вид (13), но уже с нестандартными ценами и потребительскими планами, и ему соответствуют бюджетные множества:

$$B_i^x(p) = \mathrm{st}\{z \in {}^*X_i \mid \langle p, z\rangle \le \max\{\langle p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle p, x_i\rangle\}\}, \quad p \in {}^*L', \quad i \in \mathcal{I}.$$

Как и ранее, величина, стоящая в правой части бюджетного ограничения, включает в себя стоимость $\delta_i = \max\{\langle p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle p, x_i\rangle\} - \langle p, \mathbf{e}_i\rangle \ge 0$, которую ненасыщенные индивиды получили от насытившихся. Однако теперь это может быть не только обычное насыщение, но также и нестандартное: насыщение может наступить на рынках более высокого стоимостного уровня с пренебрежимо малой остаточной стоимостью, которая передаётся на следующий (нижний) уровень «бедности» (их может быть несколько).

Чтобы установить совпадение двух нестандартных концепций — заданных с помощью $B_i^x(p)$ и, альтернативно, через $\mathrm{st}^*B_i(p,\delta_i)$ — достаточно показать, что при любом заданном δ_i и $x_i \in \mathrm{st}^*B_i(p,\delta_i)$ множество $B_i^x(p) \subseteq \mathrm{st}^*B_i(p,\delta_i)$. Проблема однако состоит в том, что, в отличии от стандартного случая, для нестандартных бюджетных множеств при выпуклом и замкнутом X_i потенциально возможно

$$z \in \mathrm{st}^*B_i(p,\delta_i) \quad \& \quad pz > p\mathbf{e}_i + \delta_i.$$

В *Маракулин* (2012) можно найти пример (пример 1.2.2, с. 97), где такого рода ситуация анализируется и описана формально. Следовательно, для $z \in \mathrm{st}^*B_i(p,\delta_i)$ включение

$$\{y \in {}^*X_i \mid \langle p, y\rangle \le \langle p, z\rangle\} \subseteq \{y \in {}^*X_i \mid \langle p, y\rangle \le \langle p, \mathbf{e}_i\rangle + \delta_i\}$$

вообще говоря ***ложное***. Однако при дополнительных предположениях оно имеет место, но только *после стандартизации* правой и левой частей. Этот свойство является предметом ближайших рассмотрений.

Напомним некоторые важные факты из общей теории равновесия с нестандартными ценами. Первое это специфическое разложение вектора нестандартных цен по стандартному базису (лемма 1.1.2 из *Маракулин* (2012)).

Лемма 5 *Для каждого $p \in {}^*L'$, $p \neq 0$ найдётся такая (единственная) система ортонормальных стандартных векторов $\{e_1, \ldots, e_k\}$ из $L = \mathbb{R}^l$, что*

$$p = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k, \quad \lambda_j \in {}^*\mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{14}$$

При этом коэффициенты $\lambda_j > 0$ и удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_{j+1}/\lambda_j \approx 0, \quad j = 1, \ldots, k-1.$$

Отметим, что указанная в лемме система векторов единственная, но, конечно, может не быть базисом — хотя при необходимости её можно дополнить до базиса. В *Маракулин* (1988, 2012) также изучалась структура бюджетных множеств: на основе описанного в лемме 5 представления нестандартного функционала в форме (14) было получено полное описание востребованных в равновесном анализе бюджетных множеств с нестандартными ценами и трансферабельными стоимостями.

Используя лемму 5 и представление (14), для данного $p \in {}^*L' = {}^*\mathbb{R}^l$ поставим в соответствие нестандартной величине $\gamma > 0$ номер $j = 1, \ldots, k+1$ такой, что

$$\gamma/\lambda_{j-1} \approx 0 \ \ \& \ \ \gamma/\lambda_j \not\approx 0. \tag{15}$$

В (15) для определённости полагаем $\lambda_0 = +\infty$ и $\lambda_{k+1} = 0$. Такой $j = j(p, \gamma)$, в силу сказанного и леммы 5, определен корректно. Положим

$$\mu = \mathrm{st}(\gamma/\lambda_j) \ \text{ при } \ \gamma/\lambda_j \not\approx \infty.$$

Теорема 2 *Пусть $X \subset L$ — выпуклое* ***полиэдральное*** *множество, $\mathrm{w} \in X$, $p \in {}^*L'$, и нестандартный $\gamma > 0$ и номер $j = j(p, \gamma)$ связаны соотношением (15). Пусть*

$$B^{\mathrm{w}}(p, \gamma) = \mathrm{st}\{z \in {}^*X \mid \langle p, z\rangle \le \langle p, \mathrm{w}\rangle + \gamma\}.$$

Тогда истинна одна из альтернатив:

(i) $B^{\mathrm{w}}(p, \gamma) = X$ *при* $\gamma/\lambda_1 \approx +\infty$;

(ii) *существует такой* $m < j$, *что*
$B^{\mathrm{w}}(p, \gamma) = \{x \in X \mid e_r y = e_r \mathrm{w},\ r < m,\ e_m y \le e_m \mathrm{w}\} = B(m, p, \mathrm{w})$,
причём найдется такой $y \in B(m, p, \mathrm{w})$, *что* $e_m y < e_m \mathrm{w}$;

(iii) $B^{\mathrm{w}}(p, \gamma) = \{x \in X \mid e_r y = e_r \mathrm{w},\ r < j\}$ *при* $\gamma/\lambda_j \approx +\infty$;

(iv) $B^{\mathrm{w}}(p, \gamma) = \{x \in X \mid e_r y = e_r \mathrm{w},\ r < j,\ e_j y \le e_j \mathrm{w} + \mu\}$ *при* $\gamma/\lambda_j \not\approx +\infty$.

При этом во всех вариантах $(ii) - (iv)$:

$$\nexists y \in X : \ e_r y = e_r \mathrm{w},\ r < s,\ e_s y < e_s \mathrm{w} \quad \forall 1 \le s < m.$$

Это теорема 1.1.9 из *Маракулин* (2012), она была установлена Коноваловым А. В. и обобщает подобный результат из *Маракулин* (1988) (доказан для $\gamma = 0$, см. теорему 1.1.8 из *Маракулин* (2012)). Отметим, что случай $\gamma = 0$ также описан в заключении теоремы 2, он соответствует альтернативе (ii) и, при $j = k+1$, варианту (iii). В целом теорема 2 представляет нетривиальный результат, при доказательстве которого предположение о полиэдральности X является существенным — контрпример имеется в *Маракулин* (2012). Теперь нужное нам включение можно получить как следствие этой теоремы.

Замечание 2 Теорема 2 раскрывает «внутреннее устройство» бюджетного множества с нестандартной ценой $p \in {}^*\mathbb{R}^l$ и трансферабельной стоимостью $\gamma \ge 0$. На содержательном уровне оно таково: Первая группа ограничений $e_r y = e_r \mathrm{w}$, $r < m \le j$, заданных с помощью функционалов e_r, представленных в разложении (14) нестандартного вектора $p \in {}^*\mathbb{R}^l$, выделяет некоторую грань многогранника X. В пределах этой грани срабатывает «последнее» бюджетное ограничение $e_m y \le e_m \mathrm{w} + \mu$, для которого условие Слейтера (для найденной грани) выполняется (и это первая такая ситуация). При этом в данной конструкции отброшены несущественные элементы: в разложении p это слагаемые вида $\lambda_r e_r$ при $\lambda_r/\gamma \approx 0$. Кроме того, описаны крайние варианты — случай когда $\gamma > 0$ «слишком большое» — (i), и когда исполнение «Слейтера» не наступает вообще — (iii). ■

Следствие 2 *В условиях теоремы 2 для любого* $z \in B^{\mathrm{w}}(p,\gamma)$ *имеет место*

$$\mathrm{st}\{y \in {}^*X \mid \langle p, y\rangle \le \langle p, z\rangle\} \subseteq B^{\mathrm{w}}(p,\gamma).$$

Доказательство. Применяя теорему 2 при $\gamma = 0$ в случае (ii) имеем: $\exists q < j$

$$\mathrm{st}\{y \in {}^*X \mid \langle p, y\rangle \le \langle p, z\rangle\} = \{x \in X \mid e_r y = e_r z,\ r < q,\ e_q y \le e_q z\},$$

причём найдется такой $y \in X$, что $e_q y < e_q z$. Так как $z \in B^{\mathrm{w}}(p,\gamma)$ то, опять-таки в силу теоремы 2, имеем $q \ge m$ и

$$e_r z = e_r \mathrm{w},\ r < m,\ \ \&\ \ e_m z \le e_m \mathrm{w}\ \ \textbf{\textit{или}}\ \ e_j z \le e_j \mathrm{w} + \mu \ \textit{при}\ \gamma/\lambda_j \not\approx +\infty.$$

Теперь предыдущая формула в каждом из пунктов $(i)-(iv)$ теоремы 2 даёт искомый результат. ■

Следствие 3 *В условиях теоремы 2 из* $x \in B^{\mathrm{w}}(p,\gamma)$ *и* $\mathcal{P}(x) \cap B^{\mathrm{w}}(p,\gamma) = \emptyset$ *при* $\mathcal{P}(x) \ne \emptyset$ *открытом в* X *выполнено*

$$\langle p, \mathcal{P}(x)\rangle > \langle p, x\rangle.$$

Доказательство. Воспользуемся заключением следствия 2 и запишем условие $\mathcal{P}(x) \cap \mathrm{st}\{y \in {}^*X \mid \langle p, y\rangle \le \langle p, x\rangle\} = \emptyset$ в виде

$$\mu(z) \cap \{\xi \in {}^*X \mid \langle p, \xi\rangle \le \langle p, x\rangle\} = \emptyset \ \ \forall z \in \mathcal{P}(x).$$

Так как $z \in \mu(z)$, то $pz \le px$ невозможно, откуда $pz > px$ $\forall z \in \mathcal{P}(x)$. ■

Применяя следствие 2 непосредственно устанавливаем эквивалентность двух определений нестандартного равновесия для *полиэдральных* экономик.

Теорема 3 *Пусть* ***полиэдральная*** *модель* $\mathcal{E}^m$ *удовлетворяет* $(\mathbf{A})$. *Тогда распределение* $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ *является равновесием с нестандартными ценами* $p \in {}^*L'$ *и (некоторыми) трансферабельными стоимостями* $\delta \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{I}}_+$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{P}_i(x_i) \cap \mathrm{st}\{y \in {}^*X_i \mid py \le \max\{\langle p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle p, x_i\rangle\}\} = \emptyset \ \ \forall i \in \mathcal{I}.$$

Замечание 3 Тот факт, что в теореме 3 рассматривается полиэдральная экономика в предъявленном доказательстве является значимым и его нельзя заменить на более слабое требование выпуклости. В полном объёме общее решение пока что не найдено, но есть ряд частных вариантов, что позволяет уверенно надеяться на то, что в будущем это ограничение можно будет снять. ■

Доказательство теоремы 3. Ранее уже отмечалось, что при

$$\delta_i = \max\{\langle p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle p, x_i\rangle\} - \langle p, \mathbf{e}_i\rangle \ge 0$$

равновесие по определению 6 становится равновесием по определению 2. Обратное следует из

$$\mathrm{st}\{y \in {}^*X_i \mid \langle p, y\rangle \le \langle p, x_i\rangle\} \subseteq B_i^{\mathbf{e}_i}(p,\delta_i) = \mathrm{st}{}^*B_i(p,\delta_i) -$$

в силу следствия 2 и тривиального

$$\mathrm{st}\{y \in {}^*X_i \mid \langle p, y\rangle \leq \langle p, \mathbf{e}_i\rangle\}\subseteq \mathrm{st}^*B_i(p, \delta_i).$$

Следовательно (т. к. объединение левых частей содержится в правой),

$$\mathrm{st}\{y \in {}^*X_i \mid \langle p, y\rangle \leq \max\{\langle p, x_i, \langle p, \mathbf{e}_i\rangle\}\}\subseteq \mathrm{st}^*B_i(p, \delta_i).$$

В итоге, в силу условия (ii) определения 2, имеем

$$\mathcal{P}_i(x_i) \cap \mathrm{st}\{y \in {}^*X_i \mid \langle p, y\rangle \leq \max\{\langle p, x_i, \langle p, \mathbf{e}_i\rangle\}\} = \emptyset \ -$$

что и требовалось доказать. ■

4 Нечётко договорные распределения и их стоимостная характеризация

В настоящем разделе мы исследуем вопрос о характеризации нечётко договорного распределения в виде равновесия с нестандартными ценами (определение 6). В последующем анализе важную роль играют множества следующей конструкции. Пусть $x = (x_i)_\mathcal{I} \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ — распределение в $\mathcal{E}^m$ и пусть $A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i)$ — любое *конечное* подмножество, $i \in \mathcal{I}$. Положим

$$D_i = \mathrm{co}[(\mathrm{co}A_i + [0, \mathbf{e}_i - x_i]) \cup \{\mathbf{e}_i\}]^{13}.$$

Из предположения (**A**) $\mathrm{co}A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i)$, откуда имеем

$$D_i \subset (\mathcal{P}_i(x_i) + [0, \mathbf{e}_i - x_i]) \cup \{\mathbf{e}_i\}, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Следовательно, в силу леммы 3 и требования (9), для нечётко договорного x имеем:

$$\prod_\mathcal{I} D_i \bigcap \{(z_i)_\mathcal{I} \in L^\mathcal{I} \mid \sum_{i\in\mathcal{I}} z_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}\}. \tag{16}$$

С целью применить к (16) надлежащую теорему отделимости, установим

Лемма 6 *Пусть выполнено* (**A**) *и* $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ *— нечётко договорное распределение. Тогда* $\mathbf{e}_i$ *вершина в* $D_i \subset \mathbb{R}^l$ $\forall i \in \mathcal{I}$ *и* $\mathbf{e}$ *— вершина в* $\prod_\mathcal{I} D_i$.

Доказательство. Сначала покажем, что $\mathbf{e}_i \notin (\mathrm{co}A_i + [0, \mathbf{e}_i - x_i])$. Предполагая противное найдём $y_i \in \mathrm{co}A_i$ и $\lambda \in [0, 1]$ такие, что

$$\mathbf{e}_i = y_i + \lambda(\mathbf{e}_i - x_i) \quad \Rightarrow \quad y_i = \lambda x_i + (1-\lambda)\mathbf{e}_i = \lambda(x_i - \mathbf{e}_i) + \mathbf{e}_i$$

и, таким образом, потребление $y_i \in [x_i, \mathbf{e}_i]\cap\mathcal{P}_i(x_i)$, т. е. может быть достигнуто путём разрыва имеющихся договоров в объёме $(1 - \lambda)$, что противоречит (8).

Доказано, что множество $C_i = \mathrm{co}A_i + [0, \mathbf{e}_i - x_i]$ это ограниченный многогранник такой, что $\mathbf{e}_i \notin C_i$. В силу (второй) классической теоремы отделимости найдётся линейный функционал h (вектор) такой, что при некотором действительном γ

$$\langle h, \mathbf{e}_i\rangle < \gamma < \langle h, C_i\rangle.$$

[13]Если $\mathcal{P}_i(x_i) = \emptyset$, то $A_i = \emptyset$ и, значит, $D_i = \{\mathbf{e}_i\}$.

Отсюда очевидно следует, что гиперплоскость, заданная уравнением $hz = h\mathbf{e}_i$, $z \in \mathbb{R}^l$, является опорной по отношению к D_i и пересекается с ним в единственной точке $\mathbf{e}_i$. Это характеризует $\mathbf{e}_i \in D_i$ как вершину (грань нулевой размерности). ■

Лемма 7 *Пусть выполнено* $(\mathbf{A})$ *и* $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ *— нечётко договорное распределение. Тогда существует* $p \in \mathbb{R}^l$ *такой, что*

$$\langle p, \mathrm{co}A_i\rangle > \max\{\langle p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle p, x_i\rangle\} \quad \forall i \in \mathcal{I}: \quad \mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset.$$

При доказательстве данной леммы нам потребуется специфическая теорема отделимости многогранников (см. утверждение 1.1.1 на с. 26 из *Маракулин* (2012)).

Утверждение 1 (Маракулин 2001) *Пусть* $\{A_j\}_{j=1}^{j=k}$ *— совокупность выпуклых многогранников*[14] *в линейном пространстве* E*, удовлетворяющая условию*

$$\bigcap_{j=1}^{k} A_j = \{x\},$$

и пусть $x \in \mathrm{ri}F_{A_j}$ *для всех* $j = 1, \ldots, k$*, где* F_{A_j} *— грань* A_j[15]*. Тогда найдется совокупность линейных стандартных функционалов* $\{f_j\}_{j=1}^{j=k}$*, не все из которых равны нулю, таких, что* $f_j(A_j) \geq f_j(x)$*, причём* $F_{A_j} = \{y \in A_j \mid f_j(y) = f_j(x)\}$ *для всех* $j = 1, \ldots, k$*, и*

$$\sum_{j=1}^{k} f_j = 0.$$

Доказательство леммы 7. Применим утверждение 1 к соотношению (16), где пересекаются два множества. Заключаем существование ненулевого вектора $f \in (\mathbb{R}^l)^{\mathcal{I}}$ такого, что при $\mathcal{A}(L^{\mathcal{I}}) = \{(z_i)_{\mathcal{I}} \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i\in\mathcal{I}} z_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{e}_i\}$

$$\langle f, \prod_{\mathcal{I}} D_i\rangle \geq \langle f, \mathbf{e}\rangle \quad \& \quad \langle -f, \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}})\rangle \geq \langle -f, \mathbf{e}\rangle$$

и при этом равенство в неравенствах реализуется только для точек из минимальной грани, содержащей элемент $\mathbf{e}$. Однако $\mathbf{e}$ — вершина в $\prod_{\mathcal{I}} D_i$, а $\mathcal{A}(L^{\mathcal{I}})$ — аффинное подпространство. Таким образом, в силу утверждения 1, заключаем: $\forall i \in \mathcal{I} \mid \mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset$

$$\langle f, \prod_{\mathcal{I}} D_i \setminus \{\mathbf{e}\}\rangle > \langle f, \mathbf{e}\rangle \quad \& \quad \langle f, \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}})\rangle = \langle f, \mathbf{e}\rangle.$$

Более того, по определению $\mathcal{A}(L^{\mathcal{I}})$ последнее соотношение означает, что вектор $f = (f_1, \ldots, f_n) \in (\mathbb{R}^l)^{\mathcal{I}}$, представляющий разделяющий функционал, удовлетворяет $f_i = f_j = p \neq 0$ $\forall i, j \in \mathcal{I}$. С учётом этого факта, первое неравенство даёт: $\forall i \in \mathcal{I} \mid \mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset$,

$$\langle p, D_i \setminus \{\mathbf{e}_i\}\rangle + \sum_{j\in\mathcal{I}, j\neq i} \langle p, D_j\rangle > \sum_{j\in\mathcal{I}} \langle p, \mathbf{e}_j\rangle \;\; \Rightarrow \;\; \langle p, D_i \setminus \{\mathbf{e}_i\}\rangle + \sum_{j\in\mathcal{I}, j\neq i} \langle p, \mathbf{e}_j\rangle > \sum_{\mathcal{I}} \langle p, \mathbf{e}_j\rangle \;\; \Rightarrow$$

[14] Это множество, представимое как выпуклая оболочка конечного числа точек.

[15] Это условие означает, что F_{A_j} — грань минимальной размерности, содержащая точку x.

$$\langle p, \mathrm{co}A_i + [0, \mathbf{e}_i - x_i]\rangle > \langle p, \mathbf{e}_i\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle p, \mathrm{co}A_i\rangle > \max\{\langle p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle p, x_i\rangle\},$$

что и требовалось доказать. ■

Ключевая теорема данной работы будет доказана с помощью теоремы направленности из теории нестандартного анализа. Пусть U это универсум стандартной математики и ${}^*U$ — нестандартный. Напомним далее понятие *направленного* отношения.

Определение 7 *Бинарное отношение $r \in U$ называется **направленным относительно** U (или просто **направленным**), если для любого конечного набора $a_1, \dots, a_k \in \mathrm{dom}(r)$ существует такой элемент b, что $(a_i, b) \in r$ для всех $i = 1, \dots, k$.*

Основным результатом о направленных отношениях является

Теорема 4 (Теорема направленности) *Пусть r — направленное отношение в U. Тогда существует такой элемент $b \in {}^*U$, что $({}^*a, b) \in {}^*r$ для всех $a \in \mathrm{dom}(r)$.*

Итак, по определению направленного отношения для каждого конечного подмножества A из области определения — $\mathrm{dom}(r)$ — отношения r найдётся такой элемент $q_A \in U$, что $(a, q_A) \in r$ для всех $a \in A$. Интуитивно, теорема направленности обеспечивает существование такого (нестандартного) b, который представляет собой «предел» точек q_A как только A «приближается» к $\mathrm{dom}(r)$.

Теорема 5 *Пусть экономика $\mathcal{E}^m$ полиэдральная, $x = (x_i)_\mathcal{I} \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$, выполнено* (**A**) *и $\mathcal{P}_i(x_i)$ открыты в X_i, $\forall i \in \mathcal{I}$. Тогда, если x — нечётко договорное, то существует нестандартный $p \in {}^*\mathbb{R}^l$ такой, что*

$$\mathcal{P}_i(x_i) \cap \mathrm{st}\{y \in {}^*X_i \mid py \leq \max\{\langle p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle p, x_i\rangle\}\} = \emptyset \quad \forall i \in \mathcal{I}. \tag{17}$$

Доказательство теоремы 5. Доказательство осуществляется с применением теоремы направленности из теории нестандартного анализа (теорема 4). С этой целью определим *направленное отношение* $\mathcal{U}$ следующим образом. Пусть $\mathbb{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ любая совокупность (кортеж) *конечных* (возможно пустых) подмножеств $A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i)$. В силу леммы 7 истинно высказывание:

$$\forall i \in \mathcal{I}\ \forall A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i), A_i \neq \emptyset, |A_i| < +\infty \ \ \exists p \in \mathbb{R}^l \mid \langle p, A_i\rangle > \max\{\langle p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle p, x_i\rangle\}.$$

Обозначим $p(\mathbb{A})$ линейный функционал, отвечающий набору $\mathbb{A} = \{A_i\}_\mathcal{I}$ и удовлетворяющий заключению леммы 7. Теперь определим отношение $\mathcal{U}$ как совокупность всех пар $(\mathbb{A}, p(\mathbb{A}))$ указанного вида, т. е. положим

$$\mathcal{U} = \{(\mathbb{A}, p) \mid \mathbb{A} = \{A_i\}_{i=1}^{i=n},\ |A_i| < \infty,\ A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i),\ p = p(\mathbb{A})\}.$$

Свойство *направленности* отношения $\mathcal{U}$ легко проверяется. Действительно, для конечного семейства $\{\mathbb{A}^t\}$ из $\mathrm{dom}\,\mathcal{U}$ достаточно положить $\widehat{A}_i = \cup_t A_i^t$ и, используя лемму 7, найти вектор $\widehat{p}$, соответствующий набору $\widehat{\mathbb{A}} = \{\widehat{A}_i\}_\mathcal{I}$. Легко видеть, что $(\widehat{\mathbb{A}}, \widehat{p}) \in \mathcal{U}$. Итак, $\mathcal{U}$ — направленное отношение, и в силу теоремы направленности найдётся такой нестандартный вектор $^*p$, что $(\mathbb{A}, {}^*p) \in {}^*\mathcal{U}$ при любом $\mathbb{A} \in \mathrm{dom}\,\mathcal{U}$. Далее заметим, что по определению $\mathcal{U}$ вектор $^*p$ удовлетворяет заключению леммы 7 при любом $\mathbb{A} \in \mathrm{dom}\,\mathcal{U}$ и, так как к A_i можно добавить любую точку из $\mathcal{P}_i(x_i)$ не выходя за пределы $\mathrm{dom}\,\mathcal{U}$, то

$$\langle {}^*p, y\rangle > \max\{\langle {}^*p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle {}^*p, x_i\rangle\} \ \ \forall y \in \mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset.$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\mathcal{P}_i(x_i) \cap \{y \in {}^*X_i \mid \langle {}^*p, y\rangle \leq \max\{\langle {}^*p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle {}^*p, x_i\rangle\}\} = \emptyset \ \ \forall i \in \mathcal{I}.$$

Обратите внимание, что левое множество $\mathcal{P}_i(x_i)$ в этом пересечении «внешнее», а правое — «внутренее». Это не позволяет сразу прийти к нужному заключению путём применения операций si(.) и st(.).

Пусть произвольный $y \in \mathcal{P}_i(x_i)$. Предполагалось, что $\mathcal{P}_i(x_i)$ открыто в $X_i \subset \mathbb{R}^l$ и X_i — полиэдральные (многогранные) множества. Поэтому у y найдётся многогранная окрестность в $\mathcal{P}_i(x_i)$, т. е. существует конечное множество $A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i)$ такое, что $\mathrm{co}A_i$ — окрестность y в X_i. Но тогда из построения

$$^*\mathrm{co}A_i \cap \{y \in {}^*X_i \mid \langle {}^*p, y\rangle \leq \max\{\langle {}^*p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle {}^*p, x_i\rangle\}\} = \emptyset,$$

что, в силу $\mu(y) \subset {}^*\mathrm{co}A_i$, даёт

$$\mu(y) \cap \{z \in {}^*X_i \mid \langle {}^*p, z\rangle \leq \max\{\langle {}^*p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle {}^*p, x_i\rangle\}\} = \emptyset \quad \Rightarrow$$

$$y \notin \mathrm{st}\{z \in {}^*X_i \mid \langle {}^*p, z\rangle \leq \max\{\langle {}^*p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle {}^*p, x_i\rangle\}\} -$$

что и требовалось доказать. ■

5 Совершенная конкуренция: эквивалентность нестандартного и договорного подхода

В результате представленного выше анализа были получены следующие теоремы, характеризующие совершенную конкуренцию в экономике без условия выживаемости.

Напомним, что $x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ называется *равновесием с нестандартными ценами* если существуют нестандартный $p \in {}^*\mathbb{R}^l$ такой, что

$$\mathcal{P}_i(x_i) \cap \mathrm{st}\{y \in {}^*X_i \mid py \leq \max\{\langle p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle p, x_i\rangle\}\} = \emptyset \ \ \forall i \in \mathcal{I}.$$

Теорема 6 *Пусть экономика $\mathcal{E}^m$ полиэдральная, $x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$, выполнено* (**A**) *и $\mathcal{P}_i(x_i)$ открыты в X_i, $\forall i \in \mathcal{I}$. Тогда x — нечётко договорное тогда и только тогда, когда это равновесие с нестандартными ценами.*

Комбинируя этот результат с теоремой 1 (существование нестандартных равновесий), непосредственно заключаем

Следствие 4 *Если в условиях теоремы 6 дополнительно $\mathcal{P}_i(\cdot)$ имеет открытый график в $X_i \times X_i$ и $\mathbf{e}_i \in X_i$ $\forall i \in \mathcal{I}$, то $\mathcal{FC}(\mathcal{E}^m) \neq \emptyset$ — нечётко договорные распределения существуют.*

Доказательство теоремы 6. В теореме 5 было установлено, что каждое нечётко договорное распределение является равновесием с нестандартными ценами. Установим обратное заключение. Пусть $x \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ — нестандартное равновесие. Требуется проверить свойства (8), (9), характеризующие нечётко договорные распределения. Так как $[x_i, \mathbf{e}_i] \subset \mathrm{st}\{y \in {}^*X_i \mid py \le \max\{\langle p, \mathbf{e}_i\rangle, \langle p, x_i\rangle\}\}$, то истинность (8) непосредственно вытекает из определения равновесия. Условие (9) требует проверки, которая может быть осуществлена рассуждениями от противного.

Предположим (9) ложно и, значит, найдётся $y = (y_i)_{i\in\mathcal{I}} \neq (\mathbf{e}_i)_{i\in\mathcal{I}} = \mathbf{e}$ из левой части пересечения (9). Образуем коалицию

$$S = \{i \in \mathcal{I} \mid y_i \neq \mathbf{e}_i\} \neq \emptyset.$$

По построению из (9) имеем

$$y_i \in (\mathcal{P}_i(x_i) + [0, \mathbf{e}_i - x_i]) \;\; \forall i \in S \;\; \& \;\; \sum_S y_i = \sum_S \mathbf{e}_i.$$

Отсюда заключаем

$$\forall i \in S \; \exists \lambda_i \in [0,1]: \quad z_i = y_i + \lambda_i(x_i - \mathbf{e}_i) \in \mathcal{P}_i(x_i).$$

Из определения равновесия $pz_i > \max\{p\mathbf{e}_i, px_i\}$ $\forall i \in S$ (ибо другое невозможно). С другой стороны

$$pz_i = py_i + \lambda_i(x_i - \mathbf{e}_i)p \;\; \forall i \in S \quad \Rightarrow$$

$$\sum_S pz_i = \sum_S py_i + \sum_S \lambda_i p(x_i - \mathbf{e}_i) = \sum_S p\mathbf{e}_i + \sum_S \lambda_i p(x_i - \mathbf{e}_i) \le \sum_S \max\{p\mathbf{e}_i, px_i\},$$

что противоречит предыдущему заключению. ■

В общем случае экономики $\mathcal{E}^m$ без условия Слейтера нечёткое ядро, а значит и равновесия Эджуорта характеризует следующая

Теорема 7 *Пусть экономика $\mathcal{E}^m$ полиэдральная, $x = (x_i)_\mathcal{I} \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$, выполнено* (**A**) *и $\mathcal{P}_i(x_i)$ открыты в X_i, $\forall i \in \mathcal{I}$. Тогда $x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E}^m) = \mathcal{C}^e(\mathcal{E}^m)$ если и только если существуют нестандартные цены $p \in {}^*\mathbb{R}^l$ такие, что*

$$\langle p, \mathcal{P}_i(x_i)\rangle > \langle p, \mathbf{e}_i\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{P}_i(x_i) \cap \mathrm{st}\{y \in {}^*X_i \mid py \le \langle p, \mathbf{e}_i\rangle\} = \emptyset \;\; i \in \mathcal{I}. \tag{18}$$

Обратите внимание, что эквивалентность в (18) также требует доказательства.

Доказательство теоремы 7. Общая логика доказательства необходимости (18) следует доказательству теоремы 5, при том различии, что вместо D_i применяются множества

$$\Upsilon_i = \mathrm{co}(A_i \cup \{\mathbf{e}_i\}), \;\; A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i), \; |A_i| < +\infty, \;\; i \in \mathcal{I},$$

которые в силу леммы 1 и (5) и, так как $\{\mathbf{e}_i\}$ — вершина в Υ_i[16], позволяют свести вопрос к применению теоремы отделимости из утверждения 1. Далее аналогично лемме 7 заключаем существование вектора $f = (f_1, \dots, f_n) \in (\mathbb{R}^l)^\mathcal{I} \neq 0$ такого, что

$$\langle f, \prod_\mathcal{I} \Upsilon_i \setminus \{\mathbf{e}\}\rangle > \langle f, \mathbf{e}\rangle \quad \& \quad \langle f, \mathcal{A}(L^\mathcal{I})\rangle = \langle f, \mathbf{e}\rangle.$$

[16]Распределение из ядра нельзя доминировать по одноэлементным коалициям, поэтому $\{\mathbf{e}_i\} \notin \mathrm{co}A_i \subset \mathcal{P}_i(x_i)$.

Здесь последнее равенство влечёт $f_i = f_j = p \neq 0 \ \forall i, j \in \mathcal{I}$. С учётом этого, первое неравенство даёт: $\forall i \in S = \{i \in \mathcal{I} \mid \mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset\}$

$$\langle p, \Upsilon_i \backslash \{\mathbf{e}_i\}\rangle + \sum_{j \in \mathcal{I}, j \neq i} \langle p, \Upsilon_j \rangle > \sum_{j \in \mathcal{I}} \langle p, \mathbf{e}_j \rangle \ \Rightarrow \ \langle p, \Upsilon_i \backslash \{\mathbf{e}_i\}\rangle + \sum_{j \in \mathcal{I}, j \neq i} \langle p, \mathbf{e}_j \rangle > \sum_{\mathcal{I}} \langle p, \mathbf{e}_j \rangle \ \Rightarrow$$

$$\langle p, \lambda \operatorname{co} A_i + (1-\lambda)\mathbf{e}_i \rangle > \langle p, \mathbf{e}_i \rangle, \quad \forall \lambda \in (0,1] \quad \Longleftrightarrow \quad \langle p, \operatorname{co} A_i \rangle > \langle p, \mathbf{e}_i \rangle \ \ \forall i \in S.$$

Далее, применяя теорему направленности в точности как это делалось в теореме 5, заключаем, что существует нестандартный $p' \in {}^*L'$ такой, что

$$\langle p', \mathcal{P}_i(x_i) \rangle > \langle p', \mathbf{e}_i \rangle \ \ \forall i \in S.$$

Так как при $\mathcal{P}(x_i) = \emptyset$ это соотношение выполнено автоматически, то можно считать его установленным для всех $i \in \mathcal{I}$. Наконец, доказательство эквивалентности в (18) в точности повторяет рассуждения теоремы 5.

Достаточность (18) устанавливается непосредственно. Действительно, если $t = (t_i)_{\mathcal{I}}$ — доминирующая нечёткая коалиция, то найдутся $y_i \in X_i$ такие, что

$$y_i \succ_i x_i \ \ \forall i \in \mathcal{I}: \ t_i > 0 \ \ \& \ \ \sum_{\mathcal{I}} t_i(y_i - \mathbf{e}_i) = 0.$$

Умножая левую часть равенства скалярно на вектор цен $p \in {}^*\mathbb{R}^l$, удовлетворяющий (18), из $py_i > p\mathbf{e}_i$ находим

$$\langle p, \sum_{\mathcal{I}} t_i(y_i - \mathbf{e}_i) \rangle > 0,$$

что невозможно. Теорема 7 доказана ■

Теоремы 6 и 7 выявляют различие между классической моделью совершенной конкуренции и договорной. Действительно, каждое нечётко договорное распределение является равновесием Эджуорта, однако когда верно обратное? Это будет так, если экономика нередуцируемая.

Определение 8 *Экономика $\mathcal{E}^m$ называется нередуцируемой, если для любого допустимого $x = (x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \mathcal{A}(\mathbb{X})$ и любого нетривиального разбиения $\mathcal{I} = S \cup T$, $S \cap T = \emptyset$ найдётся такое перераспределение ресурсов дополняющей коалиции $T \neq \emptyset$, $z = (z_i)_{\mathcal{I}} \in L^{\mathcal{I}}$, что*

$$\sum_S z_i = \sum_T z_j \ \ \& \ \ \forall j \in T: \ \mathbf{e}_j - z_j \in X_j \ \ \&$$

$$\forall i \in S: \ x_i + z_i \in \operatorname{cl} \mathcal{P}_i(x_i) \ \ \& \ \ \exists i \in S: \ x_i + z_i \in \mathcal{P}_i(x_i).$$ [17]

Последняя формула говорит о том, что группа T способна не только предоставить ресурсы, в которых заинтересованы члены группы S, но и как-то при этом выжить: поставки продуктов возможно осуществить. Отметим также, что понятие нередуцируемой модели включает в себя *локальную ненасыщаемость* у каждого экономического агента.

[17] Зачастую постулируется $z_j = 0 \ \forall j \neq i, \ j \in S$.

Теорема 8 *Пусть экономика $\mathcal{E}^m$ полиэдральная, $x = (x_i)_\mathcal{I} \in \mathbb{X}$, выполнено* ($\mathbf{A}$) *и $\mathcal{P}_i(x_i)$ открыты в X_i, $\forall i \in \mathcal{I}$. Пусть также $\sum_\mathcal{I} \mathbf{e}_i \in \operatorname{int} \sum_\mathcal{I} X_i$ и $\mathcal{E}^m$ — неразложимая экономика. Тогда для $x = (x_i)_\mathcal{I}$ свойства* $(i) - (iv)$ *эквивалентны:*

(i) *равновесие с нестандартными ценами,*

(ii) *нечётко договорное распределение,*

(iii) *элемент нечёткого ядра,*

(iv) *равновесие Эджуорта.*

Замечание 4 В части совпадения классического конкурентного равновесия и равновесий Эджуорта это известный в теории общего равновесия результат, восходящий к пионерской работе Дебре и Скарфа (*Debreu, Scarf*, 1963)[18], который приводится здесь для полноты изложения. Стандартная логика состоит в том, чтобы сначала у элемента из нечёткого ядра установить свойства квазиравновесия и затем, используя неразложимость и внутреннюю точку, показать, что тогда каждое равновесие обращается в полноценное конкурентное равновесие. При этом предположение о полиэдральности можно снять и вместо теоремы 7 использовать соотношение (4) или (5) с тем, чтобы, применяя теорему отделимости, сразу найти цены квазиравновесия. Наконец отметим, что предположение $\sum_\mathcal{I} \mathbf{e}_i \in \operatorname{int} \sum_\mathcal{I} X_i$ можно интерпретировать как условие отсутствия в модели фиктивных продуктов. ■

Доказательство теоремы 8. Если для нестандартных цен $p \in {}^*\mathbb{R}^l$, фигурирующих в теоремах 6 и 7, положить $\bar{p} = \operatorname{st}(p/||p||)$[19], то для договорной модели будет: $\forall i \in \mathcal{I}$

$$\langle \bar{p}, \mathcal{P}_i(x_i)\rangle \geq \max\{\langle \bar{p}, x_i\rangle, \langle \bar{p}, \mathbf{e}_i\rangle\},$$

а для классической

$$\langle \bar{p}, \mathcal{P}_i(x_i)\rangle \geq \langle \bar{p}, \mathbf{e}_i\rangle.$$

Если $\mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset$, то в силу $x_i \in \operatorname{cl} \mathcal{P}_i(x_i)$ (из ($\mathbf{A}$)) последнее неравенство даёт $\langle \bar{p}, x_i\rangle \geq \langle \bar{p}, \mathbf{e}_i\rangle$. Наконец, из $\sum_\mathcal{I} x_i = \sum_\mathcal{I} \mathbf{e}_i$ заключаем $\langle \bar{p}, x_i\rangle = \langle \bar{p}, \mathbf{e}_i\rangle$ $\forall i \in \mathcal{I}$. Таким образом, в ненасыщенной экономике при стандартизованных ценах выполнены бюджетные ограничения и распределение x является *квазиравновесием.* В свою очередь, в силу теоремы 7 квазиравновесия становятся полноценными рыночными равновесиями если для $\bar{p} = \operatorname{st}(p) \neq 0$

$$\operatorname{st}\{z_i \in {}^*X_i \mid pz_i \leq p\mathbf{e}_i\} = \{\bar{z}_i \in X_i \mid \bar{p}\bar{z}_i \leq \bar{p}\mathbf{e}_i\} \ \ \forall i \in \mathcal{I},$$

что обеспечивается «условием Слейтера»: $\inf_{\bar{z}_i \in X_i} \bar{p}\bar{z}_i < \bar{p}\mathbf{e}_i$ $i \in \mathcal{I}$. Чтобы убедится в этом достаточно доказать $\supseteq$ (обратное включение следует из стандартизации неравенства $pz_i \leq p\mathbf{e}_i$), сделаем это.

Пусть $\bar{z}_i \in X_i$ удовлетворяет бюджетному равенству $\bar{p}\bar{z}_i = \bar{p}\mathbf{e}_i$ (для строгого неравенства нечего доказывать). Возьмём $\hat{z}_i \in X_i$ из условия $\bar{p}\hat{z}_i < \bar{p}\mathbf{e}_i$ и найдём

[18] Установлен при существенно более слабых предположениях.

[19] Случай $p = 0$ рассматривается самостоятельно (тривиально), а st(p/||p||) существует всегда в силу компактности сферы единичного радиуса и по нестандартному критерию компактности.

$\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon > 0$ такой, что $p(\varepsilon\hat{z}_i + (1-\varepsilon)\bar{z}_i) \le p\mathbf{e}_i$. Положим $\Delta p = p - \bar{p} \approx 0$ и раскроем нужное неравенство: после преобразований и сокращений находим

$$(\bar{p} + \Delta p)(\varepsilon\hat{z}_i + (1-\varepsilon)\bar{z}_i) \le (\bar{p} + \Delta p)\mathbf{e}_i \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(\bar{p}\hat{z}_i - \bar{p}\mathbf{e}_i) \le \Delta p\mathbf{e}_i - \Delta p(\varepsilon\hat{z}_i + (1-\varepsilon)\bar{z}_i).$$

Здесь величину справа можно оценить как

$$0 \approx -||\Delta p||(||\mathbf{e}_i|| + ||\hat{z}_i|| + ||\bar{z}_i||) \le \Delta p\mathbf{e}_i - \Delta p(\varepsilon\hat{z}_i + (1-\varepsilon)\bar{z}_i)$$

и, так как $\bar{p}\hat{z}_i - \bar{p}\mathbf{e}_i < 0$ — стандартная величина, то найдётся $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon > 0$ такой, что

$$\varepsilon(\bar{p}\hat{z}_i - \bar{p}\mathbf{e}_i) < -||\Delta p||(||\mathbf{e}_i|| + ||\hat{z}_i|| + ||\bar{z}_i||).$$

Для этого ε вектор $z_i = \varepsilon\hat{z}_i + (1-\varepsilon)\bar{z}_i \in {}^*X_i$, $\mathrm{st}(z_i) = \bar{z}_i$ и удовлетворяет нестандартному бюджетному ограничению.

Наконец покажем, что при $\bar{p} = \mathrm{st}(p) \neq 0$ в неразложимой экономике бюджетное ограничение каждого индивида удовлетворяет условию Слейтера. Предполагая противное образуем (непустую) группу $S \subset \mathcal{I}$ всех индивидов, удовлетворяющих $\langle \bar{p}, \mathbf{e}_i \rangle > \inf_{X_i} \langle \bar{p}, X_i \rangle$ и пусть $T \neq \emptyset$ — её дополнение. Далее рассмотрим поток $z = (z_i)_{\mathcal{I}} \in L^{\mathcal{I}}$ ресурсов для коалиции S, заданный по определению нередуцируемой модели, и найдём

$$\forall i \in S \ \langle \bar{p}, x_i + z_i \rangle \ge \langle \bar{p}, x_i \rangle \ \ \& \ \ \exists i \in S: \ \langle \bar{p}, x_i + z_i \rangle > \langle \bar{p}, x_i \rangle \quad \Rightarrow$$

$$\langle \bar{p}, \sum_S z_i \rangle > 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \bar{p}, \sum_S z_i \rangle = \langle \bar{p}, \sum_T z_j \rangle > 0.$$

Однако по построению $\langle \bar{p}, \mathbf{e}_j \rangle = \inf_{X_j} \langle \bar{p}, X_j \rangle$ для $j \in T$ и в силу нередуцируемости

$$\langle \bar{p}, \mathbf{e}_j - z_j \rangle \ge \inf_{X_j} \langle \bar{p}, X_j \rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle \bar{p}, z_j \rangle \le 0 \ \ \forall j \in T.$$

Суммируя по $j \in T$, получаем $\langle \bar{p}, \sum_T z_j \rangle \le 0$, что противоречит предыдущему заключению. Следовательно, $T = \emptyset$ и квазиравновесие является равновесием. ■

6 Заключение

В работе исследуется моделирование условий совершенной конкуренции в моделях экономики, где условие выживаемости экономических агентов (условие Слейтера) нарушается. В таких моделях корректной концепцией равновесия является понятие равновесия с нестандартными ценами и трансферабельными стоимостями. В соответствии с классическими представлениями совершенная конкуренция это условия, в которых ядро совпадает с равновесием, однако как это осуществить для нестандартных равновесий в случае когда они отличаются от обычных (нет Слейтера)?

Анализ основывается на договорном подходе: мы доказываем, что корректной моделью совершенной конкуренции является понятие нечётко договорного распределения — это распределения такие, что нет такой коалиции, для членов которой при частичном и потенциально асимметричном разрыве договоров было бы выгодно заключить новый взаимовыгодный контракт.

При минимально слабых предположениях доказана теорема о совпадении множества всех «нестандартных» равновесий и нечётко договорных — теорема 6 в тексте работы. В качестве следствия этой теоремы установлен (новый) факт существования нечётко договорных распределений — это предположения, обеспечивающие существование нестандартных равновесий.

Исследован классический метод моделирования совершенной конкуренции, основанный на представлении о равновесиях Эджуорта и развивающий подход Дебре и Скарфа. Получено их описание в терминах нестандартных цен из которого следует, что это модель менее квалифицированная чем договорная — теорема 7. Дополнительно представлены и обоснованы условия (известные ранее), при которых равновесия Эджуорта совпадают с конкурентными равновесиями. При этих условиях все изученные понятия эквивалентны — теорема 8.

6.1 Приложение: сводка некоторых результатов нестандартного анализа

В приложениях нестандартного анализа бывает весьма важно уметь показать, что то или иное множество является внутренним. Следующая теорема даёт для этого эффективный критерий, утверждающий, что определимые подмножества внутреннего множества являются внутренними.

Теорема 9 *Пусть A — внутреннее и $B \subseteq {}^*U$ — определимое множества. Тогда $A \cap B$ внутреннее множество.*

Гиперконечные множества

Предположим, что $A \in U$ является множеством. Пусть $F(A)$ обозначает совокупность всех конечных подмножеств A. Говорят, что множество $B \in {}^*U$ *гиперконечно (гиперфинитно)*, если $B \in {}^*F(A)$ для некоторого $A \in U$. В этом случае, конечно, имеем $B \subseteq {}^*A$. Следующая теорема говорит о том, что каждое множество из стандартного универсума U содержится в некотором гиперконечном множестве.

Теорема 10 *Пусть $A \in U$ и $n \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ любое бесконечное натуральное число. Тогда существует гиперконечное множество D такое, что $|D| < n$ и $x \in A \Rightarrow {}^*x \in D$.*

Важно также то, что каждое внутреннее подмножество гиперконечного множества само является гиперконечным (доказательство несложно).

Гипердействительные числа и стандартные части

Из того, что $\mathbb{R}$ упорядоченное поле, следует (по принципу переноса), что ${}^*\mathbb{R}$ также является упорядоченным полем относительно операций $+, \cdot$, и отношения $<$. Говорят, что нестандартное число $r \in {}^*\mathbb{R}$ *конечное*, если $|r| < n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Если $r \in {}^*\mathbb{R}$ конечное, то существует единственное действительное число, бесконечно близкое к r. Это число называется *стандартной частью* числа r и обозначается как ${}^\circ r$ (иногда $\mathrm{st}(r) = \mathrm{st}\, r$). Верно и обратное — если стандартная часть r существует, то r конечно.

Монады и топология

Предположим, что $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство, где $\mathcal{T}$ обозначает совокупность всех открытых множеств. Если $x \in X$, то *монада* элемента x — это множество

$$\mu(x) = \bigcap_{x \in T \in \mathcal{T}} {}^*T.$$

Для *внутреннего* подмножества $A \subset {}^*X$ определены стандартная часть и стандартная внутренность, соответственно

$$\mathrm{st}A = \{y \in L \mid \mu(y) \cap A \neq \emptyset\}, \quad \mathrm{si}A = \{y \in L \mid \mu(y) \subset A \neq \emptyset\}.$$

Известно, что $\mathrm{st}A$ — замкнутое и $\mathrm{si}A$ — открытое множества.

Пусть (X, d) метрическое пространство. Тогда для $x \in {}^*X$, *метрическая монада* x это — множество

$$\mu_m(x) = \{y \in {}^*X | {}^*d(x, y) \approx 0\}.$$

Теорема 11 *Предположим (X, d) — метрическое пространство и $x \in X$. Тогда монада x совпадает с метрической монадой x.*

Если $x, y \in {}^*X$ и y элемент (метрической) монады x, то пишут $x \approx y$ (читается как «y бесконечно близок к x»). Это определение согласуется с предыдущим обозначением, введённым для элементов ${}^*\mathbb{R}$. Обозначение $x \approx y$ используется и для произвольных топологических пространств, но только если $x \in X$; в таком случае $x \approx y \iff y \in \mu(x)$. Пример $\mathbb{R}$ показывает, что монады, вообще говоря, не являются внутренними множествами. Однако каждая монада содержит в себе некоторое внутреннее множество, подобное открытой окрестности точки. Более точно, истинна следующая

Теорема 12 *Для каждого $x \in X$ существует внутреннее множество $D \in {}^*\mathcal{T}$, такое, что $D \subseteq \mu(x)$.*

В остатке этого раздела будет представлен список нестандартных эквивалентностей разного рода топологических понятий.

Теорема 13 *Множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $\mu(x) \subset {}^*A$ для каждого $x \in A$.*

Теорема 14 *Множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ условие $\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$ влечёт $x \in A$.*

Теорема 15 *Множество $K \subset X$ компактно тогда и только тогда, когда для каждого $y \in {}^*K$ существует такой $x \in K$, что $y \in \mu(x)$.*

Для топологического пространства X точка $y \in {}^*X$ называется *околостандартной*, если $y \approx x$ для некоторого $x \in X$; иначе y называется *отдалённой* точкой.

Теорема 16 *Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждая точка $y \in {}^*X$ околостандартна.*

Теорема 17 *Пусть f отображение из топологического пространства X в топологическое пространство Y и предположим, что $x \in X$. Тогда f непрерывно в точке x тогда и только тогда, когда*

$$x' \approx x \implies {}^*f(x') \approx f(x).$$

Последнее условие может быть записано в эквивалентном виде:

$${}^*f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x)).$$

Список литературы

Алипрантис К., Браун Д., Беркеншо О. (1995). Существование и оптимальность конкурентного равновесия. *Пер. с англ. М.: Мир*, 384 с.

Гильдебрант В. (1986). Ядро и равновесие в большой экономике. *Пер. с англ., Москва: Наука*, 200 с.

Девис М. (1980). Прикладной нестандартный анализ. *Пер. с англ. М.: Мир*, 236 с.

Маракулин В. М. (1988). Равновесие с нестандартными ценами и его свойства в математических моделях экономики/ *Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск. Препринт* №18 (1988), 52 с.

Маракулин В. М. (2011). Контракты и доминирование в моделях конкурентной экономики// *Журнал Новой Экономической Ассоциации*, **9**, Москва, 2011, с. 10–32

Маракулин В. М. (2012). Абстрактный равновесный анализ математических моделей экономики. *Новосибирск: Изд-во СО РАН*, 348 с.; ISBN 978-5-7692-1242-0

Маракулин В. М. (2014). О договорном подходе в моделях экономики типа Эрроу — Дебре — Маккензи// *Экономика и Математические Методы*, **50**, №1, 61–79

Anderson, R. M. (1992). Non-standard analysis with applications to economics// Hildenbrand, W., Sonnenschein, H. (eds.): Handbook of Mathematical Economics, vol. IV/ Amsterdam: North-Holland, p. 2145–2208

Aumann, R. J. (1964). Markets with a continuum of traders// *Econometrica*, **32** 1-2, p. 39–50

Brown, D. J., Robinson, A. (1974). The cores of large standard exchange economies// *Journal of Economic Theory* **9**, p. 245–254

Debreu, G., Scarf H. E. (1963). A limit theorem on the core of an economy// *International Economic Review*, **4**, p. 235–246

Konovalov, A. V., Marakulin, V. M. (2006). Equilibria without the survival assumption// *Journal of Mathematical Economics* **42**, p. 198–215

Loeb, P. A. (2000). An introduction to non-standard analysis// Loeb, P. A., Wolff, M. (eds.): Nonstandard analysis for the working mathematician. *Dordrecht: Kluwer Academic Publishers*

Marakulin, V. M. (2013). On the Edgeworth conjecture for production economies with public goods: A contract-based approach// *Journal of Mathematical Economics*, **49**, 3 (May 2013),p. 189–200; ISSN 0304–4068

Marakulin, V. M. (2016). Contracts and domination in incomplete markets: what is a true core?// *Economic Theory Bulletin*, **2016**, 28 pages

Rashid, S. (1987). Economies with many agents: an approach using nonstandard analysis. *Baltimore: Johns Hopkins University Press*

References

Aliprantis, C.D., Brown, D.J., Burkinshaw, O. (1989). Existence and optimality of competitive equilibria. *Berlin/New-York: Springer-Verlag*

Anderson, R. M. (1992). Non-standard analysis with applications to economics// Hildenbrand, W., Sonnenschein, H. (eds.): Handbook of Mathematical Economics, vol. IV/ Amsterdam: North-Holland, p. 2145–2208

Aumann, R. J. (1964). Markets with a continuum of traders// *Econometrica*, **32** 1-2, p. 39–50

Brown, D. J., Robinson, A. (1974). The cores of large standard exchange economies// *Journal of Economic Theory* **9**, p. 245–254

Davis, M. (1977). Applied nonstandard analysis. *New-York: Wiley*, 181 pages

Debreu, G., Scarf, H. E. (1963). A limit theorem on the core of an economy// *International Economic Review*, **4**, p. 235–246

Hildenbrand, W. (1974). Core and equilibria of a large economy. *Princeton/New Jersey: Princeton University Press*

Konovalov, A. V., Marakulin, V. M. (2006). Equilibria without the survival assumption// *Journal of Mathematical Economics* **42**, p. 198–215

Loeb, P. A. (2000). An introduction to non-standard analysis// Loeb, P. A., Wolff, M. (eds.): Nonstandard analysis for the working mathematician. *Dordrecht: Kluwer Academic Publishers*

Marakulin, V. M. (1988). An equilibrium with nonstandard prices and its properties in mathematical models of economy. — *Novosibirsk*, — Preprint No 18, printed in IM SB of USSR Academy of Sciences, 51 p. (in Russian)

Marakulin, V. M. (2011). Contracts and domination in competitive economies// *Journal of the New Economic Association*, **9**, Moscow, p. 10–32 (in Russian) http://journal.econorus.org/jarchive.phtml

Marakulin, V. M. (2012). An abstract equilibrium analysis of economic-mathematical models, *Novosibirsk: SB Russian Academy of Science Publisher*, 348 p. (in Russian); ISBN 978-5-7692-1242-0

Marakulin, V. M. (2013). On the Edgeworth conjecture for production economies with public goods: A contract-based approach// *Journal of Mathematical Economics*,

49, 3 (May 2013),p. 189–200; ISSN 0304–4068

Marakulin, V. M. (2014). On contractual approach for Arrow–Debreu–McKenzie economies// *Economics and Mathematical Methods*, 50(1), Moscow, p. 61–79 (in Russian)

Marakulin, V. M. (2016). Contracts and domination in incomplete markets: what is a true core?// *Economic Theory Bulletin*, **2016**, DOI 10.1007/s40505-016-0105-0, 28 pages

Rashid, S. (1987). Economies with many agents: an approach using nonstandard analysis. *Baltimore: Johns Hopkins University Press*