УДК 519.865
DOI 10.17377/PAM.2017.17.7

В. М. Маракулин

ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАВНОВЕСИЯ: СУЩЕСТВОВАНИЕ ИММИГРАЦИОННО СОСТОЯТЕЛЬНОГО ДЕЛЕНИЯ НА СТРАНЫ В ОДНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Изучается вопрос существования иммиграционно-состоятельного деления на страны в рамках одномерного мира на отрезке [0,1], где распределение населения описывается посредством меры Радона и, вообще говоря, не имеет плотности. Доказано существование деления на «страны» в виде обобщённых интервалов, где могут появится страны нулевого размера (длины), но ненулевой массы (населения). Это своеобразное равновесие Тибу, где принцип миграционной состоятельности предполагает, что у пограничных жителей отсутствуют выявленные мотивы для изменения юрисдикции, т. е. в данной точке размещения населения имеется равенство издержек у граждан граничных стран. Работа обобщает результаты ряда авторов 90-х и начала 2000-х годов.

Ключевые слова: Странообразование, мир Алесины и Сполаоре, миграция, стабильное разбиение

Введение

В основополагающей работе [1] была предложена базовая модель странообразования, представляющую своеобразное равновесие Тибу [2]. В этой модели издержки населения описываются как сумма двух величин — отношения совокупных издержек на общую массу населения страны плюс транспортные издержки до центра государства. Эта модель изучалась в ряде последующих работ в каждой из которых рассматривается случай одномерной области и стран интервального вида (странообразование на отрезке $[0, 1]$). В части разрешения проблемы существования наибольшие продвижения были получены в [3], где с применением леммы Гейла — Никайдо — Дебре было доказано существование иммиграционно состоятельного разбиения отрезка на страны-интервалы, т. е. такого, что ни у кого нет стимулов к изменению страны проживания. Однако в [3] были сделаны довольно сильные предположения на распределение населения — непрерывная плотность, отделённая от нуля. Более того, несмотря на то, что предложенное доказательство элегантное, оно слишком абстрактное и недостаточно общее одновременно, но главное — плохо приспособлено для распространения на многомерный случай. Первая цель данной работы состоит в том, чтобы восполнить этот пробел и предложить некоторое новое доказательство одномерной теоремы. Это доказательство интересно тем, что оно интуитивно прозрачное и заложенные в него идеи можно распространить на пространства большей размерности. Более того, это покажется удивительным, но последующие исследования многомерного случая показали, что имеющиеся *доказательства неприменимы к одномерному случаю*, поскольку одно ключевое в конструкции предположение нарушается именно в одномерной постановке. Таким образом, одномерная модель имеет самостоятельный теоретический интерес.

ISSN 2411-3468. Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2017. Т. 17, No 4. С. 64–78

Теорема существования и её доказательство для абсолютно непрерывного по мере Лебега распределения популяции составили первый раздел работы. Во втором разделе рассматривается обобщение доказанной одномерной теоремы на случай распределения населения, описанного как мера Радона. Результаты основаны на [4] и частично развивают [5]. Действительно, предположение об (описывающей распределение популяции) мере абсолютно непрерывной относительно меры Лебега вызывает недоумение: что происходит с городским населением? — городов нет вообще?.. и неужели наличие незаселённых участков может как-то препятствовать делению на страны? Понятно, что причина этих недоразумений имеет сугубо математическую природу и решение можно найти, применяя соответствующую математическую технику. Именно на это нацелен второй раздел работы. Здесь распределение жителей описывается с помощью меры Радона μ — это счётно-аддитивная вероятностная мера, заданная на борелевской σ-алгебре. В силу известной в математическом анализе теоремы, так называемом разложении Лебега, меру μ можно представить в виде суммы чисто дискретной меры ν, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега ϑ и сингулярной меры, т. е. имеем $\mu = \nu + \vartheta + \zeta$. Абсолютно непрерывной составляющей соответствует *непрерывное распределение* $F(x) = \vartheta([0,x])$, $x \in [0,1]$, которое можно интерпретировать как распределение сельского населения. В то же время чисто дискретное слагаемое ν соответствует городскому населению, ибо тогда мера имеет счётный носитель и представляется как сумма мер, сконцентрированных в точке (меры Дирака), вида $\nu'(\{a\}) = \alpha = \nu'(A)$ для всех $A \subseteq [0,1]$, включающих в себя точку a и ноль иначе. Здесь α можно понимать как население (масса) города, сконцентрированного (расположенного) в точке $a \in [0,1]$. Конечно, наличие счётного числа городов это чисто математическая абстракция, полученная «задаром» — однако случай конечного числа городов полностью попадает в рамки теории. Сингулярное слагаемое ζ не имеет содержательного смысла и в изученной модели популяции отсутствует.

И последнее: какого типа разбиение на страны существует и может получится? — в постановке [3] этот вопрос не имеет значения — неважно, включаются или нет концы отрезка в «страну» — ибо мера одноточечных множеств равна нулю. В нашем случае это не так, поскольку имеются точки с ненулевой массой. В таком случае точка может разделиться на две неравные по массе части, одна из которых принадлежит одному смежному интервалу-стране, другая — другому. Также может произойти такая любопытная вещь как появление стран-городов нулевой длины. Такие города как Иерусалим, Рим с Ватиканом, ранее — разделённый Берлин и т. д. могут служить реальной иллюстрацией полученного теоретического заключения.

1. Одномерное странообразование на отрезке

Итак, в [3] была обоснована возможность по-странового разбиения отрезка на страны-интервалы в случае распределения жителей описанного посредством непрерывной плотности отделённой от нуля. В данной работе предлагается ещё одно доказательство, основанное на построении некоторого непрерывного отображения, неподвижная точка которого даёт по-страновое разбиение; метод применяется для распределения населения (меры) μ, которое *абсолютно непрерывно* и имеет положительную меру у каждого непустого открытого интервала, т. е. $\mathrm{supp}(\mu) = [0,1]$.

Далее используются следующие обозначения: разбиение отрезка $[0,1]$ задаётся вектором $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $w_0 = 0$, $w_n = 1$, которому соответствуют «страны» $S_i = \langle w_{i-1}, w_i \rangle$.[1] На $[0,1]$ имеется неотрицательная мера μ, отражающая распределение жителей. Вектору w ставятся в соответствие векторы

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_i = w_i - w_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n), \quad \delta_i = \mu(\langle w_{i-1}, w_i \rangle), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Оба вектора принадлежат стандартному симплексу $\Delta^{(n-1)} \subset \mathbb{R}^n$, где x_i это длина i-го отрезка-страны (по мере Лебега) и δ_i — размер i-й популяции (по мере μ). Ясно, что $\mathbf{x}$ однозначно задаёт w. Более того, посредством $\mathbf{x} \in \Delta^{(n-1)}$ определяется удобная для анализа одномерной задачи параметризация (в двумерном случае эти переменные задают межстрановую границу).

Интересы индивидуума полностью описываются функциями $c_i(x,\cdot)$, $i = 1, \ldots, n$ индивидуальных затрат при условии его принадлежности стране i, заданными в точке его местожительства $x \in [0,1]$. Эти функции зависят от массы резидентов юрисдикции, места жительства данного индивида, границами его юрисдикции — заданы координатами $w_{i-1}, w_i \in [0,1]$ и, возможно, ещё какими-то важными для формирования стран параметрами (расположение центра страны и др.), описанными переменной $y \in Y$, где Y это выпуклый компакт (или другое множество со свойством неподвижной точки). Далее мы будем считать, что функции затрат имеют достаточно общий вид и удовлетворяют:

(**C**) *Для каждого $i \in N$ функция затрат $c_i(\cdot)$ определена и непрерывна на*

$$[0,1] \times Y \times (\Delta^{(n-1)} \setminus F_i), \text{ где } F_i = \{\delta \in \Delta^{(n-1)} \mid \delta_i = 0\},$$

и $c_i(x, y, \delta_1, \ldots, \delta_n) \to +\infty$ при $(x, y, \delta_i, \delta_{-i}) \to (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{\delta}_{-i})$, т. е. для $\bar{\delta}_i = 0$.

В нашем случае — когда распределение популяции представлено мерой, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега — данное предположение можно переформулировать в следующем виде. Вместо массы страны применяется её размер $\mathbf{x}_i = w_i - w_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, и вместо симплекса по-страновых масс используем симплекс по-странового деления с элементами $\mathbf{x} \in \Delta^{(n-1)}$. Тогда, если носитель меры совпадает с $[0,1]$, мы приходим к эквивалентному предположению:

(**C′**) *Для каждого $i \in N$ функция затрат $c_i(\cdot)$ определена и непрерывна на*

$$[0,1] \times Y \times (\Delta^{(n-1)} \setminus F_i), \text{ где } F_i = \{\mathbf{x} \in \Delta^{(n-1)} \mid \mathbf{x_i} = 0\},$$

и $c_i(x, y, \mathbf{x}) \to +\infty$ при $(x, y, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{-i}) \to (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{\mathbf{x}}_{-i})$, т. е. для $\bar{\mathbf{x}}_i = 0$.

Основным модельным примером функций, удовлетворяющих этому требованию, являются

$$c_i(x, \mathbf{x}, r_c(S_i)) = \frac{g_i}{\delta_i} + \rho(x, r_c(S_i)), \quad g_i > 0, \quad i \in N, \tag{1}$$

[1] Промежуток $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ это один из возможных вариантов: $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b).

где $\delta_i = \mu(S_i(\mathbf{x})) = \mu(\langle w_{i-1}, w_i\rangle))$ это масса жителей i-й страны и $r_c(S_i) = y_i$ — точка в интервале $\langle w_{i-1}, w_i\rangle$, отождествляемая с центром страны (столица), а $\rho(\cdot,\cdot)$ — некоторая метрика. Таким образом, затраты делятся на две составляющие — равномерно распределённый среди граждан налог g_i (стоимость правительства?) плюс издержки, связанные с удалённостью индивидуума от центра. Теоретически наиболее интересный случай это когда в качестве центров стран принимаются их центры масс или, альтернативно, центры интервалов-стран.

В [3] было обоснованно, что *миграционно состоятельному разбиению* на страны должна соответствовать *непрерывная* функция индивидуальных затрат (склейка $c_i(x,\cdot)$ по интервалам разбиения), т. е. $c_i(x,\cdot) = c_{i+1}(x,\cdot)$ при $x = w_i$ $\forall i = 1,\dots,n-1$ (w_i это правый конец i-й страны и левый у $(i+1)$-й).

Теорема 1. *Если мера μ* ***абсолютно непрерывна*** *и* $\mathrm{supp}(\mu) = [0,1]$*, то для каждого натурального n существует иммиграционно состоятельное разбиение отрезка* $[0,1]$ *на n* ***нетривиальных*** *стран-интервалов (с непустой внутренностью[2]).*

Замечание 1. В работе [6] для многомерной компактной области $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^l$ в задаче пострanового деления рассматривалась функция затрат, удовлетворяющая следующему предположению[3]:

($\mathbf{C}''$) *Для каждого $i \in N$ функция затрат $c_i(\cdot)$ определена и непрерывна на*

$$\mathcal{A} \times Y \times (\Delta^{(n-1)} \setminus F_i), \text{ где } F_i = \{\delta \in \Delta^{(n-1)} \mid \delta_i = 0\},$$

и удовлетворяет

(*i*) $c_i(x,y,\delta_1,\dots,\delta_n) \to +\infty$ *при* $(x,y,\delta_i,\delta_{-i}) \to (\bar{x},\bar{y},0,\bar{\delta}_{-i})$*, т. е.* $\bar{\delta}_i = 0$*;*

(*ii*) *для всех фиксированных* $(y,\delta) \in Y \times \Delta^{(n-1)}$ *множества*

$$A_{ij}(y,\delta) = \{x \in \mathcal{A} \mid c_i(x,y,\delta) = c_j(x,y,\delta)\} \quad \forall j \neq i,\ i,j \in N$$

имеют нулевую меру Лебега.

Это предположение отличается от нашего ($\mathbf{C}$) в части дополнительного требования ($\mathbf{C}''$)(*ii*), которое для задачи на одномерном отрезке не является безобидным уже для функций типа (1). Следуя [6], набору $(y,\delta_1,\dots,\delta_n) \in Y \times \Delta^{(n-1)}$ можно было бы поставить в соответствие следующее деление на страны:

$$S_i(y,\delta) = \{x \in \mathcal{A} \mid c_i(x,y,\delta) = \min_{j\in N} c_j(x,y,\delta)\}, \quad i \in N.$$

Далее находим меры этих стран и определяем отображение на $Y \times \Delta^{(n-1)}$, чья неподвижная точка соответствует искомому пространственному равновесию. Однако данный подход затруднительно применить в одномерном случае, поскольку ($\mathbf{C}''$)(*ii*) может нарушаться: не для каждой возможной конфигурации масс найдется допустимая конфигурация

[2]В силу $\mathrm{supp}(\mu) = [0,1]$ требование непустой внутренности эквивалентно ненулевой мере (массы) для стран в разбиении.

[3]Работа [6] ещё не закончена и я формулирую здесь мою адаптацию ключевого предположения.

стран. Например, при $\mathcal{A} = [0,1]$ для функций вида (1) для двух стран затраты с фиксированными (исторически определёнными) столицами в точках $r_1, r_2 \in [0,1]$ имеют вид $c_i(x,\delta_1,\delta_2) = |x - r_i| + \frac{g_i}{\delta_i}$, $i = 1,2$ и, значит, межстрановая граница $A_{ij}(y,\delta)$ задаётся уравнением

$$|x - r_1| + \frac{g_1}{\delta_1} = |x - r_2| + \frac{g_2}{\delta_2} \quad \Rightarrow \quad |x - r_1| - |x - r_2| = const = \frac{g_2}{\delta_2} - \frac{g_1}{\delta_1}.$$

При $x > r_2 > r_1$, раскрывая модуль, имеем $|x - r_1| - |x - r_2| = x - x + r_2 - r_1 = r_2 - r_1$. Значит, при определённых значениях $g_i > 0$, $\delta_i > 0$ может оказаться $[r_2, 1] \subset A_{ij}(y,\delta)$, что противоречит предположению $(\mathbf{C}'')(ii)$. Такая же проблема складывается в случае $x < r_1 < r_2$, но её нет при $r_1 < x < r_2$. Помимо этого, с ростом числа стран могут появиться и другие специфические трудности. Например простейший случай трёх стран с равномерно распределённым населением. Расположим столицы в точках $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$. Тогда в силу требования интервального вида стран и принадлежности столицы стране-интервалу массы первой и третьей страны не могут быть меньше $\frac{1}{4}$, а сумма масс 2-й страны и 1-й или 2-й и 3-й не меньше $\frac{1}{2}$, и т. д. В каждом частном случае с такими проблемами разобраться несложно, но нужен общий метод. Тем более, что появляются специфические трудности в случае совпадения столиц (в текущей переменной ситуации), когда функции затрат совпадают: в интересном с теоретической точки зрения случае, когда расстояние евклидовое и массы одинаковые, происходит вырождение, с которым опять-таки надо специально разбираться. $\square$

Доказательство теоремы 1. В граничных точках $w_i = \sum_{j=1}^{i} x_j$ рассмотренных областей найдём эксцесс затрат возможных юрисдикций:

$$h_i(\mathbf{x}) = c_i(w_i,\mathbf{x}) - c_{i+1}(w_i,\mathbf{x}), \quad i = 1,\dots,n-1,$$

применяя который определим (однозначное) отображение $\varphi : \Delta^{(n-1)} \to [0,1]^{(n-1)}$, для $x_i > 0, x_{i+1} > 0$, $i = 1,\dots,n-1$ полагая

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} w_i + \frac{x_{i+1}}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{1+h_i(\mathbf{x})}, & \text{если} \quad h_i(\mathbf{x}) \geq 0, \\ w_i - \frac{x_i}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{h_i(\mathbf{x})-1}, & \text{если} \quad h_i(\mathbf{x}) < 0. \end{cases} \tag{2}$$

При $x_i \cdot x_{i+1} = 0$ положим

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} w_i + \frac{x_{i+1}}{2} = \lim\limits_{0<y_i\to+0} \varphi_i(y_i|\mathbf{x}), & \text{если} \;\; x_i = 0, \;\; x_{i+1} > 0, \\ w_i - \frac{x_i}{2} = \lim\limits_{0<y_{i+1}\to+0} \varphi_i(y_{i+1}|\mathbf{x}), & \text{если} \;\; x_i > 0, \;\; x_{i+1} = 0, \\ w_i = \lim\limits_{0\ll(y_i,y_{i+1})\to+0} \varphi_i(y_i,y_{i+1}|\mathbf{x}), & \text{если} \;\; x_i = 0, \;\; x_{i+1} = 0, \end{cases}$$

Образное представление об отображении φ представлено на диаграмме 1, случай (a). Непрерывность $\varphi(\cdot)$ проверяется непосредственно. Кроме того, по построению, для $w_i \leq w_{i+1}$ имеем $\varphi_i(\mathbf{x}) \leq \varphi_{i+1}(\mathbf{x})$ $\forall i$. Значит, отображение

$$\psi(\mathbf{x}) = (\psi_i(\mathbf{x}))_{i=1,\dots,n} = (\varphi_i(\mathbf{x}) - \varphi_{i-1}(\mathbf{x}))_{i=1,\dots,n},$$

где по определению $\varphi_0(\mathbf{x}) = 0$ и $\varphi_n(\mathbf{x}) = 1$, непрерывно, определено и принимает значения в $\Delta^{(n-1)}$. Следовательно, мы находимся в условиях классической теоремы Брауэра, что

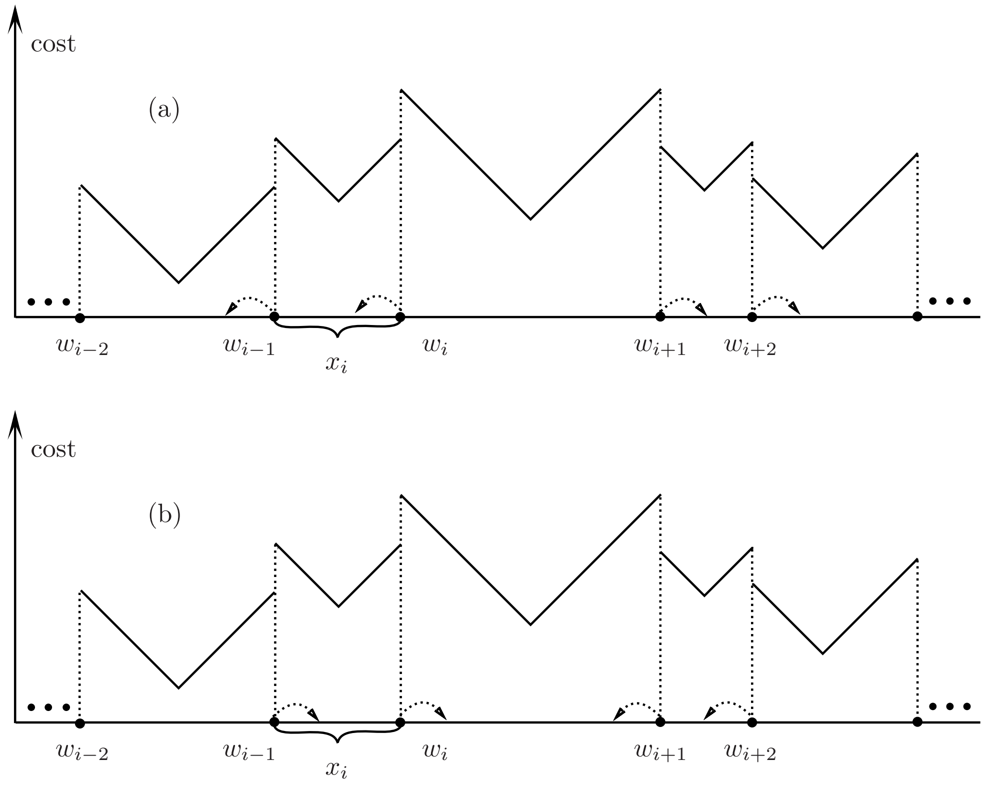

Рис. 1: Трансформация текущего по-странового деления: (a) соответствует теореме 1; (b) — возможный, но не реализованный случай.

означает существование неподвижной точки

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) \in \Delta^{(n-1)}.$$

Далее покажем, что этой точке соответствует иммиграционно состоятельное разбиение на страны такое, что $x_i > 0\ \forall i = 1, \ldots, n$, т. е. все страны имеют ненулевой размер. Начнём со второй части.

Предположим существует страна нулевого размера. Так как $(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta^{(n-1)}$, то тогда найдётся пара x_i, x_{i+1} такая, что ровно одна из этих величин отлична от нуля. Пусть, например, $x_i = 0$ и $x_{i+1} > 0$, $x_{i-1} > 0$. Тогда из построения ψ и свойства неподвижной точки заключаем

$$\begin{gathered} w_i - w_{i-1} = x_i = \psi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}) - \varphi_{i-1}(\mathbf{x}) = \\ = w_i + \frac{x_{i+1}}{2} - \left(w_{i-1} - \frac{x_{i-1}}{2}\right) = w_i - w_{i-1} + \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2}, \end{gathered}$$

что невозможно (правая часть строго больше левой). Прочие возможности анализируются подобным образом. Полученные противоречия доказывают, что неподвижная точка лежит во внутренности симплекса.

Чтобы установить иммиграционную состоятельность, предположим противное ($\exists i \mid h_i(\mathbf{x}) \neq 0$) и вновь воспользуемся свойствами неподвижной точки. Тогда для *наименьшего* i такого, что $h_i(\mathbf{x}) \neq 0$ по построению имеем $\varphi_{i-1}(\mathbf{x}) = w_{i-1}$ и, значит, при $h_i(\mathbf{x}) > 0$ находим

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}) - \varphi_{i-1}(\mathbf{x}) = w_i + \frac{x_{i+1}}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{1 + h_i(\mathbf{x})} - w_{i-1} = x_i + \frac{x_{i+1}}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{1 + h_i(\mathbf{x})} > x_i.$$

Аналогично,

$$\psi_i(\mathbf{x}) = x_i - \frac{x_i}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{h_i(\mathbf{x}) - 1} < x_i$$

при $h_i(\mathbf{x}) < 0$. Оба случая невозможны, что и доказывает иммиграционную состоятельность разбиения. Теорема доказана. □

Замечание 2. Предложенная выше конструкция отображения ψ основана на отображении φ, которое имеет простой содержательный смысл: граница страны с высокими издержками сдвигается в сторону страны с низкими издержками — таким образом происходит как бы «оккупация новых территорий». Этот принцип может показаться не совсем логичным, ибо, в частности, он может означать «захват территории» и жителей малой группой населения у большой группы. Более логичным представляется обратный принцип добровольного присоединения, когда граждане страны с высокими издержками меняют свою юрисдикцию на страну с более низкими. Математически это выглядит таким образом: $\forall i = 1, \ldots, n$

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} w_i - \frac{x_i}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{1+h_i(\mathbf{x})}, & \text{если} \quad h_i(\mathbf{x}) \geq 0, \\ w_i + \frac{x_{i+1}}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{h_i(\mathbf{x})-1}, & \text{если} \quad h_i(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

Однако при этом построении появляется одна существенная проблема: наличие патологических неподвижных точек, включающих в себя страны нулевой длины, что не может нас устроить. Например, такой точкой является $\mathbf{x} = (0, \ldots, 0, 1)$, т. е. ситуация, когда все страны кроме одной имеют нулевую длину и массу. Эту трудность можно преодолеть путём дополнительного построения, однако это влечёт существенное усложнение конструкции доказательства, что в одномерном случае нерационально. □

2. Одномерный мир с разрывным распределением населения: модель и основной результат

Следуя построениям первого раздела, имеем отрезок $[0, 1]$, который нужно разбить на страны-интервалы. Разбиение задаётся вектором $w = (w_1, \ldots, w_n)$, $w_0 = 0$, $w_n = 1$, которому соответствуют страны $S_i = \langle w_{i-1}, w_i \rangle$, как промежутки интервала. Кроме того, имеется мера μ на $[0, 1]$, отражающая распределение жителей. Вектору w ставится в соответствие два вектора из $\Delta^{(n-1)} \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i = w_i - w_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n), \quad \delta_i = \mu(\langle w_{i-1}, w_i \rangle), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где x_i это длина i-го отрезка-страны, а δ_i — размер i-й популяции (по мере μ).

О мере μ. В общем случае это должна быть мера Радона — это вероятностная мера, заданная на борелевской σ-алгебре. Дополнительно потребуем, чтобы она была представима в виде *суммы непрерывной и дискретной* (точечной) меры. В частном случае этой меры можно предполагать, что она абсолютно непрерывна относительно меры Лебега или даже постулировать наличие непрерывной плотности, т. е. существует $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\mu(B) = \int_B f(x)d\mu(x), \quad B \in \mathcal{B},$$

где $\mathcal{B}$ борелевская σ-алгебра на $[0,1]^4$.[4]

В первом разделе было доказано (теорема 1), что для вероятностной абсолютно непрерывной меры иммиграционно состоятельное разбиение на страны существует (для непрерывной f результат получен в [3]), но как его распространить на общий случай? Рассмотрим далее пример распределения жителей на отрезке с разрывным распределением.

Пример 1. Предположим на $[0, \frac{1}{2}) = A$ и $(\frac{1}{2}, 1] = B$ население распределено как-то непрерывно, но мера точки $\frac{1}{2}$ ненулевая. Пусть затраты определяются как в базисном модельном варианте, через функцию

$$c(x, w_{i-1}, w_i) = \frac{g}{\mu(\langle w_{i-1}, w_i \rangle)} + |r_c(\langle w_{i-1}, w_i \rangle) - x|.$$

Здесь g это затраты на содержание правительства и $|r_c(\langle w_{i-1}, w_i \rangle) - x|$ расстояние до столицы, расположенной в точке $r_c(\langle w_{i-1}, w_i \rangle) \in \langle w_{i-1}, w_i \rangle$. Предположим также, что *столицы* располагаются *в центе* стран-интервалов. Пусть $\mu(A) = x > 0$, $\mu(B) = y > 0$, $\mu(\{\frac{1}{2}\}) = z > 0$, причём эти величины удовлетворяют

$$|x - y| < z \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x+z} < \frac{1}{y} \;\; \& \;\; \frac{1}{y+z} < \frac{1}{x}.$$

Тогда можно показать, что деление на (две) страны вида $[0, \frac{1}{2}\rangle$, $\langle \frac{1}{2}, 1]$ невозможно. Однако возможно *часть* $0 < \alpha < 1$ населения города $\{\frac{1}{2}\}$ отнести к левой стране, а другую часть $0 < 1 - \alpha < 1$ — к правой. Действительно, из условия равенства издержек у жителей города, принадлежащих разным юрисдикциям, имеем:

$$\frac{1}{x + \alpha z} = \frac{1}{y + (1-\alpha)z} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha z = y - x + z > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{y - x + z}{2z} < 1. \qquad (3)$$

Значит, если доля α жителей города имеет «левую» юрисдикцию, а прочие — «правую», то ни у кого из них не будет стимула менять гражданство.

Более того, если, например, население *равномерно* распределено на интервалах $[0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1]$ (плотность тождественно равная $2x$ в первом случае и $2y$ — во втором), то нетрудно указать условия, при которых другого миграционно устойчивого деления отрезка на две страны не существует. С этой целью рассмотрим динамику изменения затрат у граничного индивидуума. Для $0 < t < \frac{1}{2}$ имеем «страны» $[0, t\rangle$, $\langle t, 1]$ и издержки:

$$c_1(t, 0, t) = \frac{g}{2xt} + \frac{t}{2}, \quad c_2(t, t, 1) = \frac{g}{y + z + 2x(\frac{1}{2} - t)} + \frac{1-t}{2} < \frac{g}{y+z} + \frac{1-t}{2} \quad \Longrightarrow$$

$$c_1(t, 0, t) - c_2(t, t, 1) > \frac{g}{2xt} + t - \frac{1}{2} - \frac{g}{y+z} = f(t).$$

[4] Напомню, что борелевская σ-алгебра задаётся топологией, т. е. структурой открытых подмножеств. Далее с ними проделываются теоретико-множественные операции, причём в счётном числе раз, получая разные (и только такие) элементы алгебры. Важно, что относительно борелевской σ-алгебры каждая непрерывная функция измерима (т. е. интегрируемая).

Здесь $f(\frac{1}{2}) > 0$ и $\lim_{t\to+0} f(t) = +\infty$. Имеем также $f'(t) = 1 - \frac{g}{2xt^2} < 0$ при $x < 2g$, откуда можно заключить $f(t) > 0$, $t \in (0, \frac{1}{2}]$. Значит, в интервале $(0, \frac{1}{2})$ разделяющая страны граница появиться не может. Подобным образом при $y < 2g$ не может быть межстрановой границы в интервале $(\frac{1}{2}, 1)$.

На этом же примере можно увидеть, что при определённых обстоятельствах могут появиться страны нулевого размера при *ненулевой* массе. Действительно, пусть стоит задача деления на *три* страны. Теперь 1-я и 3-я страны включают в себя отрезки $[0, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, 1]$ соответственно и части населения города $\{\frac{1}{2}\}$, оставшееся население которого образует 2-ю страну. Найти такого рода деление можно таким образом.

Если из рассмотрения временно исключить 2-ю страну вместе со всем её населением, то мы получим уже известное нам деление (3), где будем считать, что население «редуцированного» города составляет величину z'. Имеем: в первую страну включено население $\mu([0, \frac{1}{2})) + \alpha z' = x + \alpha z'$ и аналогично для третьей страны — $y + (1-\alpha)z'$, где $\alpha = \frac{y-x+z'}{2z'}$. Далее численность (массу) населения 2-й страны z'' можно найти из условия равенства издержек у городского жителя *не включённого* в страны 1, 3 (они составляют население 2-й страны) и издержек у горожанина из (например) первой страны. Имеем:

$$\frac{g}{x+\alpha z'} + \frac{1}{4} = \frac{g}{z''} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{x+y+z'} + \frac{1}{4g} = \frac{1}{z''},$$

откуда находим общее число z жителей города $\{\frac{1}{2}\}$, это $z = z' + z''$. Например, при $g = \frac{1}{2}$, $x = y = 1$, $z' = 2$ должно быть $z'' = 1$ и, следовательно, $z = 3$. Таким образом, в этом случае треть жителей города находится в юрисдикции первой страны, треть в третьей и оставшаяся треть образует самостоятельную свободную страну.

Аналогично случаю двух стран можно найти условия, при которых для трёхстранового деления *всегда* образуется страна-город. Например, проанализируем такой вариант деления на страны: $[0, t')$, $\langle t', t\rangle$ и $\langle t, 1]$, где $t < \frac{1}{2}$, т. е. город полностью включается в третью страну. Так как столицы в центре, то издержки граничного жителя в точке t равны издержкам потребителя в точке t', которые можно вычислить как полусумму издержек первой и второй страны[5]:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{g}{2xt'} + \frac{t'}{2} + \frac{g}{2x(t-t')} + \frac{t-t'}{2}\right] \geq \frac{g}{xt} + \frac{t}{4}.$$

Найдём условия, при которых издержки жителя 3-й страны в точке t меньше величины из правой части неравенства. После несложных преобразований заключаем, что достаточно получить

$$f(t) = \frac{g}{xt} + \frac{3t}{4} > \frac{g}{x+z+y-2tx} + \frac{1}{2}.$$

Здесь правая функция возрастает по t и, если левая будет убывать ($f'(t) < 0$), то достаточно будет иметь нужное неравенство в точке $t = \frac{1}{2}$; условия сводятся к

$$\frac{2g}{x} > \frac{3}{8} \quad \& \quad \frac{2g}{x} + \frac{3}{8} > \frac{g}{z+y} + \frac{1}{2}.$$

Если $z + y \geq 4g$, то они приводятся к $\frac{g}{x} > \frac{3}{16}$. Например, все требования будут выполнены при $z = 3$, $x = y = g = 1$.

[5]Применяем $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ $\forall a > 0$, $b > 0$.

Подобным образом анализируются и остальные случаи. Содержательный ответ такой: страна нулевой длины появится с необходимостью, если город достаточно большой массы. □

В последующем анализе нам потребуются некоторые функциональные пространства и топологии, уместные в постановке общего случая. Действительно, меры Радона образуют симплекс в пространстве $ca([0,1])$ — это пространство всех счётно аддитивных (**c**ountably **a**dditive) мер, заданных на борелевской σ-алгебре на $[0,1]$. В свою очередь $ca([0,1])$ изоморфно пространству всех линейных непрерывных функционалов над пространством непрерывных функций $C([0,1])$, рассмотренных с топологией нормы максимум (равномерная сходимость). Значение функционала φ_μ, ассоциированного с мерой μ, задаётся формулой

$$\varphi_\mu(f) = \int f(x)d\mu(x), \quad f \in C([0,1]).$$

Таким образом, мы вправе написать $[C([0,1])]' = ca([0,1])$ и рассмотреть двойственность (duality or pairing) $\langle C([0,1]), ca([0,1])\rangle$, в которой билинейное отображение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (скалярное произведение) задаётся формулой

$$\langle f,\mu\rangle = \int f(x)d\mu(x), \quad f \in C([0,1]), \quad \mu \in ca([0,1]).$$

Для двойственности принято рассматривать и изучать разные индуцированные ею топологии; важнейшими в их числе являются слабые топологии. Слабая топология может быть задана на исходном пространстве (здесь это $C([0,1])$) или сопряжённом (сейчас $ca([0,1])$), — в таком случае часто говорят, что это *слабая со звездой*. По определению слабая топология это такая слабейшая локально выпуклая топология, при которой непрерывны только функционалы из второго элемента дуальности. В нашем случае $\sigma(C([0,1]), ca([0,1]))$ — слабая топология (по традиции обозначается σ) на $C([0,1])$, заданная пространством $ca([0,1])$. Слабая со звездой $\sigma^*(ca([0,1]), C([0,1]))$ задаётся на $ca([0,1])$ и определяется через $C([0,1])$. Слабым топологиям можно дать несколько характеризаций, полезных в разных случаях — например, в терминах элементов фильтра окрестностей нуля или его базы. Весьма удобной является характеризация в терминах сходимости (направленного семейства или сети). Приведём далее такую характеризацию для $\sigma^*(ca([0,1]), C([0,1]))$:

$$\mu_\xi \underset{\xi\in\Xi}{\longrightarrow} \mu \quad \iff \quad \forall g \in C([0,1]), \quad \int g(x)d\mu_\xi(x) \underset{\xi\in\Xi}{\longrightarrow} \int g(x)d\mu(x). \tag{4}$$

Из данного определения (и ему подобных) становится понятно, почему слабые топологии зачастую называют топологиями поточечной сходимости.

Общий случай распределения популяции на отрезке анализируется через предельный переход для уже доказанного случая с непрерывной плотностью, т. е. я хочу, чтобы нашлось семейство $f_\xi \in C([0,1])$ такое, что для мер $\mu(f_\xi) = \mu_\xi$, заданных по формуле

$$\mu_\xi(B) = \int_B f_\xi(x)dx, \quad B \in \mathcal{B}, \tag{5}$$

мы бы имели $\mu_\xi \underset{\xi\in\Xi}{\longrightarrow} \mu$. Главное здесь это понять в каком смысле сходится семейство и установить его существование. Утверждается, что нужно взять слабую со звездой топологию $\sigma^*(ca([0,1]), C([0,1]))$, тогда пространство $C([0,1])$ будет плотно в $ca([0,1])$, т. е. его замыкание в σ^* даёт все $ca([0,1])$, а значит любую наперёд заданную меру можно будет реализовать как предел мер с непрерывной плотностью (это должен быть какой-то известный классический факт). Ниже приводится (оригинальное) короткое доказательство — тем более, что на самом деле требуется немного другое: нам нужно чтобы каждую *неотрицательную* меру можно было реализовать как предел мер с *положительными* непрерывными плотностями.

Лемма 1. *В слабой со звездой топологии $\sigma^*(ca([0,1]), C([0,1]))$ множество $K \subset ca([0,1])$ всех мер с **положительными** непрерывными плотностями плотно в $ca_+([0,1])$ — в конусе неотрицательных элементов пространства $ca([0,1])$.*

Доказательство. Рассмотрим замыкание K в $\sigma^*(ca([0,1]), C([0,1]))$, которое обозначим $\mathrm{cl}^*(K)$. Ясно, что $\mathrm{cl}^*(K) \subseteq ca_+([0,1])$ и при этом является выпуклым, слабо-звёздно замкнутым конусом. Предположим утверждение леммы неверно. Возьмём $\nu \in ca_+([0,1]) \setminus \mathrm{cl}^*(K)$. Мы находимся в условиях 2-й классической теоремы отделимости (строгая разделимость замкнутых выпуклых множеств, одно из которых компактно) и можем найти линейный функционал G, непрерывный в топологии слабой со звездой, строго отделяющий ν от $\mathrm{cl}^*(K)$, т. е.

$$\exists\, \gamma \in \mathbb{R}: \quad G(\mathrm{cl}^*(K)) \geq \gamma > G(\nu). \tag{6}$$

Далее в отношении разделяющего функционала можно сделать следующие выводы:

(i) Так как функционал непрерывен в слабой со звездой топологии, то он должен задаваться некоторой непрерывной функцией $g \in C([0,1])$ по формуле

$$G(\mu) = \int g(x) d\mu(x), \quad \mu \in ca([0,1]).$$

(ii) Так как $G(\mathrm{cl}^*(K)) \geq \gamma$, то (от противного, K — конус) стандартно заключаем

$$G(\mathrm{cl}^*(K)) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int g(x)h(x)dx \geq 0 \ \forall h \in C_+([0,1]) \quad \Rightarrow \quad g(x) \geq 0 \ \forall x \in [0,1].$$

(iii) Из (ii) и $\nu \geq 0$ заключаем $\int g(x)d\nu(x) \geq 0$, откуда из правой части (6) следует $\gamma \geq 0$.

Наконец, так как $0 \in \mathrm{cl}^*(K)$, то левое неравенство в (6) позволяет заключить $\gamma \leq 0$, что совместно с (iii) даёт $\gamma = 0$. Однако при $\nu \geq 0$ и $\gamma \geq \int g(x)d\nu(x) \geq 0$ отсюда следует $0 = \gamma = G(\nu)$, что противоречит (6). □

Итак, доказано существование семейства мер μ_ξ с положительной непрерывной плотностью f_ξ, $\xi \in \Xi$ слабо-звёздно сходящиеся к μ, т. е. удовлетворяют (5) и (4). Этому семейству соответствует два семейства точек из стандартного симплекса, это $\mathbf{x}^\xi = (x_1^\xi, x_2^\xi, \ldots, x_n^\xi) \in \Delta^{(n-1)}$ и $\delta^\xi = (\delta_1^\xi, \delta_2^\xi, \ldots, \delta_n^\xi) \in \Delta^{(n-1)}$. В силу компактности можно считать эти семейства сходящимися, т. е. имеем

$$(\mu_\xi, \mathbf{x}^\xi, \delta^\xi) \underset{\xi \in \Xi}{\longrightarrow} (\mu, \mathbf{x}, \delta) \in ca_+([0,1]) \times \Delta^{(n-1)} \times \Delta^{(n-1)}.$$

Здесь нужно указать на тот факт, что, в отличии от плотности, равномерно отделённой от нуля, найденные векторы $\mathbf{x}$ и δ могут иметь нулевые компоненты, что означает существование стран с нулевым населением или нулевого размера (страна-город, как полисы в древней Греции).

Далее, конечно, нужно доказать, что тройка (μ, x, δ) определяет искомое разбиение на страны. Напомню, что наличие у меры μ производной по мере Лебега не предполагалась, т. е. мера не обязана быть абсолютно непрерывной относительно меры Лебега (теорема Радона — Никодима). Однако при этом всегда имеет место *разложение Лебега* борелевской меры в сумму непрерывной, точечной и сингулярной мер. В контексте модели нас интересует случай когда распределение жителей описывается как сумма непрерывной и дискретной (точечной) мер, т. е. $\mu = \vartheta + \nu$, где для некоторой измеримой по Лебегу функции $h : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ выполнено

$$\vartheta(B) = \int_B h(x)dx, \quad B \in \mathcal{B},$$

и для счётного семейства попарно различных точек $y_k \in [0, 1]$ имеет место

$$\nu(\{y_k\}) > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \nu(B) = \sum_{k: y_k \in B} \nu(\{y_k\}), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Таким образом, все население отрезка делится на две части — деревенскую, как-то примерно равномерно-непрерывно распределённую на отрезке — и городское население, распределённое по не более чем счётному числу точек — население k-го города составляет величину $\mu(\{y_k\}) > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Однако какому разбиению на страны соответствует полученный предел?

Рассмотрим предельную тройку $(\mu, \mathbf{x}, \delta)$, которой при $w_0 = 0$, $w_n = 1$ соответствует вектор $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, разбивающий отрезок $[0, 1]$ на сегменты по правилу:

$$[0, w_1\rangle, w_1 = x_1; \ \langle w_1, w_2\rangle, w_2 = x_1 + x_2; \ \ldots \langle w_{n-1}, w_n\rangle, \ w_{n-1} = x_1 + \cdots + x_{n-1}, \quad w_n = 1.$$

При этом затраты жителя i-й страны $t \in \langle w_{i-1}, w_i\rangle = S_i$ в непрерывном случае (до предельного перехода) составляли величину

$$c_i(t, \mathbf{x}, \delta) = c_i(t, \mathbf{x}, \upsilon(\langle w_0, w_1\rangle), \ldots, \upsilon(\langle w_{n-1}, w_n\rangle)).$$

Здесь $\upsilon(\cdot)$ это некоторая мера, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега — поэтому неважно какие из концов промежутка $\langle w_{i-1}, w_i\rangle$ включены в страну, а какие нет — в общем случае это, конечно, не так. На этапе предельного перехода имеем $\upsilon = \mu_\xi$, $\mu_\xi(\langle w_{i-1}^\xi, w_i^\xi\rangle) = \delta_i^\xi$. В точках $(\mu_\xi, \mathbf{x}^\xi, \delta^\xi)$, по которым осуществлялся предельный переход, были выполнены следующие свойства:

$$c_i(w_i^\xi, \mathbf{x}^\xi, \delta^\xi) = c_{i+1}(w_i^\xi, \mathbf{x}^\xi, \delta^\xi).$$

В силу предположения (**C**) в равенствах можно будет перейти к пределу если заметить, что никакой из $\delta_i^\xi = \mu_\xi(\langle w_{i-1}^\xi, w_i^\xi\rangle)$ стремиться к нулю не может. Но это действительно имеет место: предполагая противное возьмём две соседние страны такие, что мера одной из них стремится к нулю, а мера другой в пределе отлична от нуля. Такая пара найдётся, ибо меры всех стран стремиться к нулю не могут, т. к. их сумма равна единице. Но теперь для достаточно больших ξ в данной паре стран нарушается условие миграционной состоятельности — в силу (**C**) затраты одной из стран в пограничной точке стремятся к бесконечности, а у другой — к конечному значению. Таким образом доказано, что все компоненты вектора $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ строго больше нуля и имеют место равенства

$$c_i(w_i, \mathbf{x}, \delta) = c_{i+1}(w_i, \mathbf{x}, \delta), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Далее нужно провести корректное разбиение отрезка на страны-промежутки. Здесь будет полезна следующая лемма.

Лемма 2. *Предельная тройка* $(\mu, \mathbf{x}, \delta)$ *удовлетворяет неравенствам*[6]:

$$\mu([0, w_i]) \geq \delta_1 + \cdots + \delta_i \geq \mu([0, w_i)), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно малая действительная величина. Фиксируем i и рассмотрим две функции, заданные по формулам:

$$\alpha_\varepsilon(y) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad 0 \leq y \leq w_i - 2\varepsilon, \\ 1 - \frac{y - w_i + 2\varepsilon}{\varepsilon}, & \text{при} \quad w_i - 2\varepsilon \leq y \leq w_i - \varepsilon, \\ 0, & \text{при} \quad y \geq w_i - \varepsilon, \end{cases}$$

$$\beta_\varepsilon(y) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad 0 \leq y \leq w_i + \varepsilon, \\ 1 - \frac{y - w_i - \varepsilon}{\varepsilon}, & \text{при} \quad w_i + \varepsilon \leq y \leq w_i + 2\varepsilon, \\ 0, & \text{при} \quad y \geq w_i + 2\varepsilon. \end{cases}$$

По построению для достаточно больших ξ имеем

$$\alpha_\varepsilon(\cdot) \leq \chi([0, w_i^\xi))(\cdot) \leq \chi([0, w_i^\xi])(\cdot) \leq \beta_\varepsilon(\cdot),$$

где $\chi([0, w_i^\xi])$ характеристическая (индикаторная) функция множества $[0, w_i^\xi]$. Отсюда получаем

$$\int \alpha_\varepsilon(\cdot) d\mu_\xi \leq \mu_\xi([0, w_i^\xi)) = \sum_{j=1}^{i} \delta_{\xi j} \leq \int \beta_\varepsilon(\cdot) d\mu_\xi,$$

откуда, переходя к пределу по ξ для каждого $\varepsilon > 0$ и затем по $\varepsilon \to 0$, в силу слабо-звёздной сходимости мер имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int \alpha_\varepsilon(\cdot) d\mu \leq \sum_{j=1}^{i} \delta_j \leq \lim_{\varepsilon \to 0+} \int \beta_\varepsilon(\cdot) d\mu.$$

Кроме того, имеем

$$\sup_{\varepsilon > 0} \alpha_\varepsilon(\cdot) = \chi([0, w_i))(\cdot) \leq \chi([0, w_i])(\cdot) = \inf_{\varepsilon > 0} \beta_\varepsilon(\cdot),$$

[6] В неравенстве справа стоит мера полуоткрытого интервала, а слева — замкнутого, т. е. разница между множествами в одну точку w_i.

откуда заключаем[7]

$$\mu([0,w_i)) = \sup_{\varepsilon>0}\int \alpha_\varepsilon(\cdot)d\mu \le \sum_{j=1}^{i}\delta_j \le \inf_{\varepsilon>0}\int \beta_\varepsilon(\cdot)d\mu = \mu([0,w_i]).$$

□

В силу леммы 2 можно реализовать следующую процедуру построения по-странового разбиения отрезка $[0,1]$:

(i) Имеем: $\mu([0,w_1)) \le \delta_1 \le \mu([0,w_1]) = \mu([0,w_1)) + \mu(\{w_1\})$. Значит, найдётся $0 \le \beta_1 \le 1$ такой, что

$$\delta_1 = \mu([0,w_1)) + \beta_1 \cdot \mu(\{w_1\}).$$

(ii) Имеем: $\mu([0,w_2)) \le \delta_1 + \delta_2 \le \mu([0,w_2]) = \mu([0,w_2)) + \mu(\{w_2\})$. Значит, для $0 \le \alpha_2 = 1-\beta_1 \le 1$ найдётся $0 \le \beta_2 \le 1$ такой, что

$$\delta_2 = \alpha_2 \cdot \mu(\{w_1\}) + \mu((w_1,w_2)) + \beta_2 \cdot \mu(\{w_2\}),$$

и т. д. Таким образом, i-я страна является государством, включающем в себя всех жителей из (w_{i-1},w_i), а также долю α_i жителей из города $\{w_{i-1}\}$ и долю β_i жителей города $\{w_i\}$, где $\alpha_1 = \beta_n = 1$.

Что всё это означает применительно к нашей теме? Дело в том, что в мире, соответствующем тройке $(\mu,\mathbf{x},\delta)$, могут появится страны нулевого размера при ненулевой массе, причём эти страны (частично или все) могут концентрироваться в одной точке — например, это случай, когда в векторе $\mathbf{x}$ появляются смежные нули, а в векторе δ эти компоненты строго больше нуля. Что тогда происходит? Во-первых, мера данной точки w может быть положительная ($y_k = w_i = w$ для некоторых k,i), а это означает, что живущий в этой точке народ мог распределится, как минимум, по 4-м государствам: двум это те, номера которых соответствуют нулям, и также их соседи... Формальный численный пример был приведён выше, а примеры из жизни перед глазами — Иерусалим, Ватикан, Сан-Марино и другие карликовые государства. В итоге доказана следующая

Теорема 2. *Пусть функции затрат удовлетворяют предположению* (**C**) *и распределение популяции задаётся мерой Радона, представленной как сумма непрерывной и дискретной мер. Тогда существует иммиграционно состоятельное разбиение отрезка* $[0,1]$ *на любое заданное число стран.*

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 условие* $\mathrm{supp}(\mu) = [0,1]$ *может быть опущено.*

Итак, резюмируем: в по-страновом разбиении интервалы могут быть нулевой длины и с дробными концами — если конец интервала попал в носитель ν. Доля в крайней точке интервала указывает на часть живущего в этой точке населения, попадающую под юрисдикцию данной страны. Далее естественным образом осуществляется надлежащая модернизация понятия иммиграционно-состоятельного деления на страны с учётом дробных концов, нулевого размера и проч. Эту рутинную работу я оставляю читателю.

[7] Здесь используется такое свойство интеграла как порядковая непрерывность: если семейство функций сходится к функции по отношению порядка (монотонно возрастает или убывает), то и значения интегралов будут сходится.

Заключение

В работе была доказана теорема существования нетривиального иммиграционно состоятельного разбиения отрезка $[0, 1]$ на страны-интервалы для распределения жителей, заданного мерой, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. Затем этот результат был обобщён на случай меры Радона, представленной как сумма непрерывной и дискретной (точечной) мер, что корректно описывает распределение деревенской и городской части популяции. Таким образом, задача стабильного по-странового деления одномерной области полностью решена.

А дальше я хочу предложить ещё одну идею — почему бы не освободить параметр числа стран? Возможно, в затраты индивидов надо внести также расходы на всемирное правительство (ООН?), или что-то типа дипломатических издержек. Наверное и здесь всё можно доказать путём предельного перехода...

Список литературы

1. *Alesina A., Spolaore E.* On the number and size of nations // Quarterly Journal of Economics. 1997. Vol. 113. P. 1027–1056.

2. *Tiebout C. M.* A Pure theory of local expenditures // The Journal of Political Economy. 1956. Vol. 64. P. 416–424.

3. *Le Breton M., Musatov M., Savvateev A., Weber S.* Rethinking Alesina and Spolaore's "uni-dimensional world": existence of migration proof country structures for arbitrary distributed populations // Proceedings of XI International Academic Conference on Economic and Social Development. Moscow, 6 – 8 April 2010: University — Higher School of Economics.

4. *Маракулин В. М.* Существование иммиграционно состоятельного деления на страны // Новосибирск. 2014. 12 с. (Препринт/РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 292)

5. *Marakulin V. M.* On the existence of immigration proof partition into countries in multidimensional space // LNCS (Lecture Notes in Computer Sciences) / Eds. Kochetov, Yu. et al. DOOR-2016. Vol. 9869. Heidelberg: Springer. 2016. P. 494–508.
DOI: 10.1007/978-3-319-44914-2 39

6. *Savvateev A., Sorokin C., Weber S.* Multidimensional free–mobility equilibrium: Tiebout revisited // mimeo. 2016. 23 p.

Материал поступил в редколлегию 04.04.2016

Адрес автора

МАРАКУЛИН Валерий Михайлович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090 **e-mail: marakulv@gmail.com**

Новосибирский государственный университет ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090,