Равновесный анализ в пространствах Канторовича*

Маракулин В. М.

сентябрь 2004

Институт математики, Российская академия наук,
4 проспект ак. Коптюга, Новосибирск,
Россия, 630090
e-mail: marakul@math.nsc.ru

Аннотация

В работе даётся обзор новейших результатов теории экономического (конкурентного) равновесия с линейно-решёточным пространством продуктов. Объясняется роль и значение порядковых структур для существования равновесий, где ключевую роль играет формула Рисса–Канторовича, истинная в линейных векторных решётках. Доказывается новая теорема существования равновесия, развивающая подход Флорензано–Маракулина [14] и обобщающая соответствующие результаты Турки [27] и ряда других авторов. Доказательство основано на новых характеризациях элементов нечеткого ядра в модели экономики обмена.

Ключевые слова и фразы: экономика обмена, нечёткое ядро, линейные векторные решётки, конкурентное равновесие, правильные предпочтения.
JEL Classification: C 62, D 61

*Исследование поддержано грантом Российского фонда фундаментальных исследований НШ-80.2003.6 и грантом Российского гуманитарного научного фонда № 02-02-00189.

Введение

Открытие и разработка теории частично упорядоченных векторных пространств является одним из наиболее ярких достижений Л. В. Канторовича. Эта теория, изначально появившаяся из внутренних потребностей функционального анализа, переживавшего в 30-х годах прошлого века эпоху своего становления, поразительным образом переплетается с формально проявившимися позднее другими научными интересами своего первооткрывателя, его интересами к экономической проблематике. Это было время, когда еще не было формальной модели экономики Эрроу–Дебре–МакКензи, когда фон Нойман и Моргенштерн еще не написали знаменитый трактат "Теория игр и экономическое поведение", когда собственно идеи теории игр только начали проникать в экономическую теорию. Более того, это было время идеологических запретов в СССР, когда любое отступление от марксистских догматов грозило физическим уничтожением, что, конечно, не способствовало изучению и распространению западных экономических учений. Представляется, что Канторович видел экономические проблемы под собственным, независимо выработанным, углом зрения, по видимому, сквозь призму другого своего творения — теории линейного программирования. Однако идея частично упорядоченного линейного пространства (полуупорядоченное по Канторовичу) столь фундаментальна, что несмотря на её "абстрактность" нашла-таки своё естественное приложение в современных экономических учениях по мере их математического насыщения. Действительно, порядковые отношения "больше — меньше" весьма характерны для экономики, что проявляется уже на уровне обыденной жизни. Однако для теоретических целей особенно важными являются именно структурные решёточные свойства линейных пространств, которые в контексте экономической модели являются *пространством продуктов*. В данной работе будет рассмотрена теория экономического (конкурентного) равновесия в рамках известной модели Эрроу–Дебре, точнее в её простейшей реализации — экономики чистого обмена.

Понятие равновесия является одной из базовых концепций современной экономической теории, отражающую идею равенства спроса и предложения, т. е. сбалансированности всех продуктовых рынков. При этом однако формализация этой концепции существенно зависит от вида модели и уровня её детализации. По мере развития экономической теории было предложено множество моделей экономики, в контексте которых понятие равновесия надлежащим образом видоизменялось. Экономисты не сразу осознали необходимость обоснования самого факта существования равновесия, однако как еще может быть обоснована корректность, т. е. математическая непротиворечивость как самой концепции так и собственно формальной модели экономики? Появившаяся в середине 50-х усилиями Кеннета Эрроу и Жерара Дебре [7], а также Лайонеля МакКензи [23], модель экономики является одной из наиболее фундаментальных в современной экономической теории. Эта модель включает в себя конечное множество экономических агентов — потребителей и производителей, — которые, решая собственные экстремальные задачи, формируют спрос и предложение. Предполагается, что потребители максимизируют свою полезность при бюджетном ограничении (имеются и другие ограничения, имеющие внеэкономическую природу), принимая текущие рыночные цены как заданные. Ориентируясь на (фиксированные) рыночные цены, производители максимизируют прибыль, которая затем перераспределяется среди потребителей. Цены равновесия это ситуация когда спрос (сумма индивидуальных потребительских решений) равен предложению (сумма производственных решений и начальных запасов). В такой постановке уже неясно, когда существуют цены равновесия, и какие свойства модели являются значимыми (есть простые примеры экономики без равновесия). Авторы модели нашли приемлемые условия, при которых равновесия существуют; в дальнейшем эти условия (модельные предположения) ослаблялись многими исследователями (см. обзор [9]), а собственно модель обобщалась в разных направлениях. Одним из этих обобщений явилось исследование модели Эрроу–Дебре–МакКензи в случае бесконечномерного пространства продуктов. Подробный обзор результатов этого направления содержится в следующем разделе настоящей работы. Здесь укажем только на наиболее существенные черты этой проблематики.

Первое отличие бесконечномерной модели от конечномерной состоит в том, что вместо вектора цен используется линейный функционал, определённый на пространстве продуктов. В таком случае стоимостная оценка потребительского набора находится как значение ценового функционала, вычисленное для данного вектора (набора продуктов). Значение ценового функционала на векторе — производственной программе какого-нибудь производителя — даёт значение прибыли. Второе отличие состоит в том, что из содержательных соображений близкие потребительские наборы должны иметь близкие стоимостные оценки, следовательно, требуется непрерывность ценового функционала. При этом появляется множество специфических математических проблем, связанных с компактностью нужных подмножеств, выбором подходящей топологии и т. д. (используются слабые и слабые со звездой топологии, теорема Алаоглу и пр.). По мере развития бесконечномерной теории равновесия в анализ вовлекались новые (известные) функциональные пространства, однако к середине 80-х годов стало понятно, что *ключевыми* в этих пространствах *являются* их *порядковые свойства*. Именно, роль пространства продуктов должны играть полуупорядоченные по Канторовичу пространства — в современной терминологии *линейные векторные решётки* или пространства Рисса. Основная тому причина — формула Рисса–Канторовича о представлении супремального линейного функционала (точная верхняя грань двух порядково ограниченных линейных функционалов), истинная в данном классе пространств. Более того, связь между топологической и порядковой структурами может быть очень слабой, а порядковые операции могут быть разрывными. Важно лишь то, чтобы конус неотрицательных элементов был замкнут в исходной топологии и чтобы топологически двойственное являлось подрешёткой порядково двойственного к пространству продуктов. Интересно, что итоговый равновесный ценовой функционал находится в модели как супремум специальным образом найденных функционалов, отвечающих экономическим агентам. Эти функционалы, найденные для распределения из нечёткого ядра экономики, являются опорными к множествам предпочтительных потребительских планов у каждого из потребителей и опорными к производственному множеству у каждого из производителей. Таким образом, любое распределение из нечёткого ядра можно децентрализовать с помощью супремального функционала цен, найденного по формуле Рисса–Канторовича.

Работа организована следующим образом. В первом разделе дается краткий (и неполный) исторический обзор теории равновесия с бесконечномерным пространством продуктов. Во втором разделе описывается система обозначений, модель экономики чистого обмена, и, главное, устанавливаются новые характеристические свойства элементов нечёткого ядра — важного инструмента исследования настоящей работы. Третий раздел посвящён собственно проблеме существование равновесий в линейно-решёточной экономике обмена. Здесь формулируется и доказывается основной результат — новая теорема существования. В четвёртом разделе осуществляется сравнение полученного результата с подобными результатами из работы Турки [27].

1 Равновесный анализ в бесконечномерных моделях: краткий исторический обзор

Основоположником теории экономического равновесия с бесконечномерным пространством продуктов следует считать Трумана Бьюли, работа которого [8] инициировала широкие исследования в этом направлении[1]. В [8] Бьюли установил существование равновесий в модели типа Эрроу–Дебре с конечным числом экономических агентов, в которой в качестве пространства продуктов было избрано $L_\infty(\mathbb{R}^l)$ — пространство существенно ограниченных измеримых функций (с областью значений $\mathbb{R}^l$ и областью определения $[0,1]$). Эта работа высветила значение теоремы Алаоглу и ту роль, которую играют "слабые топологии", ассоциированные с дуальностью — слабая, слабая со звездой и Макки — в проблеме существования равновесия с непрерывными, в исходной топологии пространства продуктов, ценами. Изменилась и точка зрения на то, чем являются цены,

[1] Несколько раньше появилась работа Пелега и Яари [24].

(отмеченная формально ещё Дебре в [10]), — теперь это уже не просто вектор, но линейный функционал. Пространство $L_\infty(\mathbb{R}^l)$ очень удобно для математического анализа и обладает рядом ключевых свойств конечномерного пространства. Одним из таких свойств является тот факт, что конус неотрицательных элементов имеет *непустую* внутренность в исходной топологии (определяемой нормой — существенный супремум модуля функции). Последнее позволило использовать обычную математическую идею конечномерных аппроксимаций, в которых привычными методами устанавливается существование "конечномерных равновесий". В дальнейшем функционал цен продолжается до непрерывного функционала на всём пространстве, а затем реализуется предельный переход. Таким способом Бьюли получает цены из топологически двойственного к $L_\infty(\mathbb{R}^l)$ — пространству $(ba)^l$. Переход к ценам из $L_1(\mathbb{R}^l) \subset (ba)^l$ осуществляется при повышении требования к непрерывности предпочтений — предполагается полунепрерывность снизу в топологии Макки (сильнейшая локально выпуклая топология, ассоциированная с двойственностью) в двойственности $\langle L_\infty(\mathbb{R}^l), L_1(\mathbb{R}^l)\rangle$.

Другим примечательным результатом, заложившим основы современного равновесного анализа в экономиках с бесконечным числом продуктов, является работа Пелега и Яари [24]. Авторы рассмотрели довольно частный случай экономики обмена с конечным числом потребителей и пространством продуктов $\mathbb{R}_\infty$ (т. е. $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ – натуральный ряд "временных периодов"). Работа интересна прежде всего методом доказательства, который сводится к обобщению теоремы Дебре–Скарфа о совпадении ядра и равновесия в условиях совершенной конкуренции (в "реплицированных" экономиках) и обобщению теоремы Скарфа (на случай бесконечномерных пространств) — тем фактом, что ядро непусто в сбалансированных кооперативных играх без побочных платежей. Данный метод приводит к наиболее сильным современным результатам в бесконечномерной теории равновесия. Цены в модели Пелега–Яари интерпретировались как ставки процента при переходе от одного временного периода к другому (модель однопродуктовая). Именно в силу этой трактовки в модели Бьюли более предпочтительны цены из L_1, а не из ba (чисто конечно-аддитивную меру трудно интерпретировать с содержательной точки зрения). В модели Пелега–Яари проявилась также характерная трудность бесконечномерных пространств — конус неотрицательных элементов, который стандартно принимается в качестве потребительского множества, очень часто имеет *пустую* внутренность.

Последующие исследования выявили теоретическую значимость порядковых структур основного пространства продуктов, (что не имеет большого значения в конечномерных пространствах). В явной форме частично упорядоченные пространства (и отвечающие им модельные понятия) впервые были рассмотрены Крепсом [17]. Пространства Рисса (линейные решётки, а в русскоязычной литературе, — пространства Канторовича[2]) были введены в теорию конкурентного равновесия Алипрантисом и Брауном [2]. В последствии решёточная структура пространства продуктов была использована Мас-Колеллом [19], чтобы доказать замечательную теорему существования равновесия (общий обзор литературы по этому вопросу можно найти в [22]). В этой же работе Мас-Колелл водит важное понятие *равномерной* правильности (собственности) предпочтений (своеобразный аналог равномерной непрерывности или липшицируемости) и расширяет рамки анализа до топологических векторных решеток. Формально, данное специфическое *понятие правильности* компенсирует (возможные) негативные свойства пространства продуктов, в котором конус неотрицательных элементов может иметь пустую внутренность. Понятие (предположение) "правильности" затем многократно ослаблялось и пересматривалось многими авторами. В современных работах оно определяется в довольно абстрактном виде, но в некоторых частных случаях означает, что со всяким достижимым набором продуктов (вектором) можно ассоциировать некоторый открытый выпуклый конус с вершиной в данной точке, который не пересекается с множеством (строго) предпочтительных потребительских планов (подробнее см. [22] и [4]).

Монография Алипрантиса, Брауна и Бёркеншо [4] подвела определённый итог достижений 80-х годов в равновесном анализе моделей с бесконечным числом продуктов. Особое внимание в ней было уделено двойственности векторных решеток и их локально солидных топологий. Именно эти топологии обеспечивают равномерную непрерывность решёточных операций (операции взятия супремума или инфимума). Сравнительно недавно Мас-Колелл и Ричард [21] сделали следующий шаг и установили существование равновесий в моделях, где пространство продуктов описывается как линейная векторная решетка. Данный термин, в отличие от топологических векторных решеток, *не предполагает непрерывность* решёточные операций. Важным является тот факт, что это не просто очередное обобщение, но таким образом могут быть описаны экономически содержательные модели, ранее не включенные в общую теорию. Например, в исследованной Джонсом [15] модели с дифференцируемыми продуктами, пространство продуктов описывается как пространство борелевских мер, определенных на некотором компакте $\mathcal{M}$. Это пространство является линейной, но не топологической решеткой (в слабой со звездой топологии, определяемой двойственностью $\langle C(\mathcal{M}), ca(\mathcal{M})\rangle$, см. также близко примыкающую работу Хуанга и Крепса [16]). Отметим, что в работе Мас-Колелла и Ричарда явным образом ис-

[2]Точнее, под термином *пространство Канторовича* понимается полная по Дедекинду (каждое порядково ограниченное сверху множество имеет супремум) линейная решётка. Однако в контексте данной работы мы трактуем высказывание "пространства Канторовича" в расширенном смысле — как пространства, используемые в теории, построенной Канторовичем.

пользуются порядковые свойства предпочтений экономических агентов, (а значит они могут быть представлены в виде функций полезности, что позволяет искать неподвижную точку в критериальном "пространстве полезностей" — это так называемый поход Негииши). В последующих исследованиях многие авторы (см. [25], [27], [11], [14]) избавили теорию от этого навязанного предположения, устанавливая существование равновесий при нетранзитивных и неполных предпочтениях экономических агентов (это, конечно, требует коренного пересмотра всего доказательства). Кроме того, в большинстве из указанных работ требование равномерной правильности предпочтений заменяется на *поточечную* характеризацию (первыми на эту возможность указали Арайо и Монтеро [6], и Даффи и Зейм [12]), что существенно слабее и, главное, лучше соответствует содержательной стороне вопроса в ряде приложений общей модели (например, к финансовой теории, где уже в модели Пелега и Яари предпочтения не являются равномерно правильными). Отметим в этом ряду весьма интересную работу Подчека [25], существенно обобщившую понятие правильности предпочтений. Подобные результаты для модели с производственным сектором доказаны в [28], [14]. В заключении еще раз отметим, что все развитие бесконечномерной теории равновесия происходило в рамках пространств Канторовича, ибо именно в линейных решётках имеет место ключевая формула Рисса–Канторовича о представлении супремального функционала. Более того, именно эта формула является базовым элементом дальнейшего развития теории, где в качестве цен рассматриваются и нелинейные функционалы, см. например [5].

Однако теория равновесия в линейно-решёточных экономиках к настоящему моменту все ещё является неполной и содержит следующий пробел. В самом деле, можно обнаружить, что результаты работы Флорензано–Маракулин [14], будучи очень общими, все еще не покрывают теоремы доказанные Турки в [27] и [28] и к настоящему моменту эти результаты являются взаимодополняющими. Причина этого состоит в том, что основные теоремы существования в [14] были доказаны при специфическом понятии правильности (так называемая E-правильность), которая формулируется относительно главного идеала пространства продуктов, генерированного вектором совокупных начальных запасов. Однако в таком случае эта концепция не сопоставима с M-правильностью, применявшейся в [27], [28]. В то же время E-правильность из [14], рассмотренная относительно *всего* пространства продуктов, существенно слабее M-правильности по Турки, но для пространств без порядковой единицы такая теорема существования в [14] не была доказана. Настоящая работа восполняет указанный пробел (в контексте модели обмена). Доказательство основано на новых характеризациях элементов нечёткого ядра модели экономики. Затем, с помощью одной из характеризаций, доказывается новая теорема существования квазиравновесия для линейно-векторно-решёточной экономики при прочих современных слабейших предположениях. Эта теорема устанавливается при указанных выше структурных предположениях и при предположении E-правильности из [14] относительно *всего* пространства продуктов и не зависит от того, имеет оно единицу или нет.

2 Экономика обмена и характеризации нечеткого ядра

2.1 Обозначения

В данной работе наряду со стандартными будут использоваться следующие обозначения. Пусть L некоторое векторное пространство над $\mathbb{R}$ и L^* его алгебраически двойственное.

$\operatorname{co} A$ — выпуклая оболочка множества $A \subset L$,

$A + x = \{a + x \mid a \in A\}$ при любых $A \subseteq L$, $x \in L$,

$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ при любых $A \subseteq L$, $B \subseteq L$,

$\langle p, x\rangle = p(x) = px$ скалярное произведение векторов $p \in L^*$, $x \in L$,

$\langle p, A\rangle = \{p(x) \mid x \in A\}$, где $p \in L^*$, $A \subset L$,

$A \geq B \iff a \geq b, \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B$ при любых $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$,

$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ теоретико-множественная разность.

Линейный отрезки в L с концами $a, b \in L$ обозначим следующим образом.

$\lfloor a, b\rfloor = \operatorname{co}\{a, b\} = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$,

$(a, b\rfloor = \lfloor a, b\rfloor \setminus \{a\} = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 < \lambda \leq 1\}$.

Пусть $x, y \in L^n$, $x = (x_i)_{i=1,\ldots,n}$, $y = (y_i)_{i=1,\ldots,n}$. Тогда

$\lfloor\!\lfloor x, y\rfloor\!\rfloor = \prod_{i=1}^{n} \lfloor x_i, y_i\rfloor$ декартово произведение (замкнутых) линейных отрезков.

Обозначение $[a, b]$ применяется в случае, когда $(L, \geq)$ является частично упорядоченным множеством и означает *порядковый* отрезок с концами a и b, т. е.

$[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$.

Если L оснащено также некоторой топологией, то для $A \subseteq L$

$\overline{A}$ — замыкание множества A, а

$\mathrm{int} A$ — его внутренность.

2.2 Экономика обмена: основные понятия

Предметом анализа настоящей работы является стандартная модель экономики чистого обмена. В этой модели L обозначает *пространство продуктов* и имеется (конечное) множество агентов (торговцев или потребителей) $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$. Потребитель $i \in \mathcal{I}$ стандартным образом характеризуется собственным потребительским множеством $X_i \subset L$, вектором исходных запасов $\omega_i \in X_i$ и отношением предпочтения, описанным как точечно-множественное отображение $\mathcal{P}_i : \mathcal{X} \rightrightarrows X_i$, $\mathcal{X} = \prod_{\mathcal{I}} X_j$, где множество $\mathcal{P}_i(x)$ содержательно означает совокупность всех потребительских наборов, строго предпочитаемых агентом i набору x_i в состоянии $x = (x_j)_{j \in \mathcal{I}} \in \mathcal{X}$. Будет использоваться также обозначение $y_i \succ_i^x x_i$, которое по определению эквивалентно $y_i \in \mathcal{P}_i(x)$. Таким образом, экономика чистого обмена может быть представлена в виде тройки

$$\mathcal{E} = \langle \mathcal{I}, L, (X_i, \mathcal{P}_i, \omega_i)_{i \in \mathcal{I}} \rangle.$$

В дальнейшем всегда предполагается, что модель $\mathcal{E}$ удовлетворяет следующему предположению **(C)**, причём пределах этого раздела это единственное предположение.

Обозначим символом $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathcal{I}}$ полный вектор исходных запасов (всех) торговцев рассматриваемой модели и определим

$$\mathcal{A}(\mathcal{X}) = \{x \in \mathcal{X} \ \mid \ \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} \omega_i\}$$

— это множество всех *достижимых распределений* (состояний) модели $\mathcal{E}$.

(C) *Для каждого* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$ *и каждого* $i \in \mathcal{I}$ *имеют место*

(i) *выпуклая иррефлексивность*: $x_i \notin \operatorname{co} \mathcal{P}_i(x)$,

(ii) *выпуклость предпочтений*: *множество* $\{x_i\} \cup \mathcal{P}_i(x)$ *выпукло.*

Заметим, что предположение **(C)** влечёт выпуклость множеств $\mathcal{P}_i(x)$[3], что, конечно, можно отдельно постулировать (тогда пункт (i) запишется в виде

[3]Для $y, z \in \mathcal{P}_i(x)$ из (ii) имеем $\lambda y + (1-\lambda) z \in \{x_i\} \cup \mathcal{P}_i(x)$, $\lambda \in [0, 1]$, но по (i) $x_i \neq \lambda y + (1-\lambda) z$.

$x_i \notin \mathcal{P}_i(x)$). Отметим также, что предпочтения могут быть насыщенными, т. е. для некоторых агентов возможно $\mathcal{P}_i(x) = \emptyset$. Однако если $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$, то в силу **(C)**(ii) имеет место *локальная ненасыщаемость* в точке x (ибо $(x_i, y\rfloor \subset \mathcal{P}_i(x)$, $\forall\, y \in \mathcal{P}_i(x)$). Напомним далее концепцию нечёткого ядра и прочие определения.

Пара (x, p) называется *квазиравновесием* модели $\mathcal{E}$, если $x \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$, $p \neq 0$ — линейный функционал над L и

$$\langle p, \mathcal{P}_i(x)\rangle \geq p \cdot x_i = p \cdot \omega_i, \quad \forall\ i \in \mathcal{I}.$$

Квазиравновесие, такое, что $y_i \succ_i^x x_i$ влечёт $p \cdot y_i > p \cdot x_i$ называется *вальрасовским или конкурентным* равновесием.

Говорят, что распределение $x \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$ *доминируется* (блокируется по) коалицией (непустой) $S \subset \mathcal{I}$, если существует такой $y^S \in \prod_{i\in S} X_i$, что $\sum_{i\in S} y_i^S = \sum_{i\in S} \omega_i$ и $y_i^S \in \mathcal{P}_i(x_i)$ для каждого $i \in S$.

Ядро модели $\mathcal{E}$ — обозначенное как $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ — это множество всех $x \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$, которые не блокируются никакой коалицией.

Слабая граница Парето модели $\mathcal{E}$ — обозначение $\mathcal{PB}^w(\mathcal{E})$ — это множество таких $x \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$, которые не блокируются коалицией $\mathcal{I}$ (всех агентов).

В современном равновесном анализе при моделировании условий совершенной конкуренции важную роль играет концепция нечёткого ядра. Напомним, что любой вектор

$$t = (t_1, \ldots, t_n) \neq 0, \quad 0 \leq t_i \leq 1, \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$$

отождествляется с нечёткой коалицией, где вещественные t_i интерпретируются как мера участия потребителя i в данной коалиции. Говорят, что коалиция t доминирует (блокирует) распределение $x \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$, если найдётся такой $y^t \in \prod_{\mathcal{I}} X_i$, что

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} t_i y_i^t = \sum_{i\in\mathcal{I}} t_i \omega_i \iff \sum_{i\in\mathcal{I}} t_i(y_i^t - \omega_i) = 0 \tag{2.1}$$

и при этом

$$y_i^t \in \mathcal{P}_i(x), \quad \forall\, i \in \operatorname{supp}(t) = \{i \in \mathcal{I} \mid t_i > 0\}. \tag{2.2}$$

Множество всех неблокируемых по нечетким коалициям достижимых состояний, обозначенное как $\mathcal{C}^f(\mathcal{E})$, называется *нечетким ядром* модели $\mathcal{E}$.

2.3 Характеризации нечеткого ядра в модели обмена

Хорошо известно, что при ненасыщенных предпочтениях, т. е. когда $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$, определяющие нечёткое ядро условия (2.1), (2.2) можно эквивалентным образом переписать в виде

$$0 \in \sum_{i \in \mathcal{I}} t_i(\mathcal{P}_i(x) - \omega_i).$$

Таким образом, так как в силу **(C)** множества $\mathcal{P}_i(x)$ выпуклы, включение $x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E})$ будет эквивалентно условию[4]

$$0 \notin \mathrm{co}[\bigcup_{\mathcal{I}}(\mathcal{P}_i(x) - \omega_i)], \tag{2.3}$$

откуда, в частности, (после применения теоремы отделимости) следует тот факт, что элементы нечёткого ядра являются квазиравновесиями. Ниже будут предложены другие полезные в приложениях характеризации точек из нечеткого ядра.

С этой целью рассмотрим множества

$$\Omega_i(x) = \mathrm{co}(\mathcal{P}_i(x) \cup \{\omega_i\}), \quad i \in \mathcal{I}.$$

В силу выпуклости $\mathcal{P}_i(x)$, при $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$ заключаем

$$\mathrm{co}(\mathcal{P}_i(x) \cup \{\omega_i\}) = \bigcup_{0 \le \lambda \le 1}[\lambda \mathcal{P}_i(x) + (1-\lambda)\omega_i] = \bigcup_{0 \le \lambda \le 1} \lambda(\mathcal{P}_i(x) - \omega_i) + \omega_i, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Отсюда следует, что условие $z+\omega \in \prod_{\mathcal{I}} \Omega_i(x)$, где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, эквивалентно существованию таких $0 \le \lambda_i \le 1$ и $[y_i \in \mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$ и $y_i = \omega_i$, если $\mathcal{P}_i(x) = \emptyset]$, $i \in \mathcal{I}$, что

$$z = (\lambda_1(y_1 - \omega_1), \ldots, \lambda_n(y_n - \omega_n)).$$

Таким образом, в силу (2.1), (2.2) заключаем

$$x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E}) \iff \nexists\, z \in L^{\mathcal{I}},\, z \neq 0: \quad z + \omega \in \prod_{\mathcal{I}} \Omega_i(x_i) \quad \& \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = 0 \iff$$

$$\prod_{\mathcal{I}} \Omega_i(x) \bigcap \{(z_1, \ldots, z_n) \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} \omega_i\} = \{\omega\}. \tag{2.4}$$

Тем самым доказано следующее

Утверждение 2.1 *Распределение $x \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$ является элементом нечёткого ядра тогда и только тогда, когда выполнено соотношение (2.4).*

---

[4] Ибо доминирование по произвольным нечётким коалициям эквивалентно доминированию по нормированным коалициям, отвечающим наборам весовых коэффициентов выпуклой комбинации, т. е. для доминирования достаточно использовать коалиции, удовлетворяющие $\sum_{i \in \mathcal{I}} t_i = 1$.

Далее мы рассмотрим другие полезные характеризации нечёткого ядра. С этой целью рассмотрим конус $\Gamma_i(x)$, отвечающий множеству предпочтительных потребительских планов агента i, полагая

$$\Gamma_i(x) = \{\alpha(z_i - x_i) \mid \alpha > 0, z_i \in \mathcal{P}_i(x)\}$$

при $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$. По построению $\mathcal{P}_i(x) - x_i \subset \Gamma_i(x)$, откуда $\mathcal{P}_i(x) \subset \Gamma_i(x) + x_i$. Определим также

$$\mathcal{A}(L^{\mathcal{I}}) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} \omega_i\}.$$

Утверждение 2.2 *Пусть* $x \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$ *и* $\mathcal{P}_i(x) \neq \emptyset$ *для каждого* $i \in \mathcal{I}$. *Тогда* $x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E})$ *влечёт каждое из следующих условий*:

(i) $\prod_{\mathcal{I}}(\mathcal{P}_i(x) + \lfloor 0, \omega_i - x_i \rfloor) \bigcap \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}}) = \emptyset,$

(ii) $\prod_{\mathcal{I}}(\Gamma_i(x) + \lfloor x_i, \omega_i \rfloor) \bigcap \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}}) = \emptyset.$

Легко видеть, что условия (i) и (ii) на самом деле эквивалентны. Заметьте также, что $\Omega_i(x) \setminus \{\omega_i\} \subset \mathcal{P}_i(x) + \lfloor 0, \omega_i - x_i \rfloor$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$. Тем самым условия, описанные в Утверждении 2.2, очень близки к тому, чтобы быть не только необходимыми, но и достаточными.

Доказательство. Так как

$$\mathcal{P}_i(x) + \lfloor 0, \omega_i - x_i \rfloor \subset \Gamma_i(x) + \lfloor x_i, \omega_i \rfloor,\ \forall\, i \in \mathcal{I},$$

то достаточно доказать $x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E}) \Rightarrow$ (ii). Сделаем это.

Пусть

$$y \in \prod_{\mathcal{I}}(\Gamma_i(x) + \lfloor x_i, \omega_i \rfloor) \bigcap \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}}).$$

Тогда для всех i найдутся $z_i \in \mathcal{P}_i(x)$, $\lambda_i \in [0, 1]$ и $\alpha_i > 0$ такие, что

$$y_i = \lambda_i x_i + (1 - \lambda_i)\omega_i + \alpha_i(z_i - x_i), \tag{2.5}$$

и при этом $\sum_{i \in \mathcal{I}} y_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} \omega_i$. Рассмотрим достаточно малый действительный $\beta > 0$. В силу $x \in \mathcal{A}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}})$, $y \in \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}})$, имеем

$$h = \beta y + (1 - \beta)x \in \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}}).$$

Компоненты вектора $h = (h_i)_{i \in \mathcal{I}}$ можно записать в виде

$$h_i = \beta[\lambda_i x_i + (1 - \lambda_i)\omega_i + \alpha_i(z_i - x_i)] + (1 - \beta)x_i =$$

$$= (1-\beta+\beta\lambda_i)x_i + (\beta-\beta\lambda_i)\omega_i + (1-\beta+\beta\lambda_i)\frac{\alpha_i\beta}{1-\beta+\beta\lambda_i}(z_i - x_i).$$

По выбору β можно считать $\mu_i = \frac{\alpha_i\beta}{1-\beta+\beta\lambda_i} \le 1$, что в силу **(C)** влечёт

$$\mu_i(z_i - x_i) \in \mathcal{P}_i(x) - x_i \;\Rightarrow\; \exists\,\eta_i \in \mathcal{P}_i(x):\; \mu_i(z_i - x_i) = \eta_i - x_i.$$

Но тогда из предыдущей формулы находим

$$h_i = (1-\beta+\beta\lambda_i)\eta_i + (\beta-\beta\lambda_i)\omega_i,$$

что в силу $(1-\beta+\beta\lambda_i)+(\beta-\beta\lambda_i) = 1$ и $\eta_i \in \mathcal{P}_i(x)$ влечёт $h_i \in \Omega_i(x)$. Последнее позволяет применить соотношение (2.4), получая $h = h(\beta) = \omega$ для *всех* достаточно малых $\beta > 0$. Записывая это равенство покомпонентно, находим

$$y_i = \frac{(\beta-1)x_i + \omega_i}{\beta} = x_i + \frac{\omega_i - x_i}{\beta},\; i \in \mathcal{I}.$$

Однако это соотношение, истинное для *разных* $\beta > 0$, может выполняться только если $y_i = x_i = \omega_i$, $i \in \mathcal{I}$, что в силу (2.5) влечёт $x_i = \omega_i \in \mathcal{P}_i(x)$ и противоречит $(\mathbf{C})(\mathbf{i})$. □

Описанные характеризации элементов нечёткого ядра получают ясное геометрическое представление в пределах ящика Эджворта. Действительно, в случае *двух потребителей* условие (2.4) можно переписать в виде

$$\Omega_1(x) \cap (\bar\omega - \Omega_2(x)) = \{\omega_1\}, \quad \bar\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Более того, в данном случае тот факт, что нечёткая коалиция $(t_1, t_2) > 0$, $t_i \le 1$ доминирует распределение (x_1, x_2), означает следующее. Рассмотрим ящик Эджворта. По определению в нетривиальном случае доминирование возможно только если $t_1 \ne 0$ & $t_2 \ne 0$ и при этом:

$$\exists\; y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2_+ \;:\; y_1 \succ_1^x x_1,\; y_2 \succ_2^x x_2 \;\;\&\;\; t_1(y_1 - \omega_1) = t_2(\omega_2 - y_2).$$

Положим $z_2 = \bar\omega - y_2$ — это вектор, соответствующий потребительскому набору участника 1 в случае, когда 2-й потребляет y_2. Этот вектор “изображает” y_2 в естественной системе координат, отвечающей потреблениям потребителя 1. Подставляя z_2 в правую часть последнего соотношения, находим

$$t_1(y_1 - \omega_1) = t_2(\omega_2 - (\bar\omega - z_2)) = t_2(z_2 - \omega_1) \iff z_2 = \omega_1 + \frac{t_1}{t_2}(y_1 - \omega_1),\; t_2 \ne 0.$$

Геометрически равенство правой и левой частей последнего соотношения означает, что точки y_1 и z_2 находятся на общей прямой, проходящей через точку ω_1,

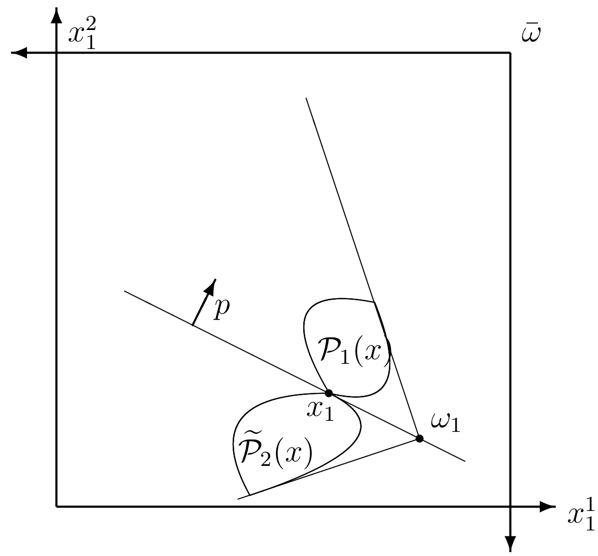

Рис. 2.1: нечёткое ядро

причём по одну общую сторону от ω_1 (находятся на одном луче). Кроме того, по определению доминирования должно быть $y_1 \in \mathcal{P}_1(x)$ и $z_2 \in \bar{\omega} - \mathcal{P}_2(x)$. В итоге приходим к следующему:

$(x_1, x_2) \notin \mathcal{C}^f(\mathcal{E}) \iff \exists$ *луч*, выходящий из точки ω_1, одновременно пересекающий множества $\mathcal{P}_1(x)$ и $\bar{\omega} - \mathcal{P}_2(x)$.

Представление нечёткого ядра на ящике Эджворта (двухпродуктовая экономика) даёт рис. 2.1, где $\widetilde{\mathcal{P}}_2(x) = \bar{\omega} - \mathcal{P}_2(x)$. Действительно, здесь принадлежность распределения нечёткому ядру эквивалентна тому, что выпуклые оболочки множеств $\mathcal{P}_1(x) \cup \{\omega_1\}$ и $[\bar{\omega} - \mathcal{P}_2(x)] \cup \{\omega_1\}$ пересекаются только по точке ω_1 (альтернативно — в терминах конусов, "выпущенных" из точки ω_1 и "проходящих" через множество строго лучших потребительских планов).

Подобные иллюстрации требований (i) и (ii) Утверждения 2.2 даны на рисунках 2.2, 2.3, соответственно.

3 Существование равновесий в линейно-решёточной экономике обмена

Проблема существования равновесия в модели экономики с бесконечным числом продуктов интенсивно исследовалась в литературе последнего двадцатилетия. История предмета восходит к работам Бьюли [8] и Пелега–Ярри [24]. Основная трудность в анализе этих моделей состоит в том, что рассматривается

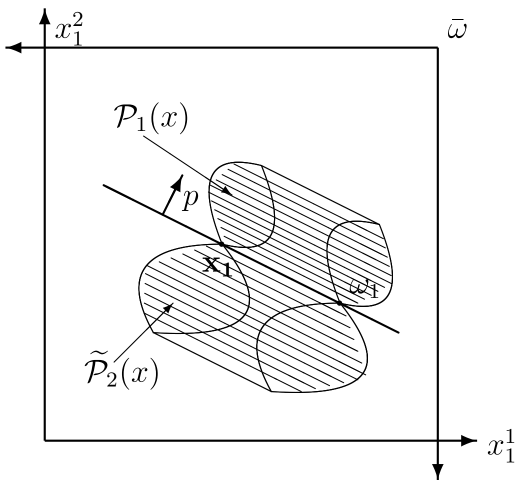

Рис. 2.2: нечёткое ядро, свойство (i)

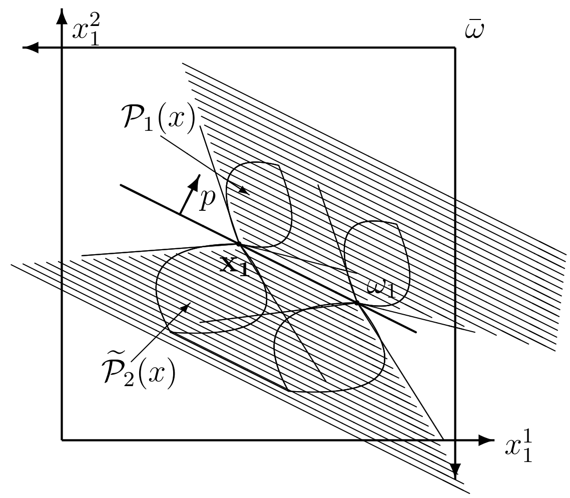

Рис. 2.3: нечёткое ядро, свойство (ii)

частично упорядоченное линейное пространство продуктов, порядок в котором задается конусом неотрицательных элементов, который может иметь пустую внутренность. Таким образом, пространство продуктов обладает двумя структурами — линейного порядка и линейной топологии. Чтобы разрешить эту проблему, с целью получить непрерывный ценовой функционал, Мас-Колелл [19] вводит понятие равномерно правильных предпочтений. В дальнейшем в литературе рассматривались и другие подобные требования правильности, см. напр. [29], [25], [27], [14] в том числе в поточечных терминах. Изначально анализ моделей осуществлялся в контексте пространства продуктов, которое является топологической векторной решеткой — фильтр окрестностей нуля обладает базой из выпукло-солидных множеств. В этих пространствах решёточные операции равномерно непрерывны. Однако с появлением работ Джонса [15] и Хуанга–Крепса [16], стали интенсивно изучаться и модели, в которых пространство продуктов не является столь квалифицированным, это так называемая линейная векторная решётка. У пространства продуктов этого типа имеется только слабая связь топологической и порядковой структур — конус неотрицательных элементов замкнут, а двойственное пространство непрерывных линейных функционалов является подрешеткой порядково двойственного (пространство порядково ограниченных линейных функционалов). Анализ моделей этого типа существенно сложнее и в этих пространствах решёточные операции могут быть разрывны. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы установить теоремы существования квазиравновесия с непрерывными ценами, обобщающие результаты Турки [27] и Флорензано–Маракулина [14]. Рассмотрим далее предположения.

В данном параграфе мы будем предполагать, что на пространстве L задана хаусдорфова топология τ, но при этом это частично упорядоченное пространство $(L, \geq)$ с конусом неотрицательных элементов $L^+ = \{x \in L \mid x \geq 0\}$.

Дополнительно требуются следующие свойства относительно дуальной пары *товары–цены* $\langle (L,\tau),(L,\tau)'\rangle$.

SA (структурные предположения):

(i) L — линейная векторная решётка (пространство Рисса), оснащённая локально выпуклой хаусдорфовой топологией τ;

(ii) L^+ — замкнутый конус в τ-топологии пространства L;

(iii) $(L,\tau)'$ — подрешётка порядково двойственного к L.

Далее рассмотрим свойство правильности предпочтений.

Определение 3.1 *Отношение предпочтения $\mathcal{P}_i : \mathcal{X} \Rightarrow X_i$ называется F-правильным в точке $x \in \mathcal{X}$ если существует τ-открытое выпуклое подмножество $V_x^i \subset L$ и подрешётка $Z_x^i \subset L$, удовлетворяющая $Z_x^i + L^+ \subset Z_x^i$, такие, что $x_i \in \overline{V}_x^i \cap Z_x^i$ и*

$$\emptyset \neq V_x^i \bigcap Z_x^i \subset \mathcal{P}_i(x). \tag{3.6}$$

Если, дополнительно,

$$\mathcal{P}_i(x) \subset \overline{V}_x^i \bigcap Z_x^i, \tag{3.7}$$

то отношение предпочтения $\mathcal{P}_i$ называется E-правильным в точке $x \in \mathcal{X}$.

Данное понятие правильности фактически является правильностью относительно идеала $K \subseteq L$ в смысле Определения 2.1 из Флорензано–Маракулин [14], в случае $K = L$. Отличие с [14], сделанное с целью упростить изложение, состоит в том, что (3.6), (3.7) требовались локально — постулируется существование радиального подмножества $A_x \subset L$[5], такого, что (3.6), (3.7) истинно только в пределах A_x (в пересечении с ним). Именно E-правильность относительно всего пространства продуктов, как слабейшая форма E-правильности, является предметом нашего исследования.

Наряду с понятием равновесия, наибольший теоретический интерес представляет понятие нетривиального квазиравновесия, которое служит промежуточным объектом на пути установления существования равновесий. Чтобы обеспечить существование нетривиальных квазиравновесий, требование E-правильности предпочтений нужно несколько усилить, что осуществлено в следующем определении.

[5]Напомним, что подмножество $A \subset L$ называется радиальным (поглощающим) в точке $y \in A$, если для каждого $u \in L$ существует действительное $\bar\lambda$, $0 < \bar\lambda \leq 1$, такое, что $(1-\lambda)y + \lambda u \in A$ для каждого $\lambda \geq 0$, удовлетворяющего $\lambda \leq \bar\lambda$.

Определение 3.2 *Экономика $\mathcal{E}$ называется нетривиально-E-правильной в точке x, если все предпочтения E-правильные в точке x и выполнено следующее дополнительное условие: для каждого $i \in \mathcal{I}$ существуют вектора $v_i \in L$, такие, что $x_i + v_i \in V_x^i \cap Z_x^i$,*

$$\omega' - v_i \in \sum_{t \in \mathcal{I}} X_t, \ \forall\, i \in \mathcal{I} \tag{3.8}$$

и множество

$$\sum_{\mathcal{I}} [Z_x^i \cap L(u^v)] \tag{3.9}$$

радиально в точке $\omega' = \sum_{\mathcal{I}} \omega_i$ в идеале $L(u^v) \subseteq L$, генерированном точкой

$$u^v = \sum_{\mathcal{I}} |\omega_i| + \sum_{\mathcal{I}} |x_i| + \sum_{\mathcal{I}} |v_i|.$$

Здесь все множества Z_x^i и V_x^i выбраны из определения правильности.

Векторы $\{v_i\}$ называются векторами (нетривиальной) правильности $\mathcal{E}$ в точке x.

Заметьте, что в отличии от [14] условие $\omega_i \in Z_x^i$ не постулируется ни в какой форме правильности. Ниже мы обсудим ситуацию, в которой это дополнительное требование может быть полезным.

В работе Флорензано–Маракулин [14] были указаны условия (см. Лемму 3.1), при которых можно гарантировать нужную радиальность множества (3.9). Эти условия следующие.

Пусть вектора правильности выбираются из идеала $L(u)$, генерированного точкой $u = \sum_{i \in \mathcal{I}} |x_i| + \sum_{i \in \mathcal{I}} |\omega_i|$, т. е. $v_i \in L(u)$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$. Тем самым $L(u^v) = L(u)$. Тогда, если $\omega' = \sum_{\mathcal{I}} \omega_i > 0$ и $\omega_i, 0 \in Z_x^i$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$, то множество $\sum_{\mathcal{I}} [Z_x^i \cap L(u^v)]$ радиально в точке $\omega' = \sum_{\mathcal{I}} \omega_i$ в $L(u^v)$. Для $\omega' > 0$, в частности, можно предположить, подобно Турки [27], что вектора правильности всех агентов совпадают с совокупными начальными запасами экономики, т. е. $v_i = \omega'$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$. В таком варианте, чтобы обеспечить (3.8), можно требовать $\lambda\omega' \in \sum_{\mathcal{I}} X_i$ для некоторого действительного $\lambda < 1$, что вряд ли вызовет серьёзные возражения.

Существование нетривиальных квазиравновесий основывается на факте существования (непустоты) нечёткого ядра с последующей децентрализацией отвечающих ему элементов. Другими словами, нужно показать, что распределения из нечёткого ядра допускают представление в виде квазиравновесия. В основу анализа будет положена характеризация элементов нечёткого ядра, полученная в Утверждении 2.2, пункт (i). Действительно, в таком случае это соотношение можно переписать в виде[6]

$$\prod_{\mathcal{I}} \mathcal{P}_i(x) \bigcap \left[\left(\prod_{\mathcal{I}} \lfloor 0, x_i - \omega_i \rfloor \right) + \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}}) \right] = \emptyset.$$

В силу правильности предпочтений, по (3.6), имеем

$$V \cap Z \cap [\lfloor\!\lfloor 0, x - \omega \rfloor\!\rfloor + \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}})] = \emptyset,$$

где $V = \prod_{\mathcal{I}} V_x^i$, $Z = \prod_{\mathcal{I}} Z_x^i$. Переставляя скобки в последнем соотношении, получаем

$$V \bigcap \big(Z \cap [\lfloor\!\lfloor 0, x - \omega \rfloor\!\rfloor + \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}})] \big) = \emptyset. \tag{3.10}$$

Соотношение (3.10) и является ключевым свойством, определяющем возможность децентрализации точки $x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E})$. Действительно, как это будет видно в дальнейшем, для этого достаточно разделить функционалом указанные в (3.10) множества. В силу сделанных предположений, к соотношению (3.10) применима классическая теорема отделимости, однако по техническим причинам нам будет удобнее найти нужный разделяющий функционал в два этапа. Во первых, используя (2.3) и разделяя соответствующие множества, мы найдём функционал, разделяющий множества из (3.10) на подпространстве $[L(u^v)]^{\mathcal{I}}$. На втором этапе этот функционал поднимается на все пространство $L^{\mathcal{I}}$ с сохранением свойства разделимости нужных множеств. Это возможно в силу предположения о нетривиальной правильности, ибо тогда $V \cap [L(u^v)]^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$, $[L(u^v)]^{\mathcal{I}} \cap \big(Z \cap [\lfloor\!\lfloor 0, x - \omega \rfloor\!\rfloor + \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}})] \big) \neq \emptyset$. На заключительном этапе по этому продолжению будет построен функционал, реализующий цены квазиравновесия для x. В качестве этого функционала следует взять супремум компонет продолженного функционала. Указанная программа и реализуется в последующих лемме и теореме.

Лемма 3.1 *Пусть $\mathcal{E}$ — нетривиально-E-правильная экономика и $x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E})$. Тогда существуют τ-непрерывные линейные функционалы q_i над L такие, что*

$$q_i \cdot V_x^i \geq q_i \cdot x_i, \; i \in \mathcal{I}, \tag{3.11}$$

где для $\bar{q} = \vee_{\mathcal{I}} q_i$ истинно $\bar{q} x_i = \bar{q} \omega_i$, $i \in \mathcal{I}$, причём $\bar{q} v_i > 0$ для некоторого $i \in \mathcal{I}$ и отвечающего ему вектора правильности v_i. Кроме того, имеет место

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} q_i t_i \leq 0, \quad \forall\, t = (t_1, \ldots, t_n) \,:\, \sum_{i \in \mathcal{I}} t_i = 0, \; x_i + t_i \in Z_x^i \cap L(u^v), \; \forall\, i \in \mathcal{I}. \tag{3.12}$$

[6] Для любых множеств $A, B, C \subseteq L$ истинно: $(A + B) \cap C = \emptyset \iff A \cap (C - B) = \emptyset$.

Доказательство. Фактически данная лемма является следствием Утверждений 3.1, 2.1, 2.2 из [14]. Однако вкратце напомним логику рассуждений. Действительно, пусть $K = L(u^v)$. По свойству элементов нечёткого ядра (2.3) и в силу F-правильности предпочтений имеем

$$0 \notin \mathrm{co}[\bigcup_{\mathcal{I}}(V_x^i \cap Z_x^i - \omega_i)].$$

Так как множество $K \cap \mathrm{co}[\cup_{\mathcal{I}}(V_x^i \cap Z_x^i - \omega_i)]$ имеет непустую внутренность в K в норме Рисса, заданной вектором u^v, то его можно отделить на K от нуля линейным функционалом $p \neq 0$. Применяя (3.7), стандартно устанавливается, что (x, p) является квазиравновесием модели $\mathcal{E}_{|_K}$, откуда, в частности, $px_i = p\omega_i$, $i \in \mathcal{I}$.

Далее, легко видеть, что модель $\mathcal{E}$ является F-правильной относительно K, см. Определение 2.1 из [14] (вместо Z_x^i в (3.6) нужно использовать $Z_x^i \cap K$). Тем самым мы находимся в условиях Утверждения 2.1 из [14][7], откуда следует существование функционалов $q_i \in (L, \tau)'$, $i \in \mathcal{I}$, таких, что $q_{i|_K} \leq p$ и при этом

$$q_i \cdot V_x^i \geq q_i \cdot x_i, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Более того, для $\bar{q} = \vee_{\mathcal{I}} q_t$ выполнено

$$q_i(x_i - z) = \bar{q}(x_i - z) = p(x_i - z), \ \forall\, z \in Z_x^i \cap K, \ z \leq x_i, \ \forall\, i \in \mathcal{I} \tag{3.13}$$

и

$$\bar{q}(\omega' - z) = p(\omega' - z), \ \forall\, z \in \sum_{i \in \mathcal{I}} Z_i \cap K, \ z \leq \omega'. \tag{3.14}$$

Наконец, в силу нетривиальной E-правильности $\mathcal{E}$, мы находимся в условиях Утверждения 2.2 из [14], в силу которого $\bar{q}_{|_K} = p$ и $\bar{q}_{|_K} \cdot v_i = p \cdot v_i > 0$ для некоторого $i \in \mathcal{I}$. Для полноты изложения раскроем вкратце последнее.

Чтобы доказать $\bar{q}_{|_K} = p$ возьмём произвольный $y \in K$. Так как K идеал, то $y^+, y^- \in K$.[8] По свойству нетривиальной правильности множество $Z' = \sum_{\mathcal{I}}[Z_x^i \cap K]$ радиально в точке $\omega' = \sum_{i \in \mathcal{I}} \omega_i$ при $K = L(u^v)$. Следовательно, $\omega' - \lambda y^+, \omega' - \lambda y^- \in Z'$ при некотором действительном $\lambda > 0$. Теперь в силу (3.14) получаем

$$\bar{q}(\omega' - (\omega' - \lambda y^+)) = p(\omega' - (\omega' - \lambda y^+)) \ \Rightarrow \ \lambda \bar{q} y^+ = \lambda p y^+ \ \Rightarrow \ \bar{q} y^+ = p y^+.$$

Подобным образом имеем $\bar{q} y^- = p y^-$, что по $y = y^+ - y^-$ даёт $\bar{q} y = p y$.

Установим $\bar{q}_{|_K} \cdot v_i = p \cdot v_i > 0$ для некоторого $i \in \mathcal{I}$. В силу (3.11) и $x_i + v_i \in V_i$ имеем $q_i v_i \geq 0$, причём если $q_i v_i = 0$, то $q_i = 0$. Однако $q_i = 0$ для всех i

[7] Отметим, что посылка $\omega_i \in Z_x^i$, $i \in \mathcal{I}$ не была использована в этой части Утверждения 2.1 из [14], хотя изначально и предполагалась.

[8] Здесь стандартным образом, $y^+ = y \vee 0$ и $y^- = y \wedge 0$.

противоречит $\bar{q}_{|_K} = p \neq 0$. Далее пусть $q_{i_0} v_{i_0} > 0$ для данного i_0. Положим $z_{i_0} = (x_{i_0} + v_{i_0}) \wedge x_{i_0} \in Z_x^{i_0}$. Из определения $\bar{q}$ и (3.13) следует

$$pv_{i_0} = p(x_{i_0} + v_{i_0} - z_{i_0}) - p(x_{i_0} - z_{i_0}) \geq q_{i_0}(x_{i_0} + v_{i_0} - z_{i_0}) - q_{i_0}(x_{i_0} - z_{i_0}) = q_{i_0} v_{i_0} > 0,$$

откуда $pv_{i_0} > 0$. Так как $\bar{q}_{|_K} = p$ и $v_{i_0} \in K$, то $pv_{i_0} = \bar{q} v_{i_0} > 0$. Тем самым первая часть леммы доказана. Покажем далее истинность (3.12).

Пусть $t = (t_1, \ldots, t_n)$ удовлетворяет правой части (3.12). Положим $z_i = x_i \wedge (x_i + t_i)$. Так как $x_i \in Z_x^i \cap K$ и $x_i + t_i \in Z_x^i \cap K$, а Z_x^i решётка и K идеал, имеем $z_i \in Z_x^i \cap K$. Отсюда, в силу (3.13) и $p \geq q_{i_{|_K}}$, $x_i - z_i + t_i \geq 0$, заключаем

$$p(x_i - z_i) + p(t_i) = p(x_i - z_i + t_i) \geq q_i(x_i - z_i + t_i) = q_i(x_i - z_i) + q_i(t_i) = p(x_i - z_i) + q_i(t_i),$$

что влечет $p(t_i) \geq q_i(t_i)$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$. Суммируя последние неравенства, находим

$$0 = p(\sum_{i \in \mathcal{I}} t_i) \geq \sum_{i \in \mathcal{I}} q_i t_i,$$

что и требовалось доказать. Лемма 3.1 доказана. □

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

Теорема 3.1 *Пусть $\mathcal{E}$ — нетривиально-E-правильная экономика обмена и $x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E})$. Тогда существует τ-непрерывный линейный функционал $\bar{\pi} \in (L, \tau)'$ такой, что $(x, \bar{\pi})$ нетривиальное квазиравновесие.*

Конечно, данная теорема не есть теорема существования квазиравновесия в полном смысле этого слова. Однако условия непустоты нечёткого ядра хорошо известны в литературе (см. напр. [14], [13]) и тем самым достаточно их просто добавить к требованию нетривиальной E-правильности модели, чтобы гарантировать существование нетривиальных квазиравновесий. Напомним далее формулу Рисса –Канторовича о представлении супремального функционала.

Хорошо известно, что пространство $(L, \geq)^{\sim}$ порядково ограниченных линейных функционалов над $(L, \geq)$, будучи упорядочено отношением

$$f \geq g \iff f(x) \geq g(x) \;\; \forall\, x \in L^+,$$

при $f, g \in (L, \geq)^{\sim}$, само является (полным) пространством Рисса, если L — векторная решётка[9], и называется *порядково двойственным.* При этом для каждого $x \geq 0,\; x \in L$ и любых $f, g \in (L, \tau)^{\sim}$ имеют место следующая важная формула *Рисса–Канторовича*:

$$(f \vee g)(x) = \sup\{f(y) + g(z) \mid y + z = x,\; y \geq 0,\; z \geq 0,\; y, z \in L\}.$$

[9]Это требование к L — быть решёткой — можно ослабить, однако это не важно для наших целей.

Доказательство. Рассмотрим функционал $q = (q_1, \dots, q_n) \in (L')^{\mathcal{I}}$, существование которого установлено в Лемме 3.1. В силу (3.11), (3.12) на подпространстве $\mathcal{K} = L(u^v)^{\mathcal{I}}$ этот функционал разделяет множества $V = \prod_{\mathcal{I}} V_x^i$ и

$$M_x = x + \{(t_1, \dots, t_n) \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} t_i = 0,\ x_i + t_i \in Z_x^i\}.$$

В силу $M_x \subset \left[Z \cap [\llbracket 0, x - \omega \rrbracket + \mathcal{A}(L^{\mathcal{I}})]\right]$ и (3.10), имеем $M_x \cap V = \emptyset$. Так как $\mathcal{K} \cap V \neq \emptyset$ и V выпуклое, τ-открытое, то функционал $q_{|\mathcal{K}}$ можно поднять на все пространство $L^{\mathcal{I}}$, сохраняя свойство разделимости. Обозначим это продолжение как $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ и рассмотрим $\bar{\pi} = \vee_{\mathcal{I}} \pi_i$. По построению $\pi_{|\mathcal{K}} = q_{|\mathcal{K}}$, поэтому по свойству идеала и формуле Рисса–Канторовича $\bar{\pi}_{|_{L(u^v)}} = \bar{q}_{|_{L(u^v)}}$, где $\bar{q} = \vee_{\mathcal{I}} q_i$ функционал из Леммы 3.1. Тем самым $\bar{\pi}(x_i) = \bar{\pi}(\omega_i)$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$ и $\bar{\pi}(v_i) > 0$ для некоторого i, где v_i — вектор правильности из Определения 3.2. Применим далее свойство E-правильности (3.7) и покажем

$$\langle \bar{\pi}, V_x^i \cap Z_x^i \rangle \geq \bar{\pi} x_i. \tag{3.15}$$

С этой целью прежде всего установим

$$\pi_i(x_i - z_i) = \bar{\pi}(x_i - z_i), \quad \forall\, z_i \leq x_i,\ z_i \in Z_x^i. \tag{3.16}$$

Зафиксируем некоторый i_0 и z_{i_0}. Так как $x_{i_0} - z_{i_0} \geq 0$, то в силу формулы Рисса–Канторовича достаточно доказать неравенство

$$\sum_{\xi=1}^{n} \pi_\xi s_\xi \leq \pi_{i_0}(x_{i_0} - z_{i_0})$$

для произвольного $s \in L^n$, $s = (s_1, \dots, s_n) \geq 0$, $\sum s_\xi = x_{i_0} - z_{i_0}$. Действительно, по определению F-правильности имеем

$$y = (x_1 + s_1, \dots, z_{i_0} + s_{i_0}, \dots, x_n + s_n) \in Z.$$

При этом по выбору s и из $x \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$ также имеем

$$\sum_{\mathcal{I}} y_i = \sum_{i \neq i_0} x_i + z_{i_0} + \sum_{\xi=1}^{n} s_\xi = \sum_{\mathcal{I}} \omega_i.$$

Тем самым элемент $y \in M_x$ — это множество, которое функционал π отделяет от V. Следовательно, так как $x \in \overline{V}$, то $\langle \pi, y \rangle \leq \langle \pi, x \rangle$, что можно записать в виде

$$\sum_{\mathcal{I}} \pi_i y_i = \sum_{i \neq i_0} \pi_i x_i + \pi_{i_0} z_{i_0} + \sum_{\xi=1}^{n} \pi_\xi s_\xi \leq \sum_{i \neq i_0} \pi_i x_i + \pi_{i_0} x_{i_0}.$$

Сокращая общие члены, получаем искомое неравенство, что и доказывает (3.16).

Далее установим (3.15). Пусть $y_i \in V_x^i \cap Z_x^i$. Положим $z_i = y_i \wedge x_i$. По свойству решётки $z_i \in Z_x^i$. Далее из $y_i - z_i \geq 0$, $\bar{\pi} \geq \pi_i$, $\pi_i y_i \geq \pi_i x_i$ и в силу (3.16) заключаем

$$\bar{\pi}(y_i - x_i) + \bar{\pi}(x_i - z_i) = \bar{\pi}(y_i - z_i) \geq \pi_i(y_i - z_i) \geq \pi_i(x_i - z_i) = \bar{\pi}(x_i - z_i) \ \Rightarrow$$

$$\bar{\pi}(y_i - x_i) \geq 0, \ \forall\, y_i \in V_x^i \cap Z_x^i,$$

что и требовалось доказать.

Наконец, нетривиальность найденного квазиравновесия следует из Определения 3.2. Действительно, возьмём i_0, удовлетворяющий $\bar{\pi} v_{i_0} > 0$. В силу (3.8) и $x \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$ найдутся $x_i' \in X_i$, $i \in \mathcal{I}$ такие, что

$$\sum x_i - v_{i_0} = \sum x_i' \ \Rightarrow \ \sum \bar{\pi}(x_i - x_i') = \bar{\pi} v_{i_0} > 0.$$

Значит $\bar{\pi}(x_i - x_i') > 0 \Rightarrow \bar{\pi} x_i > \bar{\pi} x_i'$ для некоторого $i \in \mathcal{I}$, $x_i' \in X_i$ — что и требовалось доказать. Теорема 3.1 доказана. □

4 Заключение

В заключении к данной работе мы хотели ли бы сравнить основной полученный результат с с близкими к ним по духу результатами, полученными Турки в [27] более детально. Турки делает следующие предположения правильности предпочтений, называя это M-правильностью, в силу её аналогии с предположениями накладываемыми Мас-Колеллом [20] для *производственных множеств*. Ниже используются обозначения, близкие к введённым выше (они отличны от оригинальных обозначений Турки).

Отношение предпочтения $\mathcal{P}_i : X_i \Rightarrow X_i$ называется M-правильным в точке $x_i \in X_i$, если найдутся такое выпуклое $V_i \subset E$ и такая выпуклая решётка $Z_i \subset L$, удовлетворяющая $Z_i + L^+ \subset Z_i$,[10] что $x_i \in \overline{V}_i$ и при этом

(*i*) $V_i \cap Z_i = \mathcal{P}_i(x)$;
(*ii*) $x_i + \omega' \in \mathrm{int} V_i$;
(*iii*) $x_i, \ 0, \ \omega_i \in Z_i$;
(*iv*) $(1 + \alpha_i) x_i \in Z_i$ для некоторого действительного $\alpha_i > 0$.

Дополнительно предполагая монотонность предпочтений в виде: $\forall\, i \in \mathcal{I}$, $\forall\, x_i \in X_i$, $x_i + L^+ \subset \mathcal{P}_i(x_i) \cup \{x_i\}$, а также при $\omega' > 0$, Турки доказывает, что каждый элемент нечёткого ядра является квазиравновесием для некоторых непрерывных цен $\bar{\pi} \in L'$, удовлетворяющих $\bar{\pi}\omega' > 0$.

[10] Заметим, что это включение совместно со свойством решётки автоматически влечёт выпуклость Z_i.

Анализ определений показывает, что M-правильная в точке x по Турки линейно-решёточная экономика является E-правильной в точке x в смысле Определения 3.1. При этом в нашем контексте предположения типа (ii), $\omega_i, 0 \in Z_i$ и $\omega' > 0$ необходимы только для доказательства нетривиальности полученного квазиравновесия, а (iv) в нашем случае является просто избыточным[11]. При этом, однако, ключевыми являются требования нетривиальности квазиравновесия, в которых у нас с Турки есть различие. Действительно, в нашем случае используется нетривиальность квазиравновесия в виде: существует $i \in \mathcal{I}$, такой, что $\inf\langle \bar{\pi}, X_i \rangle < \bar{\pi} x_i$. Легко видеть, что в общем случае свойство $\bar{\pi}\omega' > 0$, использованное у Турки, не влечёт нетривиальности в нашем смысле. Нетривиальности по Турки недостаточно для характеризации квазиравновесия, ибо, даже в рамках предположения о нередуцируемости модели экономики, она не влечёт существование *равновесий* с непрерывными ценами — основной цели данного фрагмента экономической теории, — так как не влечёт свойства $\inf\langle \bar{\pi}, X_i \rangle < \bar{\pi} x_i \ \forall\, i \in \mathcal{I}$, которое и позволяет заключить, что данное квазиравновесие является настоящим равновесием.

Действительно, в Определении 3.2 требуется выполнение условий (3.8) и (3.9), какой-либо прямой аналог которых у Турки отсутствует. Тем не менее заметим, что, как это упоминалось выше, в работе Флорензано–Маракулин [14] было фактически показано, что в условиях Турки нужная радиальность множества (3.9) гарантируется предположением $\omega' > 0$, требованиями $\omega_i, 0 \in Z^i_x$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$ и тем фактом, что $\omega' = \sum \omega_i$ является общим вектором правильности. В то же время посылка (3.8) является дополнительным по отношению к работе Турки предположением, которое использовалось нами *только* при доказательстве нетривиальности квазиравновесия в нужной нам форме в конце доказательства основной теоремы. На самом деле, применительно к случаю общего вектора правильности $\omega' = \sum \omega_i$, в наших условиях фактически было доказано, что $\bar{\pi}\omega' > 0$ без использования условия (3.8). Однако, повторимся, этого недостаточно для того, чтобы полученное квазиравновесие было действительно нетривиальным. По нашему мнению, результаты Турки для модели обмена должны быть дополнены, например, требованием $\lambda\omega' \in \sum_{\mathcal{I}} X_i$ для некоторого действительного $\lambda < 1$. Однако это именно случай, в котором оказываются выполнены наши условия (3.8) и (3.9).

[11] Турки использует его в своём доказательстве, чтобы установить тот факт, что, в наших обозначениях, $\bar{\pi}_i x_i = \bar{\pi}\omega_i$, а затем применяет его, чтобы доказать “равновесные свойства” точки $(x, \bar{\pi})$.

Список литературы

[1] Aliprantis, C. D., On the Mas-Colell–Richard equilibrium theorem, *J. Econom. Theory* **74** (1997), 414–424

[2] Aliprantis C. D., Brown, D. J., Equilibria in markets with a Riesz space of commodities, *J. Math. Econom.* **11** (1983), 189–207

[3] Aliprantis, C. D., Brown, D. J., Burkinshaw, O., Edgeworth equilibria, *Econometrica* **55** (1987), 1109–1137

[4] Aliprantis, C.D., Brown, D.J., Burkinshaw, O., Existence and Optimality of Competitive Equilibria, Springer-Verlag, Berlin/New-York, 1989, 284 p.

[5] Aliprantis, C.D., Tourky, R., Yannelis, N.C., The Riesz-Kantorovich formula and general equilibrium theory, *J. Math. Econom.* **34** (2000), 55–76

[6] Araujo, A., Monteiro, P.K., Equilibrium without uniform conditions, *J. Econom. Theory* **48** (1989), 416–427

[7] Arrow, K. J., Debreu, G., Existence of equilibrium for a competitive economy, *Econometrica* **22** (1954), 265–290

[8] Bewley, T., Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities, *J. Econom. Theory* **4** (1972), 514–540

[9] Debreu, G., Existence of competitive equilibrium, *in*: K. Arrow and Intriligator, M., D. (Eds.), Handbook of Mathematical Economics, Vol. II, North-Holland, Amsterdam, 1982, 697–744

[10] Debreu, G., Theory of value, John Wiley, New York, 1959

[11] Deghdak, M., Florenzano, M., Decentralizing Edgeworth equilibria in economies with many commodities, *Econom. Theory* **14** (1999), 297–310

[12] Duffie, D., Zame, W.R., The consumption based capital asset pricing model, *Econometrica* **57** (1989), 1274–1298

[13] Florenzano, M., Edgeworth equilibria, fuzzy core and equilibria of a production economy without ordered preferences, *J. Math. Anal. and Appl.* **153** (1990), 18–36

[14] Florenzano, M., Marakulin, V. M., Production equilibria in vector lattices, *Econom. Theory* **17** 3 (2001), 577–598

[15] Jones, L., A competitive model of product differentiation, *Econometrica* **52** (1984), 507–530

[16] Huang, C., Kreps, D., Intertemporal Preferences with a Continuous Time Dimension, *Sloan School Working Paper*, 1986

[17] Kreps, D.M., Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities, *J. Math. Econom.* **8** (1981), 15–35

[18] Marakulin, V. M., Equilibrium in infinite dimensional commodity spaces revisited, *Econom. Theory* **18** 3 (2001), 621–633

[19] Mas-Colell, A., The price equilibrium existence problem in topological vector lattices, *Econometrica* **54** (1986), 1039–1053

[20] Mas-Colell, A., Valuation equilibrium and Pareto optimum revisited, *in*: Hildenbrand, W. and Mas-Colell, A. (eds.): Contribution to Mathematical Economics, North Holland, New York, 1986

[21] Mas-Colell, A., Richard, S. F., A new approach to the existence of equilibria in vector lattices, *J. Econom. Theory* **53** (1991), 1–11

[22] Mas-Colell, A., Zame, W., Equilibrium theory in infinite dimensional spaces, *in*: W. Hildenbrand and Sonnenschein, H. (Eds.), Handbook of Mathematical Economics, Vol. IV, North-Holland, Amsterdam, 1991, 1835–1898

[23] McKenzie, L., On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems, *Econometrica* **22** (1954), 147–161

[24] Peleg, B., Yaari, M.E., Markets with countably many commodities, *Int. Econom. Review* **11** (1970), 369–377

[25] Podczeck, K., Equilibria in vector lattices without ordered preferences or uniform properness, *J. Math. Econom.* **25** (1996), 465–485

[26] Richard, S. F., Production equilibria in vector lattices, *J. Math. Econom.* **18** (1989), 41–56

[27] Tourky, R., A new approach to the limit theorem on the core of an economy in vector lattices, *J. Econom. Theory* **78** (1998), 321–328

[28] Tourky, R., The limit theorem on the core of a production economy in vector lattices with unordered preferences, *Econom. Theory* **14** (1999), 219–226

[29] Yannelis N.C., Zame W.R., Equilibria in Banach lattices without ordered preferences, *J. Math. Econom.* **15** (1986), 85–110