О договорном подходе в моделях экономики типа Эрроу — Дебре — МакКензи*

Валерий МАРАКУЛИН†

представлена: 25 января 2013, ревизия: 8 марта 2013

Аннотация

В работе анализируется договорной подход в моделях экономики с производственным сектором. Исследовались как модели с выпуклыми, так и невыпуклыми производственными множествами. Понятийная база теории договоров, разработанная автором в *Маракулин* (2003, 2011) модифицируется и адаптируется к моделям с производством: уточняются понятие сети договоров, доминирования сетей по коалициям, частичный разрыв договоров и др. Для модели с невыпуклым производством введено новое понятие маргинально договорного распределения, которое затем используется в анализе равновесия с ценообразованием по предельным затратам (MCP–равновесие) — применяется в невыпуклом случае вместо вальрасовского равновесия. Основные результаты представлены в ряде теорем об эквивалентности равновесий и разного типа договорных распределений. В частности эквивалентность между MCP–равновесием и маргинально-договорными распределениями можно рассматривать как теоретическое обоснование концепции MCP–равновесия в невыпуклых экономиках. В целом работа развивает договорной подход как универсальный метод моделирования условий совершенной конкуренции.

Ключевые слова и фразы: конкурентное равновесие, MCP–равновесие, ядро, договор, договорной подход, экономика с производством, невыпуклое производство.
JEL Classification: C 62, D 51

---

*В значительной степени результаты исследования были выполнены во время моей 3-х месячной стажировки осенью 2010 г. в Центрально–Европейском Университете, Будапешт, Венгрия, в рамках SE-программы (специальная расширенная). Я выражаю искреннею благодарность университету, экономическому факультету и SE-программе за гостеприимство и созидательную атмосферу, способствующую исследовательской работе.

†Ведущий науч. сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.

On contractual approach in production economies of Arrow–Debreu–McKenzie type[1]

MARAKULIN V. M.[2]
Sobolev Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

Abstract

The paper applies and elaborates contractual approach to study economies with convex and non-convex production. The notions and terms of barter contractual approach developed in *Marakulin* (2003, 2011) for exchange economies are now modified and extended to the production economy; there are adopted known earlier notions: web of contracts, domination via coalitions among webs, partial breaking of contracts and so on. A new notion of marginal contractual allocation is introduced for the model with non-convex production. Then it is applied to describe marginal cost pricing (MCP) equilibrium, the notion used in non-convex case instead of Walrasian equilibrium. Main results are presented in theorems on equivalence of equilibria and specific (proper, fuzzy, marginal) contractual allocation, implemented via web of contacts stable relative to a partial break. An equivalence between marginal contractual allocation and MCP-equilibrium can be considered as its theoretical foundation for non-convex economies. As a whole paper presents and develop specific universal form of perfect competition implemented via contractual approach.

Keywords and Phrases: competitive equilibrium, MCP-equilibrium, core, contract, contractual approach, production economy, non-convex production.

JEL Classification: C62, D51

[1]The main results of the paper were carried out when the author was visiting research Fellow of Central European University, Budapest, Hungary via Special and Extension program. He is specially grateful to the University, its Economic department and SE-program for very kind hospitality and creative atmosphere.

[2]Valeriy M. MARAKULIN, Sobolev Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, 4 Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, Russia, 630090, e-mail: marakul@math.nsc.ru

Введение

Одна из основных целей экономической теории и ее составной части — теории общего равновесия — состоит в том, чтобы описать распределение ресурсов, реализуемое через систему рынков. В рамках классической модели Эрроу — Дебре итоговое распределение ресурсов выявляется через концепцию конкурентного равновесия, которая и является основным объектом теоретического анализа, см. *Arrow, Debreu* (1954), *McKenzie* (1954), *Mas-Colell et al.* (1995), *Алипрантис и др.* (1995). Модель Эрроу — Дебре развивалась и обобщалась в разных направлениях, в том числе рассматривались модели с невыпуклыми технологическими множествами и с общественными благами.

В классической модели Эрроу — Дебре предположение о выпуклости технологических множеств (и наборов благ, предпочитаемых некоторому потребительскому набору) является существенным, иначе равновесия могут не существовать. Однако невыпуклость в производстве характерна для многих производственных сфер и содержательно связана с возрастающими отдачами от масштаба (например, частные коммунальные предприятия). Поэтому изучение случая, когда производственные множества невыпуклые, само по себе представляет важную задачу. Невыпуклость в технологии приводит к известному понятию равновесия с ценообразованием по предельным затратам, так называемого MCP–равновесия. Существование MCP–равновесия для монопольной экономики с одной фирмой впервые было установлено в *Mantel* (1979). В работе *Beato, Mas-Colell* (1985) было доказано существование равновесия с маргинальным ценообразованием для нескольких невыпуклых производств, но наиболее общие результаты были получены в *Bonnisseau, Cornet* (1988, 1990); достаточно полный обзор литературы можно найти в *Brown* (1991). Таким образом стала развиваться теория равновесия для невыпуклых производственных множеств. Особо отметим, что равновесие с ценообразованием по предельным затратам дает лишь необходимое условие Парето оптимальности текущего (равновесного) состояния экономики (вообще говоря равновесие может не быть оптимальным по Парето); в выпуклом случае оно является достаточным и соответствует принципу максимизации прибыли у производителей.

Итак, в настоящей работе изучаются математические модели экономики с производственным и потребительским сектором. Структурно это модели Эрроу — Дебре, причём в производственном секторе допускается возрастающая отдача от масштаба. В основу анализа положен договорной подход, разработанный автором в серии работ этого десятилетия , однако его зачатки появляются еще в 70-х годах прошлого века в работах (*Полтерович*, 1970), (*Макаров*, 1980, 1982) и (*Козырев*, 1981, 1982). В потребительском секторе договор это некоторый элементарный бартерный контракт, в соответствии с которым члены коалиции осуществляют обмен продуктами. Однако в производственном секторе это контракт, в рамках которого агенты несут материальные издержки, связанные с производством потребительских и общественных благ. Совокупности договоров образуют сети, которые могут трансформироваться путем заключения новых взаимовыгодных договоров и разрыва имеющихся: в том числе, как вариант, допускается возможность частичного разрыва договоров — в этом и состоит основная новизна и преимущество нашего подхода. Особенность подхода в том, что все процессы осуществляются без цен или каких-либо других стоимостных параметров. При договорном подходе изучаются стабильные сети, причем это может быть стабильность разного типа. В частности, для модели обмена было показано, что равновесие можно охарактеризовать сетями договоров такими, что нет желающих заключать новые контракты и частично рвать имеющиеся. Теория договоров в рамках модели чистого обмены развивалась в *Маракулин* (2002, 2003, 2011). Экономики с общественными благами — в *Marakulin* (2013); подход удалось распространить на модели этого типа, причём он оказался исключительно эффективным. Настоящая работа нацелена на то, чтобы заполнить существующий пробел и исследовать в договорном контексте экономики с производственным сектором, в том числе невыпуклым. Для моделей с производством в работе получена договорная характеризация вальрасовских равновесий с выпуклым производственным сектором и МСР–равновесий (ценообразование по предельным издержкам) в невыпуклом случае.

Работа организована следующим образом. В первом разделе дается описание базовой модели Эрроу — Дебре и применяемых в её контексте понятий конкурентного (вальрасовского) равновесия и равновесия с ценообразованием по предельным затратам (МСР–равновесие). Здесь же формулируется теорема Мантела — один из первых и математически простейших результатов по существованию МСР–равновесия. Второй раздел посвящен основным положениям договорного подхода в выпуклом случае: формулируется модель, даются определения и доказывается теорема об эквивалентности равновесия и правильного договорного, а также нечётко договорного распределения. Третий раздел посвящен обобщению договорного подхода на модель с невыпуклым производственным сектором. Здесь вводится понятие маргинально договорного распределения и доказывается теорема об эквивалентности отвечающих им распределений и равновесий с ценообразованием по предельным затратам. Заключение заканчивает настоящую работу.

1 Модель Эрроу — Дебре — МакКензи

В краткой форме модель экономики типа Эрроу — Дебре представляется как совокупность следующих параметров:

$$\mathcal{E}^{AD} = \langle\, \mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathbb{R}^l, \{X_i, \mathcal{P}_i(\cdot), \mathbf{e}_i, \{\theta_i\}\}_{i\in\mathcal{I}}, \{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}} \,\rangle.$$

Здесь $\mathcal{I} = \{1,\ldots,n\}$ — множество потребителей, $\mathcal{J} = \{1,\ldots,m\}$ — множество производителей, l — число товаров, $\mathbb{R}^l = E$ — пространство продуктов. Через $X_i \subset \mathbb{R}^l$ обозначены потребительские множества, $X = \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, а $\mathcal{P}_i : X_i \Rightarrow X_i$ это точечно–множественное отображение, определяющее предпочтения i-го индивида, где $\mathcal{P}_i(x_i) = \{y_i \in X_i \mid y_i \succ_i x_i\}$ — множество потребительских наборов, строго предпочитаемых агентом i набору x_i. Потребители обладают начальными запасами продуктов $\mathbf{e}_i \in X_i$, $i \in \mathcal{I}$. Положим $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ и пусть $\bar{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i$. Производитель $j \in \mathcal{J}$ описывается производственно-технологическим множеством $Y_j \subset E$, $Y = \prod_{j \in \mathcal{J}} Y_j$, заданным в терминах потоков. В модели также заданы nm скалярных величин $\theta_i^j \geq 0$ — компоненты вектора $\theta_i = (\theta_i^1, \dots, \theta_i^m)$, — это доля потребителя i в прибыли π_j производителя $j \in \mathcal{J}$; при этом $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = (1, \dots, 1)$. Напомним далее определение ***конкурентного (вальрасовского)*** равновесия.

Определение 1.1 *Тройка (x, y, p), где $x = (x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in X$ это семейство планов потребления, $y = (y_j)_{j \in \mathcal{J}} \in Y$ производственные планы и $p = (p_1, \dots, p_l) \neq 0$, $p \in E'$ вектор цен, называется **квазиравновесием**, если:*

$$p \cdot y_j \geq \langle p, Y_j \rangle, \ \forall j \in \mathcal{J}, [3] \tag{1.1}$$

$$\langle p, \mathcal{P}_i(x_i) \rangle \geq p \cdot \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_i^j p \cdot y_j = p \cdot x_i, \ \forall i \in \mathcal{I}, \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{m} y_j. \tag{1.3}$$

*Если в (1.2) знак строгий, то тройка (x, y, p) называется **конкурентным (вальрасовским) равновесием**.*

Требования (1.1)–(1.3) имеют обычный экономический смысл. В варианте строгого неравенства условие (1.2) означает, что потребительский план x_i является оптимальным выбором (спросом) индивида i в рамках бюджетного ограничения $p \cdot z_i \leq p \cdot \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_i^j p \cdot y_j = r_i(p, y)$, $z_i \in X_i$, правая часть которого представляет доходы индивида из всех источников (от продажи собственности $\mathbf{e}_i$ и доли в прибылях фирм $\theta_i^j p y_j$) при заданных ценах $p = (p_1, \dots, p_l) \in E'$. Условие (1.1) говорит о том, что производители максимизируют прибыль, а (1.3) это материальный баланс, что обычно выражают как равенство спроса и предложения.

Условия, обеспечивающие существование равновесия в модели Эрроу — Дебре хорошо известны в литературе, напр. см. *Mas-Colell et al.* (1995), *Алипрантис и др.* (1995), *Маракулин* (2012) . В потребительском секторе это непрерывность (возможны разные варианты), открыто-выпуклозначность, иррефлексивность и локальная ненасыщаемость предпочтений $\mathcal{P}_i : X_i \rightrightarrows X_i$, $\forall i \in \mathcal{I}$. Потребительские множества выпуклые и замкнутые, причём такие, что множество допустимых распределений компактно. Этих требований достаточно, чтобы в модели обмена существовали квазиравновесия или более тонкое понятие равновесия с нестандартными ценами (см. *Маракулин* (2012)). Для того, чтобы существовали равновесия нужно дополнительно

[3] $\langle A, B \rangle = \{\langle a, b \rangle = a \cdot b \mid a \in A, \ b \in B\}$ для любых $A, B \subset E$; $A \geq b \iff a \geq b \ \forall a \in A$.

требовать какое-нибудь из условий выживаемости (survival assumptions) — ресурсную связность, неразложимость и т. д. Далее чуть подробнее остановимся на производственном секторе.

В производственном секторе обычно предполагается, что для всех $j \in \mathcal{J}$ множества Y_j обладают следующими свойствами:

- Y_j — *выпуклые*, замкнутые множества (т. е. предельные варианты производственных процессов допустимы),

- $Y_j - \mathbb{R}^l_+ \subset Y_j$ — условие свободного расходования,

- $Y_j \bigcap \mathbb{R}^l_+ = \{0\}$ — неосуществимость рога изобилия, где $\mathbb{R}^l_+$ — неотрицательный ортант пространства продуктов.

- $Y \bigcap (-Y) = \{0\}$ — необратимость производственных процессов.

Последние три требования имеют экономически осмысленный вид, однако фактически нужны с тем, чтобы обеспечить, совместно с предположениями на потребительские множества, ограниченность множества достижимых (сбалансированных) распределений, что порой делают непосредственно. Для нас наиболее важным является первое предположение и, в его контексте, требование выпуклости производственных множеств. Без этого предположения равновесия могут не существовать.

В настоящей работе наряду с выпуклым изучается случай невыпуклых производственных множеств. Невыпуклость в производстве может появиться, например, из-за возрастающих отдач от масштаба (выручки фирм возрастают в расчете на единицу затрат). Например, запись CD–диска требует больших затрат, а его тиражирование, перезапись, происходит с небольшими затратами. Однако эта возможность (по технико-математическим причинам) не была изучена в классическом варианте теории существования. Конечно, для того чтобы равновесие существовало при невыпуклых технологических множествах, сама концепция должна быть надлежащим образом модифицирована. Однако эта модификация должна быть такова, чтобы новое понятие приводило (или хотя бы были шансы) к распределению оптимальному по Парето — как это имеет место в выпуклом случае. Ценооброазование по принципу средних издержек этому требованию не удовлетворяет. Ключевая идея MCP-равновесия состоит в том, чтобы требование максимизации прибыли производителя заменить на (необходимое) условие первого порядка (выражено через градиенты функций, задающих производственные множества), которое в выпуклом случае является также и достаточным. Таким образом приходят к концепции, непосредственно обобщающей обычное конкурентное равновесие. При содержательной интерпретации обычно говорят о социальном планировщике, который имеет возможность "вычислить" полученные таким путём цены — по принципу маргинальных издержек (marginal cost pricing — MCP), а затем принудить производителя придерживаться найденных производственных планов. Далее мы рассмотрим простейший вариант модели с невыпуклым производственным сектором, заданным посредством дифференцируемых функций.

Предположим, что производственные множества Y_j описываются с помощью *дифференцируемых* функций φ_j по формуле

$$Y_j = \{y \in E \mid \varphi_j(y) \leq 0\},\ j \in \mathcal{J}. \tag{1.4}$$

и, более того, что в этом случае границу производственных множеств можно задать в виде[4]

$$\partial Y_j = \{y \in E \mid \varphi_j(y) = 0\} \neq Y_j,\ j \in \mathcal{J}. \tag{1.5}$$

Положим $X = \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, $Y = \prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j$. Нижеследующее определение MCP-равновесия можно найти в *Mantel* (1979), *Brown* (1991).

Определение 1.2 ***MCP-равновесие*** *(с ценообразованием по предельным затратам) это тройка (x, y, p), где $x = (x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in X$ это семейство планов потребления, $y = (y_j)_{j\in\mathcal{J}} \in Y$ производственные планы и вектор цен $p \neq 0$, удовлетворяющие условиям:*

$$y \in \prod_{j\in\mathcal{J}} \partial Y_j \ \ \& \ \ \exists\, \lambda_j > 0:\ p = \lambda_j \nabla\varphi_j(y_j),\ \forall\, j \in \mathcal{J},\text{[5]} \tag{1.6}$$

$$\langle p, \mathcal{P}_i(x_i)\rangle > p\cdot \mathbf{e}_i + \sum_{j\in\mathcal{J}} \theta_i^j p\cdot y_j = p\cdot x_i,\ \forall i \in \mathcal{I}, \tag{1.7}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum_{j\in\mathcal{J}} y_j + \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{e}_i. \tag{1.8}$$

Требование (1.6) это упомянутое выше условие первого порядка, которому должны удовлетворять равновесные производственные планы вместо условия максимизации прибыли (1.1). Условия (1.7), (1.8) это оптимум предпочтений потребителей при бюджетном и прочих ограничениях и сбалансированность продуктовых рынков.

В последнем определении неявно предполагается, что производство может быть убыточно, но суммарные налоги покрывают убытки фирм с невыпуклыми производственными множествами. Важно отметить, что если у всех фирм технологии выпуклые, то понятие равновесия с ценообразованием по предельным затратам обращается в понятие равновесия по Вальрасу в классической модели Эрроу — Дебре. Далее мы сформулируем один из простейших известных в литературе результатов о существовании MCP-равновесий (см. *Brown* (1991)).

Рассмотрим модель с одной фирмой и пусть выполнены предположения (1.4), (1.5). Дополнительно предположим, что $0 \in Y$, $Y - \mathbb{R}^l_+ \subseteq Y$, множество $(Y + \sum_{\mathcal{I}} \mathbf{e}_i) \cap \mathbb{R}^l_+$ ограничено и, если $y + \sum_{\mathcal{I}} \mathbf{e}_i \in \partial Y \cap \mathbb{R}^l_+$, то $\nabla\varphi(y) \gg 0$.

[4] Ясно, что в общем случае топологическая граница множества может быть уже описанного ниже множества.

[5] Здесь и всюду далее ∇f это градиент действительнозначной функции f, т. е. $\nabla f = \mathrm{grad} f$.

Пусть для всех $i \in \mathcal{I}$ потребительские множества $X_i = \mathbb{R}^l_+$, а предпочтения заданы с помощью функций полезности $u_i : X_i \to \mathbb{R}$, которые непрерывны, строго вогнуты и локально ненасыщаемы.

Теорема 1.1 (Мантел, 1979) *При данных предположениях равновесие с ценообразованием по предельным затратам существует.*

Существенно более сильные результаты можно найти в *Bonnisseau, Cornet* (1988). Здесь рассматривается множество фирм, которые могут иметь и негладкую границу, а также некоторое общее правило ценообразования. В данном контексте это отображение $\psi : \prod_{\mathcal{J}} \partial Y_j \to \mathbb{R}^l_+$, которое заданному набору производственных планов сопоставляет вектор производственных цен. Требования на отображение $\psi(\cdot)$ имеют самый общий характер и при этом может быть реализовано как ценообразование по принципу маргинальных затрат, так и средних (average cost pricing — ACP), а также и другие варианты, см. *Bonnisseau, Cornet* (1988), *Brown* (1991).

Далее перейдем к основной цели настоящей работы — анализу договорного подхода в модели Эрроу — Дебре — МакКензи, в том числе и с невыпуклыми технологиями и общественными благами. Рассмотрим сначала выпуклый случай модели Эрроу — Дебре.

2 Договоры в выпуклой модели Эрроу — Дебре

Рассмотрим следующую модель экономики с производством

$$\mathcal{E} = \langle \mathcal{I}, E, (X_i, \mathbf{e}_i, Y_i, \mathcal{P}_i)_{i \in \mathcal{I}} \rangle. \tag{2.1}$$

Данная модель отличается от классической модели Эрроу — Дебре только в части производственного сектора, где предполагается наличие индивидуализированных производственных множеств $Y_i \subset E$, $i \in \mathcal{I}$. Легко видеть, что классическую модель можно привести к модели этого вида, для чего достаточно задать индивидуальные производственные множества Y_i в виде $Y_i = \sum_{j=1}^m \theta_i^j \cdot \overline{Y}_j$, где $\overline{Y}_j$ — производственные множества в модели $\mathcal{E}^{AD}$. Поэтому результаты, полученные в модели $\mathcal{E}$, будут применимы и к модели $\mathcal{E}^{AD}$ и наоборот. При этом, однако, теоретические построения существенно упрощаются. В рамках данной модели используемые в понятии равновесия бюджетные ограничения принимают вид

$$p \cdot x_i \leq p \cdot \mathbf{e}_i + p \cdot y_i, \quad i \in \mathcal{I},$$

т. е. доход потребителя i от производственной деятельности здесь представлен величиной $p \cdot y_i$. Положим далее $Z_i = X_i \times Y_i$, $Z = \prod\limits_{i \in \mathcal{I}} Z_i$ и пусть $L = E^{\mathcal{I}} \times E^{\mathcal{I}}$ — пространство состояний. Определим

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \{z = (x, y) \in X \times Y \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{e}_i + \sum_{i \in \mathcal{I}} y_i\} \ -$$

это множество всех достижимых распределений (состояний) модели $\mathcal{E}$. В контексте модели $\mathcal{E}$ равновесие это:

• *Тройка (x, y, p), где $p \neq 0$, $p \in E'$, $(x, y) \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ называется **квазиравновесием**, если для каждого $i \in \mathcal{I}$ выполняется:*

$$\langle p, \mathcal{P}_i(x_i)\rangle \ \geq p \cdot \mathbf{e}_i + p \cdot y_i = p \cdot x_i, \tag{2.2}$$

$$p \cdot y_i \geq \langle p, Y_i\rangle. \tag{2.3}$$

*Если в (2.2) знак строгий, то тройка (x, y, p) называется **конкурентным равновесием**.*

Далее всегда будем считать, что выполнено следующее предположение:

(**A**) *Для каждого $i \in \mathcal{I}$ множество X_i выпукло, замкнуто, телесно (непустая внутренность), $\mathbf{e}_i \in X_i$ и для каждого $x_i \in \mathrm{pr}_{|X_i}\mathcal{A}(\mathcal{E})$ существует открытое выпуклое $G_i \subset E$ такое, что*

$$\mathcal{P}_i(x_i) = G_i \cap X_i \ \ \& \ \ x_i \in [\mathrm{cl}\,\mathcal{P}_i(x_i)] \setminus \mathcal{P}_i(x_i).$$ [6]

• *Модель $\mathcal{E}$ называется **выпуклой**, если совместно с (**A**) имеет **выпуклый производственный сектор**, т. е. выполнено: для всех $i \in \mathcal{I}$ множества Y_i выпуклы.*

Для удобства дальнейшего изложения мы введём специфические понятия гладкой экономики.

• *Назовём экономику $\mathcal{E}$ **гладкой**, если для любого i: множество Y_i имеет границу, представимую как гладкое многообразие, и для некоторой дифференцируемой вогнутой функции $u_i(\cdot)$, определённой на (некоторой) открытой окрестности множества X_i, имеет место*

$$\mathcal{P}_i(x_i) = \{x'_i \in X_i \mid u_i(x'_i) > u_i(x_i)\}, \ \forall\, x_i \in X_i.$$

*Экономика $\mathcal{E}$ имеет **гладкий потребительский сектор**, если выполнено только второе требование.*

Напомним далее понятийный аппарат теории договоров, см. Маракулин (2003, 2011), одновременно адаптируя его к модели с производственным сектором.

Любой вектор $v = (v_i)_{i\in\mathcal{I}} \in E^{\mathcal{I}}$, удовлетворяющий $\sum_{i\in\mathcal{I}} v_i = 0$, называется контрактом или договором по обмену продуктами (бартерный контракт). Такого рода контракты используются в экономике чистого обмена, а также в потребительском секторе в экономике с производством. В дальнейшем будем предполагать, что любой бартерный договор допустим[7]. Каждой конечной совокупности V (допустимых) контрактов можно поставить в соответствие распределение $x(V) = \mathbf{e} + \sum_{v\in V} v$,

[6] $\mathrm{cl}\,A$ это замыкание множества A в некотором топологическом пространстве (здесь это пространство продуктов E).

[7] В общем случае в рамках модели договорной экономики выделяется множество $\mathcal{W} \subseteq E^{\mathcal{I}}$ *допустимых* (разрешённых) договоров.

где $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \in X$ это исходное распределение ресурсов. В том случае когда $\mathbf{e} + \sum_{v \in U} v \in X \ \forall U \subseteq V$, т. е. если после разрыва части договоров получится допустимое распределение, мы говорим, что V является *сетью* договоров.

Рассмотрим далее операции разрыва существующих и заключения новых договоров. Для любого контракта $v \in V$ положим

$$S(v) = \mathrm{supp}(v) = \{i \in \mathcal{I} \mid v_i \neq 0\},$$

это носитель бартерного контракта v. Предполагается, что любой контракт $v \in V$ может быть разорван любым торговцем из $S(v)$, ибо он может просто не выполнить своих обязательств. Кроме того, непустая коалиция потребителей может заключить несколько новых контрактов. Будучи рассмотрены совместно, т. е. как одновременная процедура, эти операции позволяют коалиции $T \subset \mathcal{I}$ создавать новые сети контрактов, обозначенные как $F(V, T)$. При этом с формальной точки зрения постулируется, что каждый элемент $U \in F(V, T)$ удовлетворяет следующим требованиям:

(*i*) $v \in V \setminus U \Rightarrow S(v) \bigcap T \neq \emptyset$,

(*ii*) $v \in U \setminus V \Rightarrow S(v) \subset T$.

В работах *Маракулин* (2002, 2003, 2011) рассматривались и анализировались договоры в экономике обмена. В настоящей работе договорные понятия модифицируются и адаптируются к экономике с производством. В данном случае договор это пара $(v, y) \in E^{\mathcal{I}} \times E^{\mathcal{I}}$, где v это обычный бартерный контракт, а $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — вектор, отвечающий производственным программам y_i индивидов $i \in \mathcal{I}$. Если $(v, y) \in E^{\mathcal{I}} \times Y$, т. е. если каждая производственная программа допустимая, $y_i \in Y_i$, $i \in \mathcal{I}$, то контракт (v, y) допустимый. Для модели (2.1) конечному набору V контрактов можно поставить в соответствие (потребительское) распределение $x(V) = \mathbf{e} + \sum_{(v,y) \in V} y + \sum_{(v,y) \in V} v$. Ясно, что любой контракт (v, y) можно представить как сумму чисто менового контракта $(v, 0)$ и производственного $(0, y)$. В таком случае, говоря о сети контрактов, нет необходимости специфицировать множество разных производственных программ, достаточно взять один валовой контракт, полученный путем их суммирования. Более того, собственно производственную составляющую контрактов можно без ущерба вынести за рамки самого понятия сети договоров. В итоге приходим к следующему определению:

Конечная совокупность V допустимых контрактов называется сетью контрактов относительно пары $(\zeta, y) \in X \times Y$, если

$$\zeta + y + \sum_{v \in U} v \in X, \ \forall U \subseteq V \quad \Longleftrightarrow \quad \zeta_i + y_i + \sum_{v \in U} v_i \in X_i, \ \forall i \in \mathcal{I}, \ \forall U \subseteq V,$$

т. е. при текущих потребительских планах $\zeta \in X$ и производственных планах $y \in Y$ индивиды вступают в меновые отношения так, что возможен разрыв любых договоров. Здесь вектор текущих планов потребления $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ фактически играет роль (переменных) начальных запасов. В случае когда $\zeta = \mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \in X$, т. е. когда рассматривается сеть контрактов относительно пары $(\mathbf{e}, y) \in X \times Y$, мы условимся эту сеть называть y-сетью. Положим:

$$x(V, y) = \mathbf{e} + y + \sum_{v \in V} v \in E^{\mathcal{I}}, \quad z(V, y) = (x(V, y), y) \in E^{\mathcal{I}} \times E^{\mathcal{I}}.$$

Пусть $y_T = (y_i)_{i \in T}$ набор производственных планов индивидов, входящих в коалицию T. Положим $\mathcal{I} \setminus T = -T$; тогда, соответственно, y_{-T} — вектор, составленный из производственных планов всех индивидов, которые не попали в коалицию T. Теперь набор всех производственных планов $y = (y_i)_{i \in \mathcal{I}}$ можно записать в виде $y = (y_T, y_{-T})$.

Будем говорить, что y'-сеть U, $y' = (y'_T, y_{-T}) \in Y$, доминирует y-сеть V, $y = (y_T, y_{-T}) \in Y$ по коалиции T (обозначение $U \succ_T V$), если выполняются следующие условия:

(i) $U \in F(V, T)$,

(ii) $x_i(U, y') \succ_i x_i(V, y)$ для всех $i \in T$.

Отметим, что в данном случае производственные планы y_{-T} остаются неизменными, а y_T могут замещаться некоторыми $y'_T \in \prod_{i \in T} Y_i$. Другими словами, члены коалиции T способны изменять не только меновые контракты (разрывая часть старых (любые, в которых участвуют) и заключая новые внутрикоалиционные договоры), но и свои производственные планы.

Определение 2.1 *Назовём y-сеть контрактов V стабильной, если не существует $\tilde{y}$-сети U и коалиции $T \subset \mathcal{I}$ таких, что $U \succ_T V$. Распределение $z = (x, y) \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ называется договорным, если $x = x(V, y)$ для некоторой стабильной y-сети V.*

С целью ввести операцию частичного разрыва договоров рассмотрим следующее отношение частичного порядка на множестве y-сетей. Это упорядочивание определяется по правилу:

$$U \geq V \iff \exists \text{ отображение } \textbf{на } f : U \to V \text{ такое, что}$$

(i) $\lambda f(u) = u$ для некоторого $0 \leq \lambda \leq 1$ и каждого $u \in U$,

(ii) $\sum_{u \in f^{-1}(v)} u = v$ для каждого $v \in V$.

В силу этого определения сеть U состоит из конечного разбиения (разложения в сумму — по (ii)) контрактов из V при условии сохранения меновых пропорций (в силу (i)). Минимальные элементы в смысле данного отношения порядка в множестве всех y-сетей называются корневыми.

Отношение порядка индуцирует следующее отношение эквивалентности на множестве всех y-сетей:

$$U \simeq V \Longleftrightarrow \exists \text{ у-сеть } W \text{ такая, что } V \geq W \text{ и } U \geq W. \tag{2.4}$$

Заметим, что если $U \simeq V$, то $z(U, y) = z(V, y)$, т. е. эквивалентные сети производят одинаковые распределения.

В терминах эквивалентных сетей *распределение $z \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ называется правильно договорным, если существует y-сеть V такая, что $z = z(V, y)$ и для каждого $U \simeq V$ распределение $z = z(U, y)$ является договорным.*

Данную концепцию правильно договорного распределения можно переформулировать в следующем упрощенном виде. Для действительного α положим $\alpha V = \{\alpha \cdot v \mid v \in V\}$, т. е. αV это сеть, полученная из V путём умножения контрактов на α. Для $0 \leq \alpha \leq 1$ рассмотрим сеть $U = \alpha V \cup (1 - \alpha)V$, которая очевидно реализует то же распределение $z(U, y) = z(V, y)$. Сеть $U = \alpha V \cup (1-\alpha)V$ назовём α-разбиением сети V. Распределение $z = z(V, y)$ является правильно договорным, если α-разбиение V стабильно для каждого $\alpha \in [0, 1]$. Для большей ясности ниже мы приведём развёрнутое содержательное определение.

Определение 2.2 *Пара $(x, y) \in X \times Y$ называется правильно договорным распределением, если найдется сеть V такая, что выполняются условия:*

(i) $x = x(V, y) = \sum\limits_V v + \mathbf{e} + y.$

(ii) Не существует коалиции S, которой было бы выгодно (в раздельном режиме или одновременно):

- (α) *частично рвать меновые договоры;*
- (β) *переходить от заданных производственных программ $y = (y_S, y_{-S})$ к новым производственным программам $y' = (y'_S, y_{-S})$, где $y'_S \in \prod\limits_{i \in S} Y_i$;*
- (γ) *заключать новый договор.*

В *Козырев* (1981), *Маракулин* (2002, 2003, 2011) было доказано, что в гладкой экономике чистого обмена каждое внутреннее правильно договорное распределение является равновесным. Ниже будет показано, что подобный результат имеет место и для выпуклой модели Эрроу — Дебре.

Следующая лемма дает характеризацию оптимальных по Парето распределений выпуклой экономики в стоимостных терминах и, фактически, является аналогом второй теоремы благосостояния. Напомним, что:

• *Достижимое распределение $(\bar{x}, \bar{y})$ называется (слабо) оптимальным по Парето, если не существует семейства $(x_i, y_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ такого, что $x_i \succ_i \bar{x}_i$ для каждого $i \in \mathcal{I}$.*

Лемма 2.1 *Пусть $\mathcal{E}$ — выпуклая модель и пусть распределение $\bar{z} = (\bar{x}_i, \bar{y}_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \times Y_i$ оптимально по Парето. Тогда существует вектор $p \neq 0$ такой, что:*

$$\langle p, \mathcal{P}_i(\bar{x}_i)\rangle \;\geq p \cdot \bar{x}_i, \tag{2.5}$$

$$p \cdot \bar{y}_i \geq \langle p, Y_i\rangle. \tag{2.6}$$

для каждого $i \in \mathcal{I}$.

Замечание 2.1 Если $\mathcal{E}$ — экономика с гладким потребительским сектором, то для $\bar{x}_i \in \operatorname{int} X_i$ можно положить $p = \lambda_i \cdot \nabla u_i(\bar{x}_i)$ при некотором $\lambda_i > 0$. ■

Доказательство леммы 2.1. Сразу отметим, что из предположения (**A**) следует, что для всех $i \in \mathcal{I}$ выполняется $\bar{x}_i \notin \mathcal{P}_i(\bar{x}_i)$, и $\bar{x}_i \in \operatorname{cl}\mathcal{P}_i(\bar{x}_i)$. Далее запишем свойство оптимальности по Парето распределения $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ в эквивалентном виде:

$$\prod_{i\in\mathcal{I}}(\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) \times Y_i) \bigcap \mathcal{A}(L) = \emptyset,$$

$$\mathcal{A}(L) = \{z = (x, y) \in L \mid \sum_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{e}_i + \sum_{i\in\mathcal{I}} y_i\}.$$

Так как пересекаемые множества выпуклые и непустые (в силу (**A**)), то по теореме отделимости существует линейный функционал $f \neq 0$, разделяющий эти множества, т. е.

$$f((x_i, y_i)_{i\in\mathcal{I}}) \geq f((\check{x}_i, \check{y}_i)_{i\in\mathcal{I}}), \quad \forall (x_i, y_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{i\in\mathcal{I}}(\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) \times Y_i), \quad \forall (\check{x}_i, \check{y}_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{A}(L).$$

Из конечномерности пространства следует, что линейный функционал, можно представить вектором (через скалярное произведение), т. е. можно считать, что $f = (f_1, \dots, f_n) \in L$. Теперь последнее соотношение запишется в виде:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \langle f_i, (x_i, y_i)\rangle \geq \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle f_i, (\check{x}_i, \check{y}_i)\rangle. \tag{2.7}$$

Зафиксируем $(x_i, y_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{i\in\mathcal{I}}(\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) \times Y_i)$. Из (2.7) величина $\sum_{i\in\mathcal{I}}\langle f_i, (\check{x}_i, \check{y}_i)\rangle$ ограничена на $\mathcal{A}(L)$, т. е. f ограничен сверху на $\mathcal{A}(L)$. Однако так как $\mathcal{A}(L)$ аффинное подпространство, то это возможно только если функционал f постоянен на $\mathcal{A}(L)$.

Далее заметим, что векторы вида

$$((0,0)_1, \dots, (0,0)_{i-1}, (x,x)_i, (0,0)_{i+1}, \dots, (0,0)_n) \in \mathcal{A}(L) - (\mathbf{e}, 0) = H, \quad \forall x \in E.$$

Здесь $H = \{(x, y) \in L \mid \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} y_i\}$ — подпространство в L. Следовательно, $f_i(x, x) = 0$ для всех $x \in E$. Представив $f_i = (f_i^x, f_i^y)$, получаем $f_i^x \cdot x + f_i^y \cdot x = 0$. Но теперь, в силу произвольности x, заключаем

$$f_i^x = -f_i^y = p_i. \tag{2.8}$$

Покажем далее, что $p_i = p_j$ для всех $i, j \in \mathcal{I}$.

В силу (2.8) имеем $f_i = (p_i, -p_i)$. Далее заметим, что для любой пары $(x, y) \in L$ вектор вида

$$((0,0)_1, \ldots, (0,0)_{i-1}, (x,y)_i, (0,0)_{i+1}, \ldots, (0,0)_{j-1}, -(x,y)_j, (0,0)_{j+1}, \ldots, (0,0)_n)$$

принадлежит H. Следовательно, имеет место $f_i(x,y) - f_j(x,y) = 0$. Так как последнее равенство выполняется для любой пары $(x, y) \in E \times E$, то

$$f_i = f_j = (p, -p) \ \forall i, j \in \mathcal{I}.$$

Наконец, из того факта, что $f \neq 0$ следует, что $p \neq 0$. Теперь (2.7) можно переписать в виде

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \langle (p, -p), (x_i, y_i) \rangle \geq \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle (p, -p), (\check{x}_i, \check{y}_i) \rangle. \tag{2.9}$$

Для доказательства неравенства (2.5) утверждения леммы рассмотрим неравенство (2.9). Положим $y_i = \check{y}_i = \bar{y}_i$ и пусть $\check{x}_i = \bar{x}_i$ для всех $i \in \mathcal{I}$. В силу (2.7) для всех $x_i \in \mathcal{P}_i(\bar{x}_i)$, $i \in \mathcal{I}$ имеем:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \langle (p, -p), (x_i - \bar{x}_i, 0) \rangle \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle p, x_i \rangle + \sum_{j \neq i} \langle p, (x_j - \bar{x}_j) \rangle \geq \langle p, \bar{x}_i \rangle \ \ \forall i \in \mathcal{I}.$$

Зафиксируем i и рассмотрим номера $j \neq i$. Из предположения (**A**) следует, что $\bar{x}_j \in \operatorname{cl} \mathcal{P}_j(\bar{x}_j)$, что позволяет в слагаемых с номерами $j \neq i$ из левой части последнего неравенства перейти к пределу по $x_j \to \bar{x}_j$ и в итоге получить $\langle p, x_i \rangle \geq \langle p, \bar{x}_i \rangle$ для всех $x_i \in \mathcal{P}_i(\bar{x}_i)$ и для всех $i \in \mathcal{I}$, что доказывает (2.5).

Для доказательства соотношения (2.6) положим $y_j = \check{y}_j = \bar{y}_j$ и $\check{x}_j = \bar{x}_j$ для всех $j \neq i$. Пусть $\check{y}_i = \bar{y}_i$ и $\check{x}_i = \bar{x}_i$. В силу (2.9) получаем

$$\sum_{j \in \mathcal{I}} p(x_j - \bar{x}_j) - p(y_i - \bar{y}_i) \geq 0.$$

Аналогично предыдущему, устремляя x_j к $\bar{x}_j$ для всех $j \in \mathcal{I}$, заключаем

$$-p(y_i - \bar{y}_i) \geq 0 \ \ \forall y_i \in Y_i \quad \Longleftrightarrow \quad \langle p, \bar{y}_i \rangle \geq \langle p, Y_i \rangle,$$

что и требовалось доказать. ■

Следующая теорема устанавливает эквивалентность между понятиями равновесия и правильно–договорного распределения в экономике $\mathcal{E}$ с выпуклым производственным сектором.

Теорема 2.1 *Пусть $\mathcal{E}$ — выпуклая договорная экономика с гладким потребительским сектором. Пусть $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ и $\bar{x}_i \in \operatorname{int} X_i$ для всех $i \in \mathcal{I}$. Тогда пара $(\bar{z}, p)$ — равновесие тогда и только тогда, когда $\bar{z}$ — правильно-договорное распределение.*

Отметим, что из доказательства данной теоремы несложно извлечь доказательство характеристической теоремы 2 из *Маракулин* (2011).

Доказательство теоремы 2.1. Начнём с проверки достаточности. Предположим, что $\bar{z}$ правильно-договорное распределение. Это распределение оптимально по Парето ибо коалиция $\mathcal{I}$ не способна заключить новый контракт выгодный для всех членов $\mathcal{I}$. Из леммы 2.1 следует существование $p \neq 0$, удовлетворяющего

$$\langle p, \mathcal{P}_i(x_i)\rangle \geq p \cdot x_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

Теперь, чтобы доказать, что $(\bar{x}, \bar{y}, p)$ квазиравновесие, достаточно показать

$$p \cdot \bar{x}_i = p \cdot \bar{y}_i + p \cdot \mathbf{e}_i, \quad \forall\, i \in \mathcal{I}. \tag{2.10}$$

Рассуждаем от противного. Пусть *не все* равенства (2.10) выполняются. Далее из сбалансированности распределения $\bar{z}$ заключаем:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \bar{x}_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} \bar{y}_i + \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{e}_i \;\Rightarrow\; \sum_{i\in\mathcal{I}} p\bar{x}_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} p\bar{y}_i + \sum_{i\in\mathcal{I}} p\mathbf{e}_i.$$

Следовательно, найдется потребитель i, для которого

$$p \cdot \bar{x}_i - p \cdot \bar{y}_i < p \cdot \mathbf{e}_i.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$p \cdot \bar{x}_i < p \cdot (\mathbf{e}_i + \bar{y}_i) = p \cdot x_i,$$

где

$$\bar{x}_i = \mathbf{e}_i + \bar{y}_i + \sum_{v\in V} v_i, \quad x_i = \mathbf{e}_i + \bar{y}_i + 0.$$

Далее, из $p \cdot (x_i - \bar{x}_i) > 0$ используя замечание 2.1 к лемме 2.1 ($p = \lambda_i \cdot \nabla u_i(\bar{x}_i)$ при некотором $\lambda_i > 0$), получаем

$$\nabla u_i(\bar{x}_i) \cdot (x_i - \bar{x}_i) > 0.$$

Однако это неравенство означает, что функция u_i из точки $\bar{x}_i$ возрастает по направлению $x_i - \bar{x}_i$, поэтому найдётся $\mu \in (0,1)$ такое, что

$$u_i(\bar{x}_i - \mu \cdot \sum_{v\in V} v_i) > u_i(\bar{x}_i).$$

Таким образом, агенту i выгодно частично рвать договоры. Приходим к противоречию с определением правильно–договорного распределения. Осталось заметить, что в условиях теоремы ($\bar{x}_i \in \mathrm{int} X_i, \forall\, i$) при предположении ($\mathbf{A}$) каждое квазиравновесие является равновесием.

Для доказательства необходимости положим $v = \bar{x} - \bar{y} - \mathbf{e}$. Пусть $V = \{v\}$. Из равновесных свойств пары $(\bar{z}, p)$ следует $p \cdot v_i = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$. Предположим, что $\bar{z}$ не является правильно–договорным распределением. Тогда найдется коалиция $T \subseteq \mathcal{I}$, число $0 \leq \lambda_v \leq 1$, контракт $w = (w_i)_{i \in T}$ и производственные планы $y_T \in \prod_T Y_i$ такие, что $\mathbf{e}_i + y_i + \lambda_v \cdot v_i + w_i \succ_i \bar{x}_i$, $i \in T$. Однако из свойств равновесия (1.2) получаем

$$p \cdot (\mathbf{e}_i + y_i + \lambda_v \cdot v_i + w_i) > p \cdot \bar{x}_i = p \cdot (\mathbf{e}_i + \bar{y}_i + v_i), \ i \in T.$$

Следовательно, $p \cdot w_i > p \cdot (\bar{y}_i - y_i)$ для всех $i \in T$, что с учётом (1.1) влечёт $p \cdot w_i > 0$, откуда $p \cdot \sum\limits_{i \in T} w_i \neq 0$. Получили противоречие с определением договора, ибо должно быть $\sum\limits_{i \in T} w_i = 0$. Теорема 2.1 доказана. ■

Подобного рода результат, избавленный от такого ограничительного предположения как дифференцируемые полезности, можно установить, если, как и в модели обмена, перейти к рассмотрению *нечётко* договорных состояний (распределений). Далее это понятие вводится и подробно изучается.

Определение 2.3 *Распределение $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$, реализованное сетью бартерных договоров $V = \{v\}$, $v = \bar{x} - \bar{y} - \mathbf{e}$ называется нечётко договорным, если для любого $t = (t_i)_{i \in \mathcal{I}}$, $0 \leq t_i \leq 1$, $\forall i \in \mathcal{I}$, не существуют производственные программы $y_i \in Y_i$, $i \in \mathcal{I}$ и бартерный контракт $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^{ln}$, $\sum w_k = 0$ такие, что при*

$$\xi_i = \xi_i(t, v, w) = \mathbf{e}_i + t_i v_i + w_i + y_i, \quad i \in \mathcal{I} \tag{2.11}$$

имеет место

$$\xi_i \succ_i \bar{x}_i \quad \forall i: \ \xi_i \neq \bar{x}_i. \tag{2.12}$$

Заметьте, что в силу условия (2.12) допустима возможность $w = 0$, при которой можно реализовать только частичный разрыв договоров. Отсутствие возможности такого доминирования означает, что распределение является *устойчивым относительно* асимметричного *частичного разрыва договоров* (*устойчиво снизу* или правильно договорное снизу).

Следующая лемма характеризует нечётко договорные распределения в “геометрических” категориях.

Лемма 2.2 *Устойчивое снизу относительно частичного разрыва договоров распределение $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ является нечётко договорным тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{A}(E^{\mathcal{I}}) \bigcap \prod_{i \in \mathcal{I}} [(\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i + \mathrm{co}\{(\mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i, 0)\}) \cup \{\mathbf{e}_i\}] = \{\mathbf{e}\}. \tag{2.13}$$

Здесь $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, а $\mathcal{A}(E^{\mathcal{I}})$ это подпространство, соответствующее балансовым ограничениям экономики Эрроу — Дебре:

$$\mathcal{A}(E^{\mathcal{I}}) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in E^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{e}_i\}.$$

Данная характеризация работает весьма эффективно. В частности, чтобы установить теорему подобную теореме 2.1, но теперь уже о нечётко договорных распределениях и с предпочтениями самого общего вида. Для этого достаточно разделить множества из левой части (2.13) линейным функционалом и затем провести его анализ. Отметим, что модернизацию нижеследующего доказательства можно использовать чтобы установить важную лемму 2 из *Маракулин* (2011), характеризующую нечётко договорные распределения в модели обмена.

Доказательство леммы 2.2. Необходимость. Пусть (2.13) ложно $\Rightarrow$ найдётся $z = (z_i)_{\mathcal{I}} \neq \mathbf{e}$ из левой части пересечения (2.13). Определим

$$S = \{i \in \mathcal{I} \mid z_i \neq \mathbf{e}_i\} \neq \emptyset.$$

Далее найдём контракт с этим носителем и надлежащие объёмы разрыва договоров. Положим $w_i = z_i - \mathbf{e}_i$, откуда $\sum w_i = 0$, т. к. $z \in \mathcal{A}(E^{\mathcal{I}})$. При $i \notin S$ очевидно имеем $w_i = 0$, т. е. $\operatorname{supp}(w) = S$. В то же время для $i \in S$ должно быть $z_i \in (\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i + \operatorname{co}\{0, (\mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i)\})$, откуда заключаем $\exists\, 0 \leq t_i \leq 1$:

$$\mathbf{e}_i + w_i = z_i = \xi_i - y_i + t_i(\mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i) \quad \Rightarrow \quad \xi_i = \mathbf{e}_i + t_i v_i + y_i + w_i,$$

где $\xi_i \succ_i \bar{x}_i$ и $v_i = \bar{x}_i - \mathbf{e}_i - \bar{y}_i$, $i \in S$ ($\xi_i = \bar{x}_i$ при $i \notin S$). Получили противоречие с определением нечётко договорного распределения.

Достаточность. Пусть (2.13) истинно для $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$, причём это распределение устойчивое снизу относительно частичного разрыва договоров. Предположим оно не является нечётко договорным. Тогда найдутся $t = (t_i)$, планы $y_i \in Y_i$, $i \in \mathcal{I}$ и бартерный контракт $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^{ln}$, $\sum w_k = 0$, удовлетворяющие условиям определения 2.3. Отсюда при $v_i = \bar{x}_i - \bar{y}_i - \mathbf{e}_i$ в силу (2.11) для некоторого непустого множества индивидов имеем:

$$\exists \xi_i \in \mathcal{P}_i(\bar{x}_i): \quad x_i = \xi_i + t_i(\mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i) = \mathbf{e}_i + w_i + y_i. \tag{2.14}$$

Суммируя по i, из определения договора заключаем $\sum_{\mathcal{I}} x_i = \sum_{\mathcal{I}} \mathbf{e}_i + \sum_{\mathcal{I}} y_i$, т. е. при $z_i = x_i - y_i$, $i \in \mathcal{I}$ распределение $z = (z_i)_{\mathcal{I}}$ принадлежит пересечению левой части (2.13). Если предположить $z = \mathbf{e}$, то $x_i = \mathbf{e}_i + y_i$ $\forall i \in \mathcal{I}$, откуда, подставляя в правую часть (2.14), заключаем $w_i = 0$, $\forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \operatorname{supp}(w) = \emptyset$. Значит, доминирование осуществляется без обмена и только через частичный разрыв валового контракта $v = \bar{x} - \bar{y} - \mathbf{e}$. Однако это противоречит устойчивости снизу относительно частичного разрыва. Следовательно, найдено $z \neq \mathbf{e}$, которое принадлежит пересечению левой части (2.13) — опять противоречие. ■

Далее заметим, что подобно случаю модели обмена в модели Эрроу — Дебре можно ввести понятие *нечёткого ядра* (было введено в теорию в конце 70-х прошлого века), которое, как показывает последующий анализ, близко связанно с понятием нечётко договорного распределения.

Напомним, что распределение $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ модели (2.1) доминируется нечёткой коалицией $t = (t_1, \ldots, t_n) \neq 0$, $0 \leq t_i \leq 1$, $i \in \mathcal{I}$ если найдутся такие $x_i \in \mathcal{P}_i(\bar{x}_i)$, $y_i \in Y_i$, $i \in \mathcal{I}$, что

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} t_i(x_i - \mathbf{e}_i) = \sum_{i \in \mathcal{I}} t_i y_i.$$

Нечётким ядром $\mathcal{C}^f(\mathcal{E})$ называется множество всех недоминируемых по нечётким коалициям распределений. Если предпочтения всех агентов ненасыщенные, то для выпуклой экономики распределение $(\bar{x}, \bar{y})$ принадлежит нечёткому ядру тогда и только тогда, когда

$$0 \notin \mathrm{co}\{\cup_{\mathcal{I}}[\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i - \mathbf{e}_i]\}.$$

Основное теоретическое значение нечёткого ядра состоит в том, что с его помощью удаётся эффективно развивать теорию существования равновесия и, в силу изложенных результатов, нечётко договорного распределения. Общую методологию этого подхода (в части существования равновесия) можно найти в *Алипрантис и др.* (1995), а наиболее продвинутые математические результаты в *Florenzano* (1989, 1990) и *Маракулин* (2012) и др.

Для того чтобы лучше понять свойства нечёткого ядра и установить точное соотношение между ядром и равновесием (совпадение?), мы установим другую оригинальную геометрическую характеристику элементов нечёткого ядра, на которой может основываться дальнейший анализ. Рассмотрим выпуклую экономику и определим

$$\Upsilon_i(\bar{x}_i) = \mathrm{co}[(\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i) \cup \{\mathbf{e}_i\}], \quad i \in \mathcal{I}. \tag{2.15}$$

В силу выпуклости $\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i$, для $[\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i] \neq \emptyset$ заключаем

$$\mathrm{co}[(\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i) \cup \{\mathbf{e}_i\}] = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} [\lambda(\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i) + (1 - \lambda)\mathbf{e}_i] =$$

$$= \Upsilon_i(\bar{x}_i) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda[\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i - \mathbf{e}_i] + \mathbf{e}_i, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Далее рассмотрим множество, вектор

$$\prod_{\mathcal{I}} \Upsilon_i(\bar{x}_i), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}^{ln} = E^{\mathcal{I}}$$

и условие $z + \mathbf{e} \in \prod_{\mathcal{I}} \Upsilon_i(\bar{x}_i)$. Из построения и анализа следует представление

$$z = (\lambda_1(x_1 - y_1 - \mathbf{e}_1), \lambda_2(x_2 - y_2 - \mathbf{e}_2), \ldots, \lambda_n(x_n - y_n - \mathbf{e}_n)), \tag{2.16}$$

выполненное относительно некоторых $x_i \in \mathcal{P}_i(\bar{x}_i)$, $y_i \in Y_i$ $i \in \mathcal{I}$. Рассмотрим далее подпространство, соответствующее соотношениям материального баланса в модели $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{A}(E^{\mathcal{I}}) = \{(z_i)_{\mathcal{I}} \in E^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{e}_i\}.$$

Таким образом, при $z+\mathbf{e} \in \prod_{\mathcal{I}} \Upsilon_i(\bar{x}_i, y_i) \cap \mathcal{A}(E^{\mathcal{I}})$ к условию (2.16) для z добавляются требования

$$\sum_{\mathcal{I}}(z_i + \mathbf{e}_i) = \sum_{\mathcal{I}} \mathbf{e}_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{\mathcal{I}} \lambda_i(x_i - y_i - \mathbf{e}_i) = 0,$$

причём из построения имеем

$$x_i \succ_i \bar{x}_i, \quad y_i \in Y_i, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Значит, нечёткое блокирование имеет место тогда и только тогда, когда существует *ненулевой* z, удовлетворяющий описанным требованиям ($z + \mathbf{e}$ в нужном пересечении). Таким образом, доказана характеристическая

Лемма 2.3 *В выпуклой экономике допустимое распределение* $(\bar{x}, y) \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{A}(E^{\mathcal{I}}) \bigcap \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{co}\left[(\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i) \cup \{\mathbf{e}_i\}\right] = \{\mathbf{e}\}. \tag{2.17}$$

Заметьте, что характеризация (2.17) имеет место и для насыщенных предпочтений. Поскольку множества, фигурирующие в пересечении (2.17) являются выпуклыми, то это позволяет применить теорему отделимости для характеризации элементов нечёткого ядра в стоимостных категориях. Сделать это можно применяя результат и математическую технику, использованные в лемме 2.1. Этот и последующий результаты уместно сравнить с результатами лемм 1, 3 из *Маракулин* (2011), полученными для модели обмена, и даже извлечь отсюда их доказательство.

Так как для выпуклой постановки всегда имеет место

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{co}\left[(\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i) \cup \{\mathbf{e}_i\}\right] \subset \prod_{i\in\mathcal{I}} \left[(\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i + \mathrm{co}\{(\mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i, 0)\}) \cup \{\mathbf{e}_i\}\right] = \{\mathbf{e}\},$$

то в силу лемм 2.2, 2.3 нечётко договорное распределение является элементом нечёткого ядра. При определённых (слабых) условиях верно и обратное: следующий результат проясняет соотношения между двумя нечёткими понятиями.

Лемма 2.4 *Пусть* $\mathcal{E}$ *— выпуклая,* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ *и* $\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) \neq \emptyset$ *для всех* $i \in \mathcal{I}$. *Тогда* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E})$ *влечёт*:

$$\mathcal{A}(E^{\mathcal{I}}) \bigcap \prod_{\mathcal{I}} \left[\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i + \mathrm{co}\{0, \mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i\}\right] = \emptyset. \tag{2.18}$$

Сравнение формул (2.18) и (2.13) выявляет различие между распределениями из нечёткого ядра и нечётко договорными. Видно, что это различие не слишком велико, что позволяет интерпретировать распределения из нечёткого ядра как нечётко договорные[8]. Более того, тот факт, что каждый из элементов нечёткого ядра является квазиравновесием (именно по этой причине нечёткое ядро так популярно в теории существования) можно достаточно легко вывести из формулы (2.18). Действительно, разделяя множества в (2.18) (ненулевым) линейным функционалом $\pi = (p_1, \ldots, p_n) \in E^{\mathcal{I}}$, заключаем:

(*i*) $p_i = p_j = p \neq 0$ для каждого $i, j \in \mathcal{I}$; это так, ибо π ограничен на $\mathcal{A}(E^{\mathcal{I}})$. Таким образом, можно принять p как вектор цен.

(*ii*) Из построения и в силу локальной ненасыщенности предпочтений точки $\bar{x}_i - \bar{y}_i$ и $\mathbf{e}_i$ принадлежат $\operatorname{cl}\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i + \operatorname{co}\{0, \mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i\}$. Следовательно, из разделения множеств имеем

$$\sum_{j\neq i} p\mathbf{e}_j + p(\bar{x}_i - \bar{y}_i) \geq \sum_{\mathcal{I}} p\mathbf{e}_j \quad \Rightarrow \quad p\bar{x}_i \geq p\mathbf{e}_i + \bar{y}_i \ \ \forall i \in \mathcal{I},$$

что возможно только если $p\bar{x}_i = p\mathbf{e}_i + \bar{y}_i \ \forall i \in \mathcal{I}$. Итак, получены бюджетные ограничения для потребительских планов.

(*iii*) Из разделимости для каждого i также имеем:

$$\langle p, \mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i + \operatorname{co}\{0, \mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i\}\rangle \geq p\mathbf{e}_i,$$

откуда следует $\langle p, \mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - \bar{y}_i + \operatorname{co}\{0, \mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i\}\rangle \geq p\mathbf{e}_i \ \Rightarrow$

$$\langle p, \mathcal{P}_i(\bar{x}_i) + \mathbf{e}_i - \bar{x}_i\rangle \geq p\mathbf{e}_i \quad \Rightarrow \quad \langle p, \mathcal{P}_i(\bar{x}_i) \geq p\bar{x}_i.$$

В то же время имеем ($\bar{x}_i \in \operatorname{cl}\mathcal{P}_i(\bar{x}_i)$): $\langle p, \bar{x}_i - Y_i + \operatorname{co}\{0, \mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i\}\rangle \geq p\mathbf{e}_i \ \Rightarrow$

$$\langle p, -Y_i + \mathbf{e}_i + \bar{y}_i\rangle \geq p\mathbf{e}_i \quad \Rightarrow \quad p\bar{y}_i \geq \langle p, Y_i\rangle.$$

Итак, p это (квази)равновесные цены для распределения $(\bar{x}, \bar{y})$.

В итоге заключаем: если модель такова, что каждое квазиравновесие является равновесием, то каждый элемент нечёткого ядра будет нечётко договорным распределением и, следовательно, эти нечёткие концепции совпадают. Условия, обеспечивающие этот факт, хорошо известны в литературе, например это может быть нередуцируемость (напр. см. *Маракулин* (2012)). В итоге доказана следующая

[8] В литературе известна интерпретация элементов нечёткого ядра как равновесий Эджворта, однако сами эти элементы всегда служили скорее техническим инструментом, нежели содержательным понятием.

Теорема 2.2 *В нередуцируемой выпуклой модели типа Эрроу — Дебре — МакКензи с ненасыщенными предпочтениями конкурентное равновесие совпадает с нечётко договорными распределениями и элементами нечёткого ядра, т. е. эти концепции эквивалентны.*

Доказательство леммы 2.4. Доказательство основано на применении леммы 2.3 и соотношения (2.17), характеризующих элементы нечёткого ядра. Нужно показать, что (2.17) влечёт (2.18).

Предположим, что $(\bar{x}, \bar{y})$ удовлетворяет (2.17), но при этом (2.18) ложно. Тогда найдётся вектор $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $0 \le t_i \le 1$ и наборы $x_i \succ_i \bar{x}_i$, $y_i \in Y_i$, $i \in \mathcal{I}$ такие, что

$$\sum_{\mathcal{I}} x_i - \sum_{\mathcal{I}} y_i + \sum_{\mathcal{I}} t_i(\mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i) = \sum_{\mathcal{I}} \mathbf{e}_i. \tag{2.19}$$

Далее для действительного $0 < \beta \le \frac{1}{2}$ рассмотрим вектор $z = z(\beta) = (z_i)_{i \in \mathcal{I}}$, полагая

$$z_i(\beta) = \beta[x_i - y_i + t_i(\mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i)] + (1 - \beta)(\bar{x}_i - \bar{y}_i), \quad i \in \mathcal{I}.$$

В силу (2.19) и $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ для *каждого* β имеем $\sum_{\mathcal{I}} z_i(\beta) = \sum_{\mathcal{I}} \mathbf{e}_i$. Далее векторы $z_i(\beta)$ представим в виде

$$z_i(\beta) = (1 - \beta t_i)(\bar{x}_i - \bar{y}_i) + \beta t_i \mathbf{e}_i + (1 - \beta t_i)\frac{\beta}{1 - \beta t_i}[(x_i - \bar{x}_i) - (y_i - \bar{y}_i)], \quad i \in \mathcal{I},$$

где по выбору β имеем $\mu_i = \frac{\beta}{1 - \beta t_i} \le 1$. Последнее в силу $(\mathbf{A})$ для $i \in \mathcal{I}$ влечёт

$$\mu_i(x_i - \bar{x}_i) \in \mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - \bar{x}_i \;\Rightarrow\; \exists\, \xi_i \in \mathcal{P}_i(\bar{x}_i) : \, \mu_i(x_i - \bar{x}_i) = \xi_i - \bar{x}_i.$$

В то же время $\zeta_i = \mu_i y_i + (1 - \mu_i)\bar{y}_i \in Y_i$ из выпуклости Y_i, но по построению $\mu_i(y_i - \bar{y}_i) = \zeta_i - \bar{y}_i$. Следовательно, из предыдущей формулы, производя подстановку и раскрывая выражения, заключаем

$$\exists\, \xi_i \in \mathcal{P}_i(\bar{x}_i), \exists\, \eta_i \in Y_i : \quad z_i = (1 - \beta t_i)(\xi_i - \zeta_i) + \beta t_i \mathbf{e}_i,$$

что означает $z_i \in \mathrm{co}[(\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) - Y_i) \cup \{\mathbf{e}_i\}\}] = \Upsilon_i(\bar{x}_i)$, $i \in \mathcal{I}$. Теперь можно применить (2.17), заключая $z = z(\beta) = \mathbf{e}$ для *всех* действительных $0 < \beta \le \frac{1}{2}$. Запишем далее это равенство покомпонентно и по определению $z_i(\beta)$ найдём

$$z_i = \beta[x_i - y_i + t_i(\mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i)] + (1 - \beta)(\bar{x}_i - \bar{y}_i) = \mathbf{e}_i \;\Rightarrow$$

$$x_i - y_i + t_i(\mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i) = \bar{x}_i - \bar{y}_i + \frac{\mathbf{e}_i + \bar{y}_i - \bar{x}_i}{\beta},$$

что должно выполняться для всех $i \in \mathcal{I}$ и *всех* $0 < \beta \le \frac{1}{2}$. Однако эти равенства выполняются для *разных* β, что возможно только если $\bar{x}_i = \mathbf{e}_i + \bar{y}_i$ и $x_i = \mathbf{e}_i + y_i$, $i \in \mathcal{I}$. В этом случае по выбору x_i имеем $x_i \succ_i \bar{x}_i$ и это означает доминирование распределения $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ по одноэлементной коалиции $\{i\}$, что противоречит выбору $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E})$. Лемма 2.4 доказана. ∎

3 Невыпуклый производственный сектор

В данном разделе договорной подход распространяется на модель с невыпуклым производственным сектором. Здесь вводится понятие маргинально договорного распределения и доказывается теорема об эквивалентности маргинально договорного распределения и равновесия с ценообразованием по предельным затратам.

Рассмотрим модель экономики (2.1), в рамках которой допустим наличие невыпуклых производственных множеств Y_i, $i \in \mathcal{I}$, предполагая истинность прочих стандартных предположений: замкнутость, насыщенность вниз и проч. Применяемая в такой модели концепция правильно-договорного распределения использует понятие звёздного множества (star shaped set). Напомним, что множество $A \subseteq E$ называется звёздным относительно точки $x \in A$, если для всех $y \in A$ линейный отрезок[9] $[x, y] \subset A$.

Пусть $y = (y_i)_{i \in \mathcal{I}} \in Y$ любой заданный набор производственных планов. Для каждого $i \in \mathcal{I}$ определим множество M_i^y как максимальное по включению звёздное подмножество Y_i относительно точки y_i. Заметим, что для *выпуклого* случая множества M_i^y и Y_i *совпадают*; в невыпуклом варианте может быть и так и эдак, см. рис. 1 *a*). В случае невыпуклых производственных множеств само понятие правильно-договорного распределения модифицируется, но при этом совпадает с рассмотренным выше в выпуклом контексте.

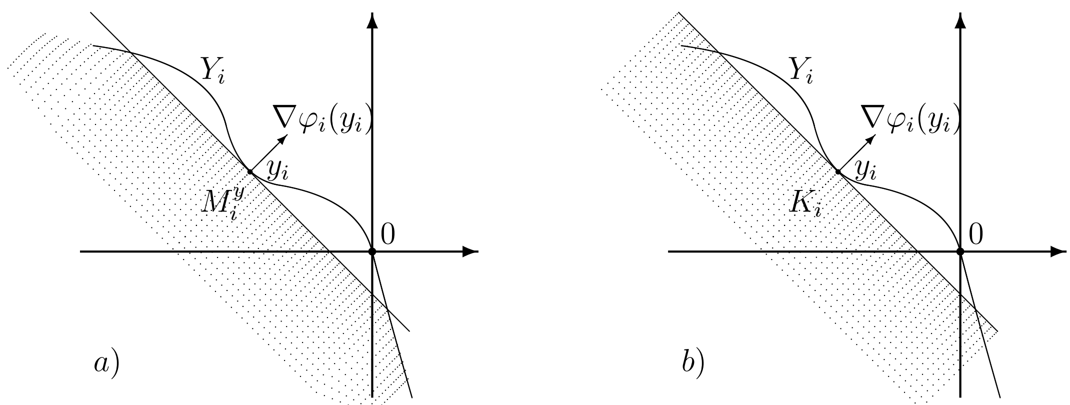

Рис. 1. *a*) — *звёздное подмножество* M_i^y, *b*) — *полупространство* K_i

Определение 3.1 *Пара* $(x, y) \in X \times Y$ *называется маргинально-договорным распределением, если найдется сеть* V *такая, что выполняются условия:*

(*i*) $x = x(V, y) = \sum_V v + \mathbf{e} + y.$

[9]По определению $[x, y] = \{z \in E \mid \exists \lambda \in [0, 1] : z = \lambda x + (1 - \lambda) y\}$.

(*ii*) *Не существует коалиции S, которой было бы выгодно (в раздельном режиме или одновременно):*

(α) *частично рвать меновые договоры;*

(β) *переходить от заданных производственных программ $y = (y_S, y_{-S})$ к новым производственным программам $y' = (y'_S, y_{-S})$, где $y'_S \in \prod_{i \in S} M_i^y$;*

(γ) *заключать новый договор.*

Здесь, в отличие от выпуклого случая, свобода индивида в выборе производственного плана ограничена. Предполагается, что взаимная кооперация или некоторый орган устанавливает совместные производственные планы, а за индивидами остаётся право решать: выполнять их или нет (своеобразная форма необязательного соглашения). Однако отклонение индивидов от заданного производственного плана возможно только в пределах множеств $M_i^y \subseteq Y_i$. Ещё раз напомним, что в случае выпуклых производственных множеств M_i^y и Y_i совпадают.

Предположим далее, что производственные множества Y_i описываются с помощью *дифференцируемых* функций φ_i следующим образом:

$$Y_i = \{y \in E \mid \varphi_i(y) \le 0\}, \; i \in \mathcal{I}.$$

Без ограничения общности предположим также, что границу производственных множеств можно задать в виде

$$\partial Y_i = \{y \in E \mid \varphi_i(y) = 0\} \ne Y_i, \; i \in \mathcal{I}.$$

Далее нам потребуется следующая

Лемма 3.1 *Пусть M_i^y — максимальное звездное подмножество Y_i относительно точки $y_i \in \partial Y_i$. Тогда*

$$M_i^y \subset \{z \in E \mid \varphi_i(z) \le 0 \;\&\; \nabla\varphi_i(y_i) \cdot z \le \nabla\varphi_i(y_i) \cdot y_i\}.$$

Доказательство. Пусть $z \in M_i^y$. По определению M_i^y имеем

$$z(\lambda) = (1-\lambda)y_i + \lambda z \in M_i^y \subseteq Y_i, \quad \forall\, \lambda \in [0,1].$$

Следовательно, $\varphi_i(z(\lambda)) \le 0$. Так как $\varphi_i(y_i) = 0$, то

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{\varphi_i(y_i + \lambda(z - y_i)) - 0}{\lambda} = \langle \nabla\varphi_i(y_i), z - y_i \rangle \le 0,$$

что и доказывает лемму. ■

Связь между маргинально-договорным распределением и MCP–равновесиями устанавливает следующая

Теорема 3.1 *Пусть $\mathcal{E}$ гладкая модель и $x = (x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathrm{int}X$, $y = (y_i)_{i\in\mathcal{I}} \in Y$. Тогда тройка (x, y, p) является MCP-равновесием тогда и только тогда, когда (x, y) маргинально-договорное распределение.*

Доказательство теоремы 3.1. Необходимость. Пусть $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ — MCP-равновесие. Положим $V = \{v\}$, где $v = \bar{x} - \bar{y} - \mathbf{e}$. Покажем, что $(x(V, \bar{y}), \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$ является маргинально-договорным распределением. Предположим противное. Тогда найдутся коалиция S, действительное $\lambda_v \in [0, 1]$, новый договор $w = (w_i)_{i\in\mathcal{I}}$ и новая производственная программа $y'_S = (y'_i)_{i\in S} \in \prod_{i\in S} M_i^{\bar{y}}$ такие, что для всех i из S выполняется

$$\lambda_v \cdot v_i + \mathbf{e}_i + y'_i + w_i = x'_i \succ_i \bar{x}_i, \quad i \in S.$$

По определению равновесия $\bar{p}x'_i > \bar{p}\mathbf{e}_i + \bar{p}\bar{y}_i$. Поскольку отклонение от заданного производственного плана возможно только в пределах $M_i^{\bar{y}}$, то по лемме 3.1 получаем

$$\nabla\varphi_i(\bar{y}_i) \cdot y'_i \leq \nabla\varphi_i(\bar{y}_i) \cdot \bar{y}_i.$$

Так как $\bar{p} = \lambda_i \cdot \nabla\varphi_i(\bar{y}_i)$ при некотором $\lambda_i > 0$, то $\bar{p} \cdot y'_i \leq \bar{p} \cdot \bar{y}_i$, но тогда для каждого $i \in S$ имеем

$$\bar{p}x'_i > \bar{p}\mathbf{e}_i + \bar{p}\bar{y}_i \geq \bar{p}\mathbf{e}_i + \bar{p}y'_i \;\Rightarrow\; \bar{p}x'_i - \bar{p}\mathbf{e}_i - \bar{p}y'_i > 0.$$

В силу $\lambda_v\bar{p}v_i + \bar{p}\mathbf{e}_i + \bar{p}y'_i + \bar{p}w_i = \bar{p}x'_i$ заключаем

$$\bar{p}\sum_S w_i = \bar{p}\sum_S x'_i - \bar{p}\sum_S \mathbf{e}_i - \bar{p}\sum_S y'_i - \lambda_v\bar{p}\sum_S v_i. \tag{3.1}$$

Однако заметим, что $\bar{p}\sum_S x'_i - \bar{p}\sum_S \mathbf{e}_i - \bar{p}\sum_S y'_i > 0$. Также заметим, что из свойств MCP-равновесия (1.7) следует $\bar{p}v_i = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$. Теперь из (3.1) получаем $\bar{p}\sum_S w_i > 0$, что противоречит определению договора.

Установим достаточность. Пусть $(x(V, y), y)$ — маргинально-договорное распределение. Покажем, что существует вектор $p \neq 0$ такой, что (x, y, p) — MCP-равновесие. Рассмотрим следующие выпуклые множества (см. рис. 1 *b*)):

$$K_i = \{y'_i \in L \mid \langle\nabla\varphi_i(y_i), y'_i\rangle < \langle\nabla\varphi_i(y_i), y_i\rangle\} \cup \{y_i\}, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Заметим, что

$$\overline{K}_i \supset \{y'_i \in Y_i \mid \langle\nabla\varphi_i(y_i), y'_i\rangle \leq \langle\nabla\varphi_i(y_i), y_i\rangle\} \supset M_i^y, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Это касательный в Y_i конус, выпущенный из точки y_i.

Положим $K = \prod_{i\in\mathcal{I}} K_i$. Далее рассмотрим модель экономики $\mathcal{E}_K$, аналогичную изучаемой, в которой множества Y_i заменены на K_i. Покажем, что пара (x, y) оптимальна по Парето в $\mathcal{E}_K$. Предполагая противное, найдём достижимое распределение $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{A}(\mathcal{E}_K)$, где $\hat{y} \in \prod_{i\in\mathcal{I}} K_i$ и $\hat{x}_i \succ_i x_i$ для всех $i \in \mathcal{I}$. Пусть

$$y_i(\alpha) = y_i + \alpha(\hat{y}_i - y_i), \quad \alpha \in (0, 1], \quad i \in \mathcal{I}.$$

Поскольку $\hat{y}_i \in K_i$, то при $\hat{y}_i \neq y_i$ будем иметь

$$\langle \nabla\varphi_i(y_i), y_i(\alpha) - y_i\rangle = \alpha\langle \nabla\varphi_i(y_i), \hat{y}_i - y_i\rangle < 0, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Напомним, что $\varphi_i(y_i) = 0$. Но тогда для всех достаточно малых $\alpha > 0$ получаем

$$\varphi_i(y_i(\alpha)) = \varphi_i(y_i) + \langle \nabla\varphi_i(y_i), y_i(\alpha) - y_i\rangle + o(|y_i(\alpha) - y_i|) < 0, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Следовательно, для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $\alpha \in [0, \varepsilon]$ для каждого $i \in \mathcal{I}$ имеем

$$y_i(\alpha) \in M_i^y.$$

Зафиксируем $\alpha \in [0, \varepsilon]$ и положим $\tilde{y}_i = y_i(\alpha)$, $\tilde{x}_i = \alpha\hat{x}_i + (1-\alpha)x_i$. Пусть $w_i = \hat{x}_i - \hat{y}_i - \mathbf{e}_i$, $i \in \mathcal{I}$. В силу выпуклости $\mathcal{P}_i(x_i)$ имеем $\tilde{x}_i \succ_i x_i$. С другой стороны,

$$\tilde{x}_i = \alpha(\hat{y}_i + w_i + \mathbf{e}_i) + (1-\alpha)(y_i + \sum_{v\in V} v_i + \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i + (1-\alpha)\sum_{v\in V} v_i + \alpha w_i + \tilde{y}_i.$$

Положим $W = (1-\alpha)V \cup \{\alpha w\}$. По построению αw является (новым) договором, а $\tilde{y}_i \in M_i^y$ — новый производственный план, полученный из исходного $\hat{y}_i$. При этом новые потребительские планы $\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(W, \tilde{y}_i)$ строго предпочтительнее планов x_i для всех $i \in \mathcal{I}$. Пришли к противоречию с определением маргинально-договорного распределения, так как распределение $(\tilde{x}, \tilde{y})$ получено из исходного через разрыв старых договоров в объёме $\alpha > 0$, нового выбора допустимых производственных планов и заключения нового менового договора αw.

Таким образом, мы находимся в условиях леммы 2.1, в силу которой найдется вектор $p \neq 0$ такой, что для всех $i \in \mathcal{I}$

$$\langle p, \mathcal{P}_i(x_i)\rangle \ \geq p \cdot x_i \ \ \& \ \ p \cdot y_i \geq \langle p, K_i\rangle. \tag{3.2}$$

Докажем далее, что p — цены MCP-равновесия. С этой целью сначала покажем, что

$$px_i = py_i + p\mathbf{e}_i, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Однако этот факт доказывается аналогично тому, как это было сделано в выпуклом случае (см. теорему 2.1). Так как предположение (**A**) и $x_i \in \mathrm{int}X_i$ для $p \neq 0$ в силу (3.2) совместно влекут

$$\langle p, \mathcal{P}_i(x_i)\rangle > p \cdot x_i, \quad i \in \mathcal{I},$$

то условие (1.7) определения 1.2 доказано. Условие (1.6) определения 1.2 следует из (3.2) и определения K_i. Наконец, пункт (1.8) выполняется по определению договорного распределения. Теорема 3.1 доказана. ■

4 Заключение

В работе был предложен и анализировался договорной подход в контексте модели экономики с производственным сектором типа Эрроу — Дебре — МакКензи. При этом исследовались модели как с выпуклыми так и невыпуклыми производственными множествами. Исследование показало большие возможности договорного подхода, в рамках которого удалось получить договорное описание известных в теории концепций равновесия, в их числе: вальрасовское равновесие в выпуклой модели и равновесие с ценообразованием по предельным затратам в невыпуклой постановке (MCP–равновесие). При этом был предложен ряд новых договорных понятий: специфические варианты правильно договорного, а также новые понятия нечётко договорного и маргинально договорного распределения. С помощью этих понятий даётся характеризация равновесий, не прибегающая к стоимостным категориям, что является основным достоинством договорного подхода. Основными результатами являются:

1) Теорема 2.1 об эквивалентности правильно-договорного распределения и конкурентного равновесия в модели Эрроу–Дебре с выпуклым производством.

2) Теорема 2.2 и понятие нечётко договорного распределения данное в определении 2.3, его анализ в лемме 2.2 и последующее сопоставление с концепцией нечёткого ядра, реализованное в леммах 2.3, 2.4.

3) Теорема 3.1 об эквивалентности MCP–равновесия и маргинально-договорного распределения;

Таким образом, результаты пунктов 1), 2) подводят теоретический фундамент для обоснования концепции вальрасовского равновесия и договорного моделирования совершенной конкуренции, а теорема пункта 3) обращена на понятие MCP–равновесия — содержательно не вполне ясного объекта — повышая, тем самым, доверие к самой концепции. Все это способствует дальнейшему развитию договорного подхода, как некоторого универсального инструментария для построения и анализа моделей экономических процессов.

Список литературы

Алипрантис К., Браун Д., Беркёншо О., Существование и оптимальность конкурентного равновесия. *пер. с англ., М.: Мир*, 1995, 384 с.

Козырев А. Н. (1981). Устойчивые системы договоров в экономике чистого обмена// *Оптимизация*, вып. **29**(44), 66–78, (Изд. ИМ СО АН СССР, Новосибирск)

Козырев А. Н. (1982). Договорные и вполне договорные состояния в абстрактной экономике//*Институт математики СО АН СССР, Препринт № 7*, Новосибирск, 44 с.

Макаров В. Л. (1980). О понятии договора в абстрактной экономике// *Оптимизация*, вып. 24(41), 5–17 (изд. ИМ СО АН СССР, Новосибирск)

Макаров В. Л. (1982). Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства// *Итоги науки и техники: Современные проблемы математики*, Москва: ВИНИТИ АН СССР, т. **19**, 23–58

Маракулин В. М. (2002). Контракты и доминирование в конкурентной экономике I. Модель договорной экономики и стандартный рынок// *Институт математики СО РАН, Препринт № 90*, Новосибирск, 37 с.

Маракулин В. М. (2003). Договоры и коалиционное доминирование в неполных рынках// *Консорциум экономических исследований и образования.* Серия "Научные доклады", № 02/04, 114 с.
URL http://eerc.ru:8088/details/people.aspx?id=6959&m=3

Маракулин В. М. (2011). Контракты и доминирование в моделях конкурентной экономики// *Журнал Новой Экономической Ассоциации*, **9**, 10–32

Маракулин В. М. (2012). Абстрактный равновесный анализ математических моделей экономики. *Новосибирск: Изд-во СО РАН*, 348 с. ISBN 978-5-7692-1242-0

Полтерович В. М. (1970). Математические модели перераспределения ресурсов// *Центральный экономико–математический Институт*, Москва, 107 с.

Arrow, K. and G. Debreu (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy// *Econometrica*, **22**, 3, 265–290

Beato, P. and A. Mas-Colell (1985). On marginal cost pricing with given tax-subsidy rules// *Journal of Economic Theory*, **37**, 356–365

Bonnisseau, J. M. and B. Cornet (1988). Existence of equilibria when firms follow bonded losses pricing rules// *Journal of Mathematical Economics*, **17**, 103–118

Bonnisseau, J. M. and B. Cornet (1990). Existence of marginal cost pricing equilibria in economies with several nonconvex firms// *Econometrica*, **58**, 661–682

Brown, D. J. (1991). Equilibrium analysis with non-convex technologies// *in*: Handbook of mathematical economics, eds. W. Hildenbrand and H. Sonneshein, vol. **4**, 1964–1995

Florenzano, M. (1989). On the non-emptiness of the core of a coalitional production economy without ordered preferences//*Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **141**, 484–490

Florenzano, M. (1990). Edgeworth equilibria, fuzzy core and equilibria of a production economy without ordered preferences//*Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **153**, 18–36

Mantel, R. (1979). Equilibrio con rendimiento crecientes a escala// *Anales de la Asociation Argentine de Economia Politica*, **1**, 271–283

Marakulin, V. M. (2013). On the Edgeworth conjecture for production economies with public goods: A contract-based approach// *Journal of Mathematical Economics*, **49** 3 (May 2013), p. 189–200 ISSN 0304–4068

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and J. R. Green (1995). Microeconomic Theory. New York/Oxford: *Oxford University Press*, 981 p.

McKenzie, L. W. (1954). On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems// *Econometrica*, **22**, 2, 147–161