Модели экономики с дифференцированной информацией: договорной подход

В. М. Маракулин

Научный доклад № 10/02E

Проект (R08-1181) реализован при поддержке

Консорциума экономических исследований и образования

Доклад публикуется в рамках направления

Предприятия и рынки

Классификация JEL: C 62, D 51

МАРАКУЛИН В.М. Модели экономики с дифференцированной информацией: договорной подход. — Киев: EERC, 2010. — 81 с.

Исследуются модели экономики с дифференцированной информацией в рамках договорного подхода, развитого автором в серии предыдущих работ. Ключевая идея этого подхода состоит в замене исследования итогового распределения ресурсов на изучении (разного рода) стабильных сетей бартерных контрактов, реализующих это распределение. Это позволило прояснить основные равновесные понятия DIE-экономики, вычленить наиболее значимые понятия ядра и доминирования и установить их надлежащее соответствие с вальрасовским равновесием в ожиданиях (WEE) и равновесием в рациональных ожиданиях (REE). На этом пути появляется ряд новых понятий доминирования и ядра, и соответствующие им понятия равновесия: ядро и равновесие с дифференцированными агентами (соответствует условно-ожидаемой полезности), интерим ядро и равновесие. Последнее проясняет концепцию REE-равновесия, выявляет соответствующее ему ядро и тип стабильности. Доказан ряд новых теорем существования ядра и квазиравновесия.

Ключевые слова и фразы: дифференцированная информация, договорной подход, WEE — вальрасовское равновесие в ожиданиях, REE — равновесие в рациональных ожиданиях.

Благодарности. Автор признателен экспертам EERC, особенно Рою Гарднеру и Ричарду Эриксону, за плодотворные обсуждения и предложения, указание на источники литературы и глубокое понимание проблематики.

Результаты данной работы в значительной части были получены во время моей стажировки в 2009 г. в Европейском Университетском Институте (EUI), Флоренция, Италия. Я благодарен ЕУИ и особенно факультету экономики за гостеприимство и созидательную атмосферу, которые помогли в работе над проектом.

Валерий Михайлович Маракулин
Институт математики им. Соболева, Сибирское отделение РАН
Ведущий научный сотрудник
630090 Новосибирск, проспект академика Коптюга, 4.
Тел.: +7(383) 363 46 09
Факс: +7(383) 333 25 98
E-mail: marakul@math.nsc.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ И ВЫВОДЫ

Настоящая работа носит чисто теоретический характер, предметом её анализа служит фундаментальный вопрос о том как функционируют рынки в условиях несимметрично распределённой информации, какие стабильные режимы (равновесие, ядро) имеются и представляют наибольший теоретический интерес. Анализ проводится с помощью договорного подхода, — это новый авторский метод, способный корректно описывать поведение экономических агентов в неравновесной ситуации.

Совершенно очевидно, что информация играет большую роль в функционировании сколь-нибудь эффективной экономической системы; она также занимает важное место в экономическом анализе. В частности, велика роль информационной составляющей и в распределении ресурсов среди экономических агентов. При всем при этом в современной экономической науке всё ещё не сложилось полноценной теоретической модели, надлежащим образом учитывающей тот факт, что участники экономики принимают решения в условиях дефицита информации и, при этом, они несимметрично информированы о состояниях мира. В настоящий момент в теории имеется довольно пестрый модельного ряд разных подходов, конкурирующих между собой концепций ядра (стабильность к коалиционным угрозам) и равновесия. Тот факт, что в реальной экономической системе распределение ресурсов является итогом множества сделок обмена между группами экономических агентов (коалициями) остаётся без внимания. Причём не каждая сделка (обмен) осуществима в реальной экономике, чему может быть множество причин, одной из наиболее значимых является информационная. Информация в данном контексте означает способность индивидов различать будущие природные события, что моделируется как разбиение пространства элементарных событий. Эта способность индивидов различать события (неразличимы события, попавшие в общий элемент разбиения) по разному учитывается в разных теоретических конструкциях и, более того, в модели так же как и в жизни, информация может трансформироваться: возможен обмен информацией или её утрата... Разобраться в ситуации помогает договорной подход, в рамках которого допустимыми могут являться только такие (бартерные) контракты, которые измеримы относительно индивидуальной информации, т. е. это те меновые сделки, в которых каждая сторона сделки ясно понимает свои задачи и учитывает информационные возможности выполнения взятых обязательств. Сумма заключённых между агентами контрактов, образующих сеть договоров, реализует итоговое распределение ресурсов. При этом устойчивость этого распределения в рамках договорного подхода означает устойчивость всей сети договоров: никто не хочет рвать (полностью, частично и т. д.) заключённые договоры и никакая группа не заинтересована в заключении новых договоров. Именно корректный анализ полученных таким образом стабильных распределений, проведённый с учётом информационных возможностей, и приводит к рассмотрению и выделению среди прочих наиболее значимых понятий ядра и равновесия; на этом пути появляется также и ряд новых теоретических понятий.

Используя договорной подход удаётся учесть динамику изменения информации в экономической системе. Действительно, вступая в договорные отношения друг с другом, экономические агенты способны обмениваться информацией, при этом информация может накапливаться, а агенты обучаться. Моделируется это с помощью правила обмена информацией, которое вводится в модель и функционирует так, что каждому текущему распределению информации (и распределению ресурсов) правило ставит в соответствие новое информационное распределение. В разных коалициях (группах) могут работать разные правила деления информации и, после многократного применения, эти правила производят так называемую предельную информацию — это информация, которую нельзя улучшить в последующих актах договорного процесса. Таким образом обеспечивается более реалистичный взгляд на концепции ядра и равновесия, нужно просто рассматреть их относительно предельной информации... это лучше отражает действительность.

Другая исследованная возможность — это изучение известных теоретических понятий вальрасовского равновесия в ожиданиях (WEE) и равновесия в рациональных ожиданиях (REE). Впервые эти понятия появляются в работах Раднера конца 60-х и 70-х годов прошлого века и по настоящее время они являются основными теоретическими концепциями равновесия. Вальрасовское равновесие в ожиданиях это просто конкурентное равновесие в модели типа Эрроу — Дебре, в которой предпочтения задаются функциями ожидаемой полезности. Равновесие в рациональных ожиданиях это конкурентное равновесие, найденное относительно условных ожидаемых полезностей, условных относительно каждого из возможно реализованного природой элементарного события. Таким образом здесь имеется множественность бюджетных ограничений, разные ограничения соответствуют разным реализациям состояния мира. Кроме того, данная концепция предполагает, что индивиды способны извлекать информацию из распределения цен — ценовой сигнал задаёт распознаваемое каждым из индивидов событие, т. е. это общее знание. Вот только здесь непонятно, откуда собственно появляются цены — никаких покупок и продаж и других экономических действий вне равновесия нет, но господь Бог выдаёт цены равновесия... Этот и многие другие вопросы получают свое разрешение путём применения договорного подхода. Именно, индивиды взаимодействуют в договорном процессе и, столкнувшись с ситуацией где новый взаимовыгодный контракт возможен только в случае информационного обмена, индивиды идут на этот обмен и заключают новый договор. Однако теперь процесс получает своё развитие в рамках новой, обогащённой информационной структуры и т. д., до тех пор, пока не наступит ситуация, когда дальнейший обмен информацией окажется не способным привести к новому взаимовыгодному контракту. Показано, что таким образом может быть реализовано REE: так будет, если агенты могут свободно рвать договоры даже «завтра», накануне их реализации. В то же время, если подписанные «сегодня» договоры рвать «завтра», после реализации случайной величины, будет нельзя, то таким образом будет реализовано приватное равновесие, что почти эквивалентно WEE. Таким образом, привлечение договорного динамического взгляда на предмет позволяет существенно прояснить собственно равновесные концепции, сблизив представления, и улучшив понимания типа их стабильности. Более того, на этом пути удаётся предложить и универсальную концепцию равновесия, это двухстадийное равновесие, которое содержит в себе достоинства обоих равновесных понятий.

1. ВВЕДЕНИЕ

Информация занимает важное место в экономическом анализе: с ней мы сталкиваемся не только тогда, когда говорим о индивидуальном принятии решений, но и тогда, когда идет речь о функционировании рынков или же об экономике в целом. В частности, информация безусловно играет важную роль в распределении ресурсов, реализуемых через систему рынков. Однако в классическом варианте экономического моделирования информационная проблема не рассматривалась. Например, в контексте модели Эрроу — Дебре — Маккензи неявно предполагается, что вся экономическая жизнь протекает как бы в отдельно взятом временном периоде и агенты обладают достаточно полной информацией о значении экономических переменных для принятия собственных рациональных решений, а сделки осуществляются за бесконечно малое время и т. д.[1] (напр., см. Aliprantis et al. (1995)). Однако в реальной жизни участники экономики вынуждены принимать решения в условиях дефицита информации и, при этом, они несимметрично информированы о состояниях мира[2]. Таким образом, информационная асимметрия это реальная черта экономики, не учтенная классической теорией.

Построение моделей и концепций решения (равновесие, ядро и пр.), адекватно учитывающих неполноту и асимметрию в информационном оснащении индивидов, началось в основном во второй половине 70-х годов прошлого века. Здесь информация моделируется как разбиение пространства (будущих) состояний природы, с помощью которого задается пространство контингентных продуктов — продукты, используемые в разных состояниях мира, считаются различными даже если они обладают одинаковыми физическими характеристиками. На этом пространстве протекает вся модельная жизнь — осуществляется торговля и обмены продуктами, а также собственно потребление контингентных благ. Информация, которой обладает индивид, накладывает ограничение на структуру реализуемых контрактов — соответствующее отображение должно быть измеримо относительно индивидуального информационного разбиения пространства возможных состояний природы. В теории появляется ряд новых специфических концепций равновесия — вальрасовское в ожиданиях, равновесие в рациональных ожиданиях и др. Появляются также новые понятия ядра — в зависимости от того, какие гипотезы принимаются в части возможностей по обмену информацией и выработки коллективных решений — в их числе наиболее известны грубое, тонкое и частное ядро. Подробнее модель экономики с дифференцированной информацией, принимаемые в её контексте концепции решения и обзор литературы приводятся в следующих разделах работы.

[1] Известны и расширенные трактовки модели Эрроу — Дебре, допускающие информационное наполнение и асимметрично информированных агентов (напр., см. Radner (1982)), однако их нельзя считать вполне удовлетворительными.

[2] Состоянием мира или природы являются любые факторы, влияющие на экономические показатели, прежде всего на благосостояние.

В данном исследовании предлагается изучение моделей экономики с дифференцированной информацией в рамках договорного подхода, развитого автором в Маракулин (2003, 2006)[3]. Для экономики обмена любой договор это просто *допустимый* обмен продуктами среди потребителей. Договоры можно складывать и любому (конечному) множеству договоров можно сопоставить итоговое распределение продуктов среди экономических агентов — как результат суммирования договоров и «начального» распределения. Предполагается, что достижимые множества (допустимых) договоров — назовём их «*сетями контрактов*» — могут изменятся в течении экономической жизни. Любой экономический агент или их коалиция может *разрывать* контракты в которых он участвует, а коалиция агентов может также *заключать* новые контракты. В теории договоров изучаются стабильные сети, причем это может быть стабильность разного рода, что в первую очередь зависит от допустимых способов разрыва договоров. Это может быть только разрыв контракта *целиком*, либо *частично*, либо допускается *разрыв* договоров из *эквивалентной системы* договоров и проч., возможны также смешанные варианты. При этом разным правилам оперирования с сетями договоров могут отвечать различные типы стабильности сетей и реализуемых ими распределений. Виды этих «стабильностей», совместно со свойством допустимости контрактов из данной сети, отражают различные поведенческие, физические и институциональные принципы, формально заданные в теоретико-игровой форме, которые имеются в реальной жизни и неоклассической экономической теории. Различным видам стабильности соответствуют разные виды *договорного* или *контрактного распределения*, а также их модификации, которые могут ослабить или усилить эту стабильность. Используя договорные распределения того или иного типа и с учётом структуры допустимых контрактов в терминах стабильных сетей можно описать многие хорошо известные в экономической теории понятия. Для стандартной модели обмена (полный рынок) это ядро, конкурентное равновесие, граница Парето и т. д.; для модели неполного рынка в Маракулин (2003) таким способом была введена новая (по мнению автора корректная) концепция ядра.

Настоящее исследование распространяет договорной подход на модель DIE-экономики с дифференцированной информацией. Возможность такого распространения достаточно очевидна, ибо ещё Раднер, один из основоположников теории DIE-экономик, при описании вводимых им понятий равновесия использовал термин «контракт» примерно в том же смысле, как это делает автор проекта, см. Radner (1982). Безусловно, требование *допустимости* договора (контракта) для DIE-экономики должно в себя включать или как-то иначе учитывать требование измеримости продуктовых потоков относительно соответствующего разбиения пространства состояний. Однако это разбиение будет различаться в разных концепциях ядра и равновесия. Более того, в настоящий момент в теории DIE-

[3] В Маракулин (2003) договорной подход использовался для корректного введения ядра в моделях неполного рынка; в Маракулин (2006) была осуществлена попытка обосновать функционирование экономики в неравновесной ситуации с последующим выходом на равновесие.

экономик нет надлежащего соответствия между разными концепциями ядра и равновесия[4], т. е. ситуация отличается от случая полного рынка. Однако используемый в работе договорной подход даёт ясную возможность установить это соответствие: по аналогии со стандартным случаем (Маракулин, 2003) для сетей, реализующих ядерные распределения, нужно дополнительно потребовать их устойчивости относительно частичных разрывов договоров, а затем дать ценовую характеризацию полученных распределений. На этом пути появляются новые концепции равновесия...

2. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В части обзора литературы по моделям равновесия в экономике с дифференцированной информацией в первую очередь укажем на работу Radner (1968), в которой появляется собственно модель экономики с диффенцированной информацией, формулируется надлежащее обобщение понятия вальрасовского равновесия (в ожиданиях — WEE) и доказывается теорема существования. Далее отметим пионерскую работу Вильсона (Wilson, 1978), в которой вводятся такие понятия как грубое (coarse) и тонкое (fine) ядро, изучается несколько интересных и специфических примеров, а также предлагаются оригинальные понятия равновесия (не получившие названия в современной литературе, см. Glycopantis, Yannelis (2004)) — эта работа привлекла внимание экономистов и оказала огромное влияние на развитие экономической теории в контексте моделей с дифференцированной информацией. Нельзя не упомянуть работу Radner (1978), в которой предполагается, что индивиды способны извлекать информацию из распределения цен и вводится важное понятие равновесия в рациональных ожиданиях (REE). Специфика этого понятия в том, что в задаче потребителя максимизируется *условное* ожидание полезности[5] с учётом исходной и дополнительно полученной информации. В последующих исследованиях многих авторов (см. недавние сборники DIE-economies (2004), Economic Theory (2001)) теория информационно-дифференцированной экономики развивалась во многих направлениях, в их числе: разрабатывались и уточнялись разные концепции ядра (см. раздел выше), изучались вопросы существования и соотношения с известными понятиями равновесия, исследовались важные вопросы сравнимости по стимулам[6] (incentive compatibility) и реализуемости (implementation) ядерного распределения как равновесия в некоторой страте-

[4] В частности, известные понятия WEE и REE равновесий подвергаются критике, напр. см. введение в DIE-economies (2004).

[5] Именно в этом состоит принципиальное отличие этой концепции от вальрасовского равновесия в ожиданиях (WEE), введённое в Radner (1968), оно же раднеровское (не путать с REE), см. Radner (1968).

[6] Здесь это отсутствие выявленных мотивов сообщать другим агентам ложное состояние мира — потенциально такая возможность есть, ибо один агент может знать состояние точно (после его реализации), а другие не способны его отличить от (некоторых) других состояний.

гической игре (строится по исходной модели экономики), а также ряд других направлений; наиболее полно литература представлена в DIE-economies (2004), Schwable (1999).

В упомянутой работе Вильсона (Wilson, 1978) появляется (неформализованное) понятие коммуникационной системы — как средства, передающего информацию от одних агентов другим. В последующих работах Аллен (Allen (1991a)–Allen (1994)) оно обобщается и формализуется в виде информационного правила — это отображение, которое трансформирует информацию членов коалиции в форму, которая может быть употребима ими при доминировании текущего распределения ресурсов. Таким образом Аллен формализует наиболее общий способ задания ядра в экономике с информационной асимметрией — применяя разные правила в контексте одной модели (а значит, как следствие, разные требования к измеримости доминирующего распределения) можно получить почти любое из известных понятий ядра (грубое, тонкое, частное и пр.). Швальбе (Schwable, 1999) развивает подход Аллен и вводит понятие *максимальной информации* — это наиболее полная информация, которую экономический агент может получить будучи членом всех возможных коалиций, куда он входит со своей начальной информацией. Именно измеримость относительно максимальной информации полагается им в основу требования, предъявляемого к итоговому распределению ресурсов. В то же время коалиции могут доминировать только так, как это делает Аллен — через внутри-коалиционные распределения, измеримые относительно информации, полученной по правилу из исходной. При этом, однако, у обоих авторов неясно, что собственно происходит с информацией — участвуя в разных коалициях и, казалось бы, добывая новую информацию и формируя с её помощью итоговое распределение, агенты затем всё забывают и начинают искать возможности его доминирования... Есть что-то ущербное в этом взгляде на (внутримодельную) экономическую жизнь. По мнению автора, данный подход не является вполне удовлетворительным. Однако можно ли предложить взамен что-то конструктивное? В экономической теории основной анализ концентрируется на изучении итогового распределения ресурсов, обладающего равновесными свойствами. Однако в реальной жизни и с точки зрения *договорного подхода* это распределение является итогом множества сделок обмена между экономическими агентами. Но ведь при этом идёт и обмен информацией; и далеко не каждая сделка (обмен) осуществима, в том числе, по причине информационного дефицита.

Идея договорного подхода отнюдь не новая в экономической теории и, по-видимому, восходит к классических результатам Эджворта (1881). Контракт (договор) как бартерный обмен продуктами затем появляется и в работах других авторов (хотя теория договоров не получает подробной разработки), в том числе российских: Полтерович (1970) и Макаров (1980, 1982). В работах Козырев (1982, 1981) появляется важное понятие частичного разрыва договоров, что позволило дать альтернативное описание вальрасовского равновесия. Наконец, усилиями автора (Маракулин, 2003, 2006) развились основы теории договоров, которую можно рассматривать как пополнение классических представлений о функционировании рыночной экономики.

С точки зрения автора, договорной подход весьма удобен для моделирования ситуаций с асимметрично информированными агентами. Ясно, что для корректного описания реальных сделок требуется, как минимум, прояснить, какие договоры (контракты) представляется возможным заключить. Сумма заключённых контрактов и исходного распределения дает распределение ресурсов, которое может обладать или не обладать разными свойствами стабильности: в теории договоров изучаются договорные, правильно договорные, совершенно договорные и проч. распределения (Маракулин, 2003), а также приводящие к ним договорные процессы (Маракулин, 2006).

В договорном подходе важную роль играет понятие допустимости контракта, что для модели с асимметричной информацией должно в себя включать требование измеримости, которая задаётся распределением информации среди экономических агентов. Кроме того, договорной подход предполагает определённую динамику процессов обмена, при этом может происходить и обмен информацией. Представляется, что распределение информации в экономической среде неоднородно, не статично и изменяется с течением времени в ходе экономического взаимодействия между агентами. Однако что может служить результатом информационных обменов? По нашему мнению это может быть так называемая *предельная информация*, введённая автором в Маракулин (2009).

Формально, предельная информация это итог информационного обмена, реализованного цепочкой экономического взаимодействия индивидов в рамках внутри-коалиционного бартерного обмена продуктами и параллельно идущего обмена информацией. На примерах показано, что в общем случае разные «цепочки» могут приводить к разному распределению информации, которая неулучшаема в результате последующих меновых операций. В Маракулин (2009) доказано, что для *монотонного* правила *деления информации* предельная информация единственна и, значит, в этом случае концепция становится корректной и может эффективно применяться при исследовании DIE-экономики.

3. МОДЕЛЬ ЭКОНОМИКИ С АСИММЕТРИЧНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

В данном разделе описывается простейшая модель экономики с дифференцированной (асимметричной) информацией, в рамках которой возможно рассмотреть некоторые ключевые вопросы экономической теории: понятие и проблема существования равновесий, а также проблема корректного определения ядра и его имплементация (реализация) в виде Нэшевского равновесия совершенного в подыграх.

В экономической литературе информация рассматривалась с двух точек зрения. С одной стороны, информация наделена определенными свойствами товара (в обычном, физическом смысле) и, тем самым, похожа на другие товары: она может быть обменена, куплена или продана на соответствующих рынках информации. С другой стороны, информацию, которой располагает агент, можно рассматривать как характеристику этого агента, аналогичную начальному запасу товаров и отношению предпочтения. Ниже описана модель, в которой принимается во внимание оба аспекта информации одновременно, однако все-таки здесь информация это скорее характеристика агентов нежели товар. Описание модели проводится в соответствии с терминологией, использованной в Schwable (1999) и DIE-economies (2004), где представлен современный взгляд на проблематику.

3.1. Агенты и их информация

Рассмотрим экономику обмена с конечным множеством агентов $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Специфической чертой модели является явным образом введённая информация о состояниях мира (природы), которой обладают агенты, причём в общем случае у разных агентов эта информация различна и может изменяться в процессе их экономической деятельности.

Информация моделируется следующим образом. Рассмотрим измеримое пространство $(\Omega, P(\Omega))$ событий природы и предположим для простоты, что множество Ω *конечно*. Элементы $\omega \in \Omega$ называются состояниями природы (мира), а также элементарными событиями. Здесь $P(\Omega)$ это некоторое разбиение[7] множества Ω (в общем случае на Ω нужно рассматривать алгебру подмножеств-событий). Разбиение P_i характеризует информацию агента $i \in \mathcal{I}$. Содержательно, если элемент разбиения состоит из нескольких состояний природы, то это означает, что агент *не способен различать* эти состояния. Таким способом описывается способность агента различать события.

Пусть $P_i(\omega)$ это элемент разбиения P_i, который содержит состояние $\omega \in \Omega$. Говорят, что информация P *лучше (тоньше)* информации P', если каждый элемент P является подмножеством некоторого элемента P', то есть $P(\omega) \subseteq P'(\omega), \forall\, \omega \in \Omega$. Содержательно, одна информация тоньше другой, если она способна лучше различать элементарные состояния природы. На множестве всех информационных разбиений Ω отношение «*тоньше*» является отношением частичного порядка и обозначается как

$$P \succeq P' \iff P \ \ \textbf{\textit{тоньше}} \ \ P',$$

при этом на отношение $\succeq$ наводит структуру решётки, т. е. для любого конечного набора разбиений существует супремум и инфимум.

Упорядоченный набор (кортеж) индивидуализированных разбиений $\mathbb{P} = (P_i)_{i \in \mathcal{I}}$ называется ***информационной структурой экономики***.

Отношение $\succeq$, заданное на информационных разбиениях, индуцирует отношение частич-

[7] *Разбиением* множества называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств, объединение которых даёт всё множество.

ного порядка на множестве всех информационных структур, заданное по правилу:

$$\mathbb{P} \succeq \mathbb{P}' \iff P_i \succeq P_i', \ \ \forall\, i \in \mathcal{I}.$$

Отношение $\succeq$ применяется и для коалиционных информационных структур — для сравнения разных информационных оснащений некоторой коалиции.

Напомним некоторые известные определения (напр., см. Schwable (1999)):

*Информационное разбиение P_i агента i называется **совершенным** или **полным**, если состоит только из одноэлементных подмножеств Ω. Информационная структура экономики называется **совершенной**, если информация каждого агента совершенна.*

*Информационная структура $(P_i)_{i\in\mathcal{I}}$ называется **асимметричной**, если $P_i \neq P_j$ для некоторых $i, j \in \mathcal{I}$, $i \neq j$.*

3.2. Товары, агенты и потребительские планы

Пусть в экономике имеется l физически различных продуктов (товаров). Таким образом, пространство физических продуктов это l-мерное евклидово пространство $E = \mathbb{R}^l$. При реализации разных событий индивиды могут потреблять разные наборы физических (контингентных) продуктов. Пространство контингентных продуктов это $L = (\mathbb{R}^l)^\Omega = \mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^l)$ — множество всех отображений из пространства элементарных событий Ω в $\mathbb{R}^l$.

Пусть P некоторое разбиение Ω. Функция f с областью определения Ω называется *P-измеримой*, если она является постоянной[8] на элементах разбиения P. Для разбиения P введем множество

$$\mathbf{Map}_P(\Omega, \mathbb{R}^l) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}^l \mid f|_{P(\omega)} = const\} = \mathcal{L}_P,$$

это подпространство $\mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^l)$ всех P-измеримых отображений. Именно пространство $\mathbf{Map}_P(\Omega, \mathbb{R}^l)$ при $P = P_i$ является множеством *информационно допустимых* потребительских наборов индивида i, и в этом состоит принципиальная особенность экономики с дифференцированной информацией.

Информация может рассматривается как составная часть продуктового набора. При этом неопределенность моделируется следующим образом: товар, кроме места и времени, в котором он потребляется, определяется также состоянием природы (мира). Так как физические товары рассматриваются в своей взаимосвязи с состояниями мира, естественно постулировать, что пространство допустимых товаров зависит от информации. В этой связи возникает *обобщенное пространство товаров* $\mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^l) \times P^*$, где P^* это множество всех разбиений. В этом пространстве товары представлены упорядоченной парой,

[8] Для конечной алгебры событий это определение эквивалентно стандартному.

компонентами которой являются набор (вектор) физических контингентных товаров и информация. Таким образом, информация включается в определение товара.

Каждый участник $i \in \mathcal{I}$ характеризуется начальным запасом $(e_i, P_i^0) \in \mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^l) \times P^*$, где $e_i \in \mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^l)$ обозначает начальные запасы возможных товаров агента i, а P_i^0 — начальный запас информации (разбиение Ω). Для простоты будем предполагать, что индивиды способны потреблять физические продукты только в неотрицательных количествах и, при этом, $e_i \geq 0$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$.

Потребительское множество агента $i \in \mathcal{I}$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{X}_i := \{(x, P) \in \mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^l_+) \times P^* \mid x - e_i \in \mathbf{Map}_P(\Omega, \mathbb{R}^l)\}.$$

Очевидно, что $(e_i, P_i^0) \in \mathcal{X}_i$, ибо контракт $e_i - e_i = 0$ совместим с любой информацией.

Таким образом, потребительский план агента i представляет собой упорядоченную пару (x_i, P_i), где первая компонента $x_i \in \mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^l_+)$ это набор контингентных благ, а вторая обозначает информацию агента. Потребительское множество агента состоит из всех потребительских планов, которые реализуются сетью контрактов, совместимых с информацией P_i. Ещё раз отметим, что агент не может потреблять товары независимо от его информации. То есть, если агент не различает два состояния мира, то потребительский план, реализуемый какой-либо сетью контрактов, и отличающийся в этих состояниях природы, не будет лежать в потребительском множестве.

Кортеж, состоящий из потребительских планов агентов $((x_i, P_i))_{i \in \mathcal{I}}$, где $(x_i, P_i) \in \mathcal{X}_i$, называется ***состоянием экономики***.

3.3. Коалиции и правила деления информации

Непустые подмножества множества $\mathcal{I}$ называются *коалициями*. Будем считать, что все коалиции являются разрешёнными и пусть $C := 2^{\mathcal{I}} \setminus \{\emptyset\}$. Предполагается, что члены коалиции способны обмениваться собственным опытом, то есть изменять свою индивидуальную информацию. Перераспределение начальных запасов агентов выполняется на основе этой модифицированной информации. Рассмотрим *процесс обмена* информации между агентами, вступившими в коалицию.

В наиболее общем виде обмен информацией описывается информационным правилом, которое является заданным модельным параметром. Информационное правило ставит в соответствие каждой коалиции и каждому набору (частной) информации в этой коалиции новый набор информации, формально:

Информационным правилом коалиции $S \subseteq \mathcal{I}$ *называется отображение* $k_S : (P^*)^S \to (P^*)^S$, *удовлетворяющее* $k_{\{i\}}(P) = P$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$, $P \in P^*$.

Информационное ***правило экономики*** *это* $(2^{|\mathcal{I}|} - 1)$*-элементный кортеж отображений*

$k = (k_S)_{S \in C}$, где каждой коалиции S соответствует свое правило k_S.

Содержательно это можно выразить так. Член коалиции $i \in S$ с информацией P_i после присоединения к коалиции S имеет доступ к информации $P_i' = k_S^i((P_j)_{j \in S})$ — это компонента i (проекция) отображения k_S, вычисленная в «точке» $P_S = (P_i)_{i \in S}$. Именно эту информацию индивид i может использовать в рамках коалиционной деятельности. При этом в одноэлементных коалициях изменение информации не происходит.

Итак, результатом применения информационного правила является новая информация, которую агенты могут использовать для перераспределения начальных запасов в рамках данной коалиции.

Назовём правило $k = (k_S)_{S \in C}$ ***правилом деления информации****, если $k_S((P_i)_{i \in S}) \succeq (P_i)_{i \in S}$ для каждого $(P_i)_{i \in \mathcal{I}}$, $\forall\, S \in C$.*

Конечно, частными случаями информационного правила являются правило, где обмена информацией вообще не происходит (это частное правило) или нулевое правило, которое, независимо от начальной информации, присваивает каждому члену коалиции информацию $P_i = \{\Omega\}$.

Наконец отметим, что характер информационного обмена может зависеть не только от наличия той или иной информации у членов коалиции, но также и собственно от текущего состояния экономики, т. е. от текущих значений объёмов потребления контингентных благ. Собственно возможность заключить взаимовыгодный контракт после обмена информацией и является по моему мнению единственным значимым стимулом для обмена информацией. Чтобы описать указанную ситуацию формально, достаточно *изменить область определения* у отображений k_S, $S \in C$ и считать их заданными на множествах $\mathcal{X}_S = \prod_{i \in S} \mathcal{X}_i$ вместо $P_S^* = (P^*)^S$, т. е. считать

$$k_S : \mathcal{X}_S \to (P^*)^S, \quad \forall\, S \in C.$$

Данная расширенная трактовка информационного правила будет применяться в дальнейшем анализе.

3.4. Допустимые распределения

Определение распределения имеет важное значение для рассмотрения ядра экономики. Безусловно, допустимые состояния экономики (распределения) должны быть, по крайней мере, физически возможными. Однако, если рассматривается экономика с асимметричной информацией, то определение допустимости должно также учитывать начальную информацию агентов и правило деления информации, которое действует в этой модели.

В литературе известно два наиболее значимых определения (допустимого) распределения. В первом из них (используется Яннелисом и др.), допустимыми называются распределения, совместимые с начальной информацией индивидов. Таким образом, по Яннелису возможность информационного обмена между агентами не принимается во внимание. Второе появляется в работах Аллен (см., напр., Allen (1991a,b)), где в определении допустимого распределения учитываются возможности информационного обмена. В качестве допустимых Аллен рассматривала распределения, измеримые относительно информации, доступной всем членам экономики, т. е. относительно самой грубой информации. У этих определений имеются явные недостатки. Определение Яннелиса плохо мотивированно с содержательной стороны: интуитивно понятно, что допустимость распределения должна как-то зависеть от правила деления информации, информационный мир не статичен. Определение Аллен чрезмерно жесткое, что может повлечь пустоту ядра и также может оказаться так, что агенты вообще не смогут использовать никакой информации и только исходные запасы окажутся (единственным) допустимым распределением. Швальбе (Schwable, 1999), мотивированный указанными соображениями, вводит следующее понятие *максимальной информации*, которое в дальнейшем используется им в понятии допустимого распределения.

Максимальной информацией *агента i относительно правила $k = (k_S)_{S \in C}$ называется информация $P_i^{max} := \bigvee_{S \in C} k_S^i((P_j{}^0)_{j \in S})$.*

Таким образом, максимальная информация это такая, которую получил бы агент, если был бы в состоянии присоединиться ко всем коалициям одновременно. При этом, однако, каждый индивид вступает в коалиционную деятельность со своей начальной информацией. Другая точка зрения была предложена автором в Маракулин (2009), где было введено следующее понятие предельной информации.

Информация *называется* ***предельной****, если существует последовательность коалиций такая, что информация, образовавшаяся на последней стадии информационного обмена, далее остается неизменной (неулучшаема для каждого из агентов).*

Формально, информация $\mathbb{P}^{lim} = (P_i^{lim})_{i \in \mathcal{I}}$ является предельной, если существует (конечная) цепь коалиций $S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq \mathcal{I}$ такая, что:

(i) $\quad P_i^{\xi} = k_{S_\xi}^i((P_j^{\xi-1})_{j \in S_\xi})$, $i \in S_\xi$, $P_i^{\xi} = P_i^{\xi-1}$, $i \in \mathcal{I} \setminus S_\xi$, $\xi = 1, 2, \ldots, m$;

(ii) $\quad \forall\, S \subseteq \mathcal{I}$, $\forall\, i \in S$, $k_S^i((P_j^m)_{j \in S}) = P_i^m = P_i^{lim}$.

В общем случае предельная информация может зависеть от реализующей её последовательности коалиций (разные последовательности приводят к разным результатам). Однако для *монотонного* правила *деления информацией* предельная информация определяется однозначно (см. Маракулин (2009)).

Определение 1. *Распределение $((x_i, P_i))_{i \in \mathcal{I}}$ называется* ***допустимым****, если отображения $x_i : \Omega \to \mathbb{R}_+^l$ и разбиения P_i, $i \in \mathcal{I}$ удовлетворяют:*

(*i*) $\sum\limits_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} e_i$,

(*ii*) $(x_i - e_i) : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *измеримо относительно* P_i^{eco} $\forall\, i \in \mathcal{I}$.

Здесь первое условие отражает физическую допустимость распределения, в то время как второе — информационную допустимость, ибо является требованием измеримости валового контракта (net trade), реализующего распределение. При этом должно быть специально оговорено о какой информации P_i^{eco} в пункте (*ii*) идёт речь. В частности, P_i^{eco} может совпадать с P_i^{max} (Швальбе), P_i^0 (Яннелис), $\bigwedge\limits_{j\in\mathcal{I}} P_j$ (Аллен) или даже быть задана как P_i^{lim} (Маракулин).

3.5. Предпочтения, равновесия и ядро

Предположим для простоты, что предпочтения задаются с помощью функций полезности $u_i : \mathcal{X}_i \to \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{I}$, где потребительские множества $\mathcal{X}_i$ были специфицированы выше. Обычно предполагается, что полезности инвариантны относительно информации:

$$u_i(x, P) = u_i(x, P'), \quad \forall\, (x, P), (x, P') \in \mathcal{X}_i,$$

что можно интерпретировать как тот факт, что информация сама по себе не генерирует никакой полезности[9]. Данное предположение означает, что имеется полезность $u_i(x) = u_i(x, \Omega^*)$, заданная на E_+^Ω и по определению $u_i(x, P) = u_i(x, \Omega^*)$, $\forall\, (x, P) \in \mathcal{X}_i$. Таким образом, т. к. для *фиксированного* разбиения P множество P-измеримых отображений образует подпространство в E^Ω, то формально функцию полезности $u_i(\cdot, P)$ можно определить как снижение на подпространство известной функции $u_i(\cdot, \Omega^*)$. В этом смысле полезность не зависит от информации.

Иногда предполагается, что полезность задана с помощью так называемой *рандоминизированной* функции полезности $u_i : \Omega \times \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}$, где $u_i(\omega, x_i(\omega))$ это «значение» полезности в состоянии ω для потребительского плана $x_i(\omega)$. В таком случае может использоваться ожидаемая полезность (ex ante expected utility), вычисленная по формуле

$$u_i(x_i) = \sum_{\omega\in\Omega} u_i(\omega, x_i(\omega)) q_i(\omega),$$

где $q_i(\omega)$ это заданная в модели (индивидуализированная) априорная вероятность реализации состояния ω[10]. Рассмотрим далее концепции равновесия.

• *WEE-равновесие Раднера.* В рамках модели дополнительно предполагается наличие разбиения Ω[11], обозначим его $\mathcal{F}$, причём такого, что $\mathcal{F} \succeq \bigvee\limits_{i\in\mathcal{I}} P_i$, т. е. это разбиение тоньше любого индивидуального информационного разбиения. Далее, рассматривается $\mathcal{F}$-измеримая

[9] Здесь важно помнить, что контракт $x - e_i$ измерим по отношению к обоим разбиениям P, P'.

[10] В общем случае $q_i(\cdot)$ это плотность априорного вероятностного распределения (prior).

[11] В общем случае σ-алгебры событий.

система цен $p : \Omega \to \mathbb{R}^l_+$, которая задаёт бюджетные множества:

$$B_i(p) = \{(x, P) \in \mathcal{X}_i \mid P = P_i^0 \ \& \ \sum_{\omega\in\Omega} x_i(\omega)p(\omega) \le \sum_{\omega\in\Omega} e_i(\omega)p(\omega)\}, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Пара (p, x) такая, что $x = (x_i)_\mathcal{I}$, $x_i \in B_i(p)$, $i \in \mathcal{I}$ называется ***раднеровским или вальрасовским равновесием в ожиданиях****, если выполняются условия:*

(i) *x_i максимизирует на $B_i(p)$ математическое ожидание полезности, т. е. максимизируется величина $\sum_{\omega\in\Omega} u_i(\omega, x_i(\omega))q_i(\omega)$, $i \in \mathcal{I}$;*

(ii) $\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i \le \sum_{i\in\mathcal{I}} e_i$ & $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) \sum_{i\in\mathcal{I}} x_i(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) \sum_{i\in\mathcal{I}} e_i(\omega)$.

Отметим, что данная концепция является равновесием, формируемом на стадии предшествующей реализации какого-либо состояния природы и при отсутствии какой-либо дополнительной информации о реализовавшемся событии.

• *REE-равновесие (в рациональных ожиданиях).* Как и для WEE-равновесия, имеется разбиение $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$-измеримая *система цен* $p : \Omega \to \mathbb{R}^l_+$. Предполагается, что получив ценовые сигналы, агенты способны извлекать из них информацию и затем использовать её для принятия рациональных решений. Именно, функция $p(\cdot)$ генерирует на Ω некоторое разбиение $\sigma(p)$ — самое грубое разбиение, относительно которого $p(\cdot)$ измерима. Узнав $\sigma(p)$, агент i имеет доступ к информации $\sigma(p) \vee P_i = \mathcal{G}_i$.

Пара (p, x) такая, что $x = (x_i)_\mathcal{I}$, $x_i \in E_+^\Omega$, $i \in \mathcal{I}$ называется ***равновесием в рациональных ожиданиях****, если выполняются условия:*

(i) *$\forall\, i \in \mathcal{I}$ план $x_i : \Omega \to \mathbb{R}^l_+$ $\mathcal{G}_i$-измерим;*

(ii) *$\forall\, i \in \mathcal{I}$ и $\forall\, \omega \in \Omega$ план x_i максимизирует условное математическое ожидание полезности (interim expected utility) $\sum_{\omega'\in\Omega} u_i(\omega', x_i(\omega'))q_i(\omega'|\mathcal{G}_i)(\omega)$[12] при бюджетном ограничении[13] $p(\omega)x_i(\omega) \le p(\omega)e_i(\omega)$;*

(iii) $\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} e_i$.

Отметим, что понятие REE-равновесия является промежуточной (interim) концепцией, ибо все индивидуальные решения вырабатываются не до, но после ценового сигнала. Другое отличие от WEE-равновесия состоит в том, что здесь имеется множество бюджетных ограничений — своё для каждого события, которое способен понимать агент.

• *Ядро.* Концепция ядра в экономике с дифференцированной информацией имеет свою специфику и, в отличии от полного рынка, вообще говоря не является однозначно опреде-

[12] Здесь $q_i(\omega'|\mathcal{G}_i)(\omega)$ это условное вероятностное распределение при реализации элемента $\mathcal{G}_i(\omega)$ разбиения $\mathcal{G}_i$, включающего в себя состояние ω.

[13] Полезно помнить, что в силу $\mathcal{G}_i$-измеримости всех участвующих в неравенстве функций, а значит их постоянства не элементе $\mathcal{G}_i(\omega)$, а также однородности бюджетного неравенства, это неравенство будет выполнено на всём $\mathcal{G}_i(\omega)$ (как и нужно по смыслу), а не только в состоянии ω.

лённым понятием, ибо помимо физической допустимости распределения здесь приходится учитывать его информационную допустимость, т. е. его измеримость относительно соответствующих информационных разбиений. Таким образом, нужно определить какая измеримость итогового распределения ресурсов применяется для экономики в целом и каковы требования на измеримость для внутри-коалиционных распределений, используемых при доминировании текущего распределения ресурсов. Имеющиеся в теории (не все!) и другие возможные варианты представлены в следующей таблице:

econ.\coal.	$\wedge_S k_S^i(\mathbb{P})$	$\wedge_S P_i$	P_i	$\{k_S^i(\mathbb{P})\}$	P_i^{lim}	$\vee_S P_i$	$\vee_S k_S^i(\mathbb{P})$	author
$\wedge_{\mathcal{I}} P_i$		strong coarse	α			β		Yannelis
P_i		coarse	private			fine		Yannelis
$\vee_{\mathcal{I}} P_i$		γ	δ			weak fine		Yannelis
$\forall$ f-allocation		coarse				fine		Wilson
$\wedge_{\mathcal{I}} k_{\mathcal{I}}^i(\mathbb{P})$	coarse							Allen
$\{k_{\mathcal{I}}^i(\mathbb{P})\}$							fine	Allen
$\{P_i^{max}\}$				k-core				Schwalbe
$\{P_i^{lim}\}$				k-limit	limit			Marakulin

В первом столбце указаны требования к распределению в экономике, а в первой строке — к внутри-коалиционным распределениям. В последней строке представлены новые концепции, которые будут изучаться в данном исследовании. Резюмируя эту таблицу можно отметить, что подход, использующий информационное правило, является наиболее общим: достаточно надлежащим образом задать правило.

4. ДОГОВОРНОЙ ПОДХОД И DIE-ЭКОНОМИКА

По твёрдому мнению автора для исследования моделей с дифференцированной информацией можно эффективно применять договорной подход, разработанный в Маракулин (2003, 2006). Далее напомним вкратце его основные положения.

Формально любое перераспределение продуктов $v = (v_i)_{i\in\mathcal{I}}$, где v_i элемент пространства продуктов L, $i \in \mathcal{I}$, т. е. любой вектор v, удовлетворяющий $\sum_{i\in\mathcal{I}} v_i = 0$, называется (бартерным) *контрактом* или *договором.* В модели договорной экономики экзогенно задано множество W *допустимых* контрактов. Конечная совокупность V допустимых контрактов называется *сетью контрактов относительно* $y \in L^n$, если $\forall\, U \subset V$ распределение $y+\sum_{v\in U} v$ является допустимым, т. е. в сети любые договоры можно рвать без ущерба для допустимости распределения. Пусть $x(V) = e + \sum_{v\in V} v$, это распределение, реализуемое сетью V при начальных запасах $e = (e_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Предполагается, что любой контракт $v \in V$ может быть *разорван* любым торговцем из $\mathrm{supp}\,(v) = \{i \in \mathcal{I} \mid v_i \neq 0\}$, ибо он может просто не выполнить своих обязательств. Кроме того, любая непустая группа (коалиция) потребителей может *заключить* (подписать) несколько новых контрактов. Будучи рассмотрены совместно, т. е. как одновременная процедура, эти операции позволяют коалиции $T \subseteq \mathcal{I}$ создавать новые сети контрактов. Пусть $F(V,T)$ множество всех таких сетей. Формально требуется, чтобы каждый элемент $U \in F(V,T)$ удовлетворял условиям:

(i) $\quad v \in V \setminus U \;\Rightarrow\; S(v) \cap T \neq \emptyset$ (только члены T способны разрывать контракты из V) и

(ii) $\quad v \in U \setminus V \;\Rightarrow\; S(v) \subset T$ (только члены T могут подписывать новые контракты).

При договорном подходе понятие доминирования по коалиции распространяется на сети договоров. Это свойство, доминирования по коалиции $T \subseteq \mathcal{I}$, записывается в виде $U \underset{T}{\succ} V$ и формально означает, что

(i) $\quad U \in F(V,T)$,

(ii) $\quad x_i(U) \underset{i}{\succ} x_i(V) \quad$ для всех $\quad i \in T$.

Сеть контрактов V называется *стабильной*, если не существует сети U и такой коалиции $T \subset \mathcal{I}$, $T \neq \emptyset$, что $U \underset{T}{\succ} V$.

Сеть контрактов V называется *стабильной снизу*, если нет такой сети U и коалиции $T \subset \mathcal{I}$, $T \neq \emptyset$, что $U \underset{T}{\succ} V$ и $U \subset V$.

Сеть контрактов V называется *стабильной сверху*, если нет такой сети U и коалиции $T \subset \mathcal{I}$, $T \neq \emptyset$, что $U \underset{T}{\succ} V$ и $V \subset U$.

Распределение x называется *договорным* (договорным снизу, сверху), если $x = x(V)$ для некоторой стабильной (снизу, сверху) сети V.

В стандартном рынке распределения из ядра можно альтернативно описать как договорные; соответственно, оптимальным по Парето распределениям отвечают договорные сверху, а индивидуально рациональным — договорные снизу и т. д. Важную роль играет также концепция правильно договорного распределения, которая даёт (предположения: точка внутренняя, гладкие предпочтения) альтернативное описание равновесия.

Понятие правильно-договорного распределения вводится с помощью следующей конструкции. Пусть дана сеть контрактов V и числа α_v, $0 \leq \alpha_v \leq 1$, $v \in V$. Положим $\alpha V = \{\alpha_v \cdot v\}_{v \in V}$ и рассмотрим сеть $U = (\alpha V) \cup ((\mathbf{1} - \alpha)V)$, где $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$. Таким образом, контракты из U получены из контрактов из V путём их разбиения на несколько контрактов (разложения в сумму), при условии сохранения меновых пропорций (и общих объёмов обмениваемых продуктов).

• *Распределение x называется правильно договорным, если существует сеть V такая, что $x = x(V)$ и для каждого вектора $\mathbf{0} \leq \alpha \leq \mathbf{1}$ и сети $U = (\alpha V) \cup ((\mathbf{1} - \alpha)V)$ распределение $x = x(U)$ является договорным.*

Экономическое значение понятия правильно договорного распределения состоит в том, что наряду с возможностью заключать новые контракты, агенты могут *частично* рвать

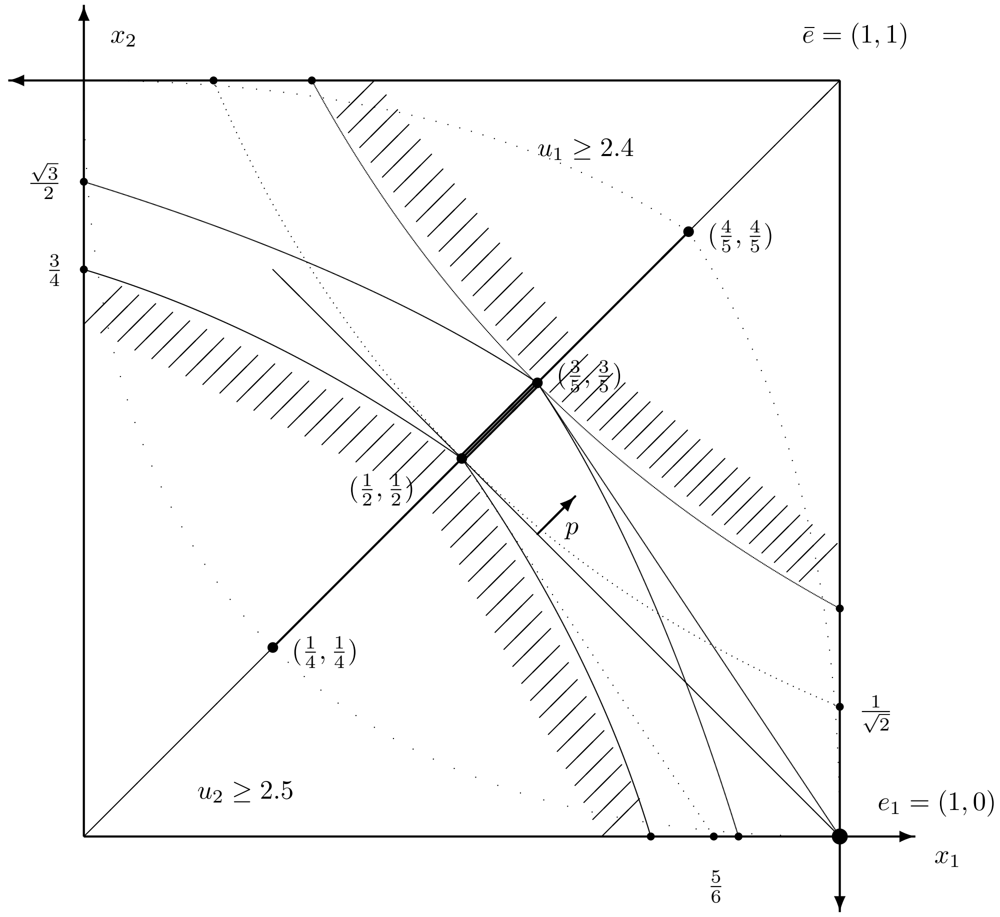

Рис. 1. Правильно договорные распределения при негладких предпочтениях

ранее заключённые контракты при условии сохранения меновых пропорций. Это расширение оперативных возможностей экономических агентов приближает контрактные процессы к рыночным в условиях совершенной конкуренции.

В Козырев (1982, 1981) было установлено (см. также Маракулин (2003)), что (при некоторых технических предположениях) правильно-договорные распределения являются равновесными в экономике с совершенной информацией: этот результат имеет место для дифференцируемых полезностей и тогда, когда текущее распределение является внутренней точкой потребительского множества экономики. Данный факт имеет большую значимость для данного исследования, поэтому рассмотрим его подробнее хотя бы в рамках примера на ящике Эджворта.

Рассмотрим двухпродуктовую экономику обмена с двумя агентами и правильно договорным распределением (x, y), $x + y = e^1 + e^2 = \bar{e}$, где $e^1, e^2 \in \mathbb{R}^2_+$, $x, y \in \operatorname{int} \mathbb{R}^2_+$, а $x = (x_1, x_2)$ обозначает потребление 1-го агента, $y = (y_1, y_2)$ применяется для второго и e^1, e^2 обозначают их начальные запасы. Далее заметим, что каждое правильно договорное распределение должно быть оптимально по Парето и, в силу устойчивости относительно частичных разрывов, должно быть $e^1 + \alpha(x - e^1) \precsim_1 x$, $e^2 + \alpha(y - e^2) \precsim_2 y$ для каждого $0 \le \alpha \le 1$. На ящике Эджворта и в геометрических терминах это означает, что множества $\mathcal{P}_1(x)$, $\{\bar{e}\} - \mathcal{P}_2(\bar{e} - x)$ и $\mathrm{co}\{x, e^1\}$ имеют попарно пустые пересечения;[14] здесь $\mathcal{P}_i(z)$ обозначает множество всех планов, строго предпочитаемых агентом i плану $z \in \mathbb{R}^2_+$. Здесь это свойство однозначно характеризует правильно договорные распределения и, более того, для гладких предпочтений и внутреннего распределения линейный отрезок $\mathrm{co}\{x, e^1\}$ можно однозначно продолжить до гиперплоскости, разделяющей два множества предпочитаемых элементов. Легко видеть, что вектор нормали к этой гиперплоскости можно принять в качестве вектора равновесных цен. Следующий пример иллюстрирует этот факт и показывает, что при нарушении указанных предположений не каждое правильно договорное распределение является равновесием.

Пусть $u_1(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1 x_2} + x_1 + x_2$, $u_2(y_1, y_2) = 2\sqrt{y_1 y_2} + y_1 + y_2 + \min\{y_1, y_2\}$, где нижний индекс обозначает номер продукта. Начальные запасы: $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $\bar{e} = e_1 + e_2 = (1, 1)$. Таким образом мы приходим к следующей картинке: см. Рис: 1 (ящик Эджворта). Несложно видеть, что единственным равновесием здесь является точка $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, однако любая точка на отрезке $\mathrm{co}\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{5}, \frac{3}{5})\}$ соответствует правильно договорному распределению. Подробный разбор данного примера можно найти в Маракулин (2003).

В рамках договорного подхода имеется альтернативная возможность описать равновесие в чисто договорных категориях, причём при существенно более слабых модельных предположениях. Делается это с помощью понятия *нечётко договорного* распределения, описываемого ниже.

Понятие правильно договорного распределения предполагает, что агенты способны частично разрывать контракты так, что каждый контракт может быть разделён на несколько контрактов с теми же меновыми пропорциями и затем часть этих контрактов может быть разорвана, т. е. вместо контракта $v \in V$ агенты будут иметь дело с контрактами $\{u_\xi\}$, удовлетворяющими $\sum u_\xi = v$ и $u_\xi = \lambda_\xi v$ для некоторого действительного $\lambda_\xi \ge 0$ для всех ξ. Таким образом, при частичном разрыве v члены коалиции $S = \mathrm{supp}(v)$ должны координировать свои действия. Для нечётко договорного распределения это координационное требование ослабляется: агенты способны разрывать контракты *асимметрично*, где и совместно с $\sum u_\xi = v$ требуется $(u_\xi)_i = \lambda_{\xi i} v_i$ для некоторых действительных $\lambda_{\xi i} \ge 0$ для всех ξ и i. Заметьте, что сейчас векторы u_ξ даже *могут не быть контрактами*, ибо $\sum_{i \in \mathcal{I}} u_{\xi i} = 0$ не обязано выполняться.

Пусть V сеть контрактов. Для каждого $v \in V$ рассмотрим и поставим в соответствие

[14] Пересечение первой пары соответствует оптимальности по Парето, а другие следуют из стабильности относительно частичных разрывов. Если A и B подмножества векторного пространства, тогда $A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$.

n-мерный вектор

$$t^v = (t_1^v, t_2^v, \ldots, t_n^v), \quad 0 \leq t_i^v \leq 1, \quad \forall\, i \in \mathcal{I},$$

и пусть

$$v^t = (t_1^v v_1, t_2^v v_2, \ldots, t_n^v v_n) \ -$$

кортеж продуктовых наборов, образованных из контракта $v = (v_i)_{i \in \mathcal{I}}$ в случае, когда агенты «разрывают» индивидуальные наборы (фрагменты) этого контракта в долях $(1 - t_i^v)_{i \in \mathcal{I}}$. Обозначим $T(V) = T = \{t^v \mid v \in V\}$ и введём

$$V^T = \{v^t \mid v \in V,\ t^v \in T\}, \quad \Delta(V^T) = \sum_{v^t \in V^T} v^t. \tag{1}$$

Определение 2. *Распределение x называется нечётко договорным если существует правильная*[15] *сеть V такая, что $x = x(V)$ и для каждого $T(V)$ распределение $x^T = e + \Delta(V^T)$ является договорным сверху, т. е. для x^T нет коалиции способной заключить новый взаимовыгодный контракт.*

В экономических терминах это понятие можно пояснить следующим образом. В договорном процессе агенты могут делать ошибки, координация между членами коалиции может работать несовершенно и т. д. В результате агент i может (ошибочно) считать, что после частичного разрыва текущих договоров он/она будет иметь продуктовый набор x_i^T и что ресурсы из x_i^T можно обменять в рамках нового (взаимовыгодного) контракта. Если распределение $x(V)$ не является нечётко договорным, тогда последнее (потенциально) может разрушить соглашение и распределение изменится. Таким образом, нечётко договорные распределения защищены от указанного способа, разрушающего договорные соглашения. Следующее утверждение формулирует основным характеристическое свойство нечётко-договорных распределений.

Утверждение 4.1. *Распределение x является нечётко договорным тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{co}\{x_i, e_i\} \cap \mathcal{P}_i(x_i) = \emptyset, \quad \forall\, i \in \mathcal{I}, \tag{2}$$

$$\prod_{\mathcal{I}} [(\mathcal{P}_i(x_i) + \mathrm{co}\{0, e_i - x_i\}) \cup \{e_i\}] \bigcap \{(z_1, \ldots, z_n) \in E^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i\} = \{e\}. \tag{3}$$

Заметим, что здесь для некоторых $i \in \mathcal{I}$ возможно $\mathcal{P}_i(x_i) = \emptyset$: по определению $\emptyset + A = \emptyset$ для любого A. Условие (2) здесь эквивалентно требованию того, чтобы распределение было правильно-договорным снизу, т. е. такое, что никто не хочет частично рвать контракты. Утверждение 4.1 позволяет заключить, что нечётко договорные распределения являются элементами нечёткого ядра и, более того, практически им эквивалентны — см. Маракулин

[15] Так называются сети, устойчивые относительно частичных разрывов договоров.

(2003) и раздел 5.3 ниже (стр. 36, утверждение 5.2 и следствие 5.4). В свою очередь, равновесные свойства распределений из нечёткого ядра (представляются как квазиравновесия) хорошо известны в литературе. Доказательство утверждения 4.1 приведено в разделе 9.

Представляется, что в контексте DIE-экономики можно применять любое известное понятие договорного подхода: правильно договорное и нечётко договорное распределения наиболее значимы среди прочих в силу их взаимосвязи с равновесием. Однако при договорном подходе надо прежде всего надлежащим образом специфицировать множество *допустимых* контрактов W — как минимум, требуя надлежащей измеримости договоров. Далее следует дать договорную характеризацию разных видов равновесия и ядра (в том числе нечёткого), применяемые в моделях этого типа. Наконец, для равновесий, пока что описанных как правильно договорное или даже нечётко договорное распределение, нужно дать ценовую характеризацию. Таким способом можно найти новые концепции равновесия и прояснить некоторые свойства известных ранее.

5. РАВНОВЕСИЯ И ЯДРО С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ДОГОВОРНОГО ПОДХОДА

5.1. Уточнения модели и предположения в DIE-экономике

Предметом настоящего исследования является модель экономики обмена с дифференцированной информацией, которую кратко можно записать следующим образом:

$$\mathcal{E}^{di} = \langle \mathcal{I}, \mathbb{R}^l, \Omega, (k_S(\cdot))_{S\in C}, (X_i, \mathcal{P}_i, P_i, e_i)_{i\in\mathcal{I}} \rangle.$$

Здесь:

$\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ (конечное) множество агентов (торговцев или потребителей);

$\mathbb{R}^l$ обозначает *пространство* (физических) *продуктов*, где $l \in \mathbb{N}$ их число;

Ω *конечное* множество элементарных событий, они же состояния природы (мира);

$L = (\mathbb{R}^l)^\Omega$ *пространство* контингентных *продуктов*.

Для каждого $i \in \mathcal{I}$ определены:

$X_i = L_+$ потребительское множество агента i;

$\mathcal{P}_i : X_i \Rightarrow X_i$ точечно-множественное отображение, задаёт *отношение предпочтения*, $\mathcal{P}_i(x_i)$ это совокупность всех потребительских наборов, строго предпочитаемых агентом i набору $x_i \in X_i$. Также используется $y_i \succ_i x_i \iff y_i \in \mathcal{P}_i(x_i)$;

P_i это разбиение Ω, характеризует начальную информацию агента $i \in \mathcal{I}$;

$e_i \in X_i$ начальные запасы контингентных продуктов.

В модели также может быть задано $k = (k_S)_{S \in C}$ — информационное *правило экономики*, где $k_S : (P^*)^S \to (P^*)^S$ информационное правило коалиции $S \in C = 2^{\mathcal{I}} \setminus \{\emptyset\}$, причём $k_{\{i\}}(P) = P$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$, а P^* это множество всех разбиений Ω.

Без ограничения общности в дальнейшем всегда предполагается, что

$$\bigcap_{\mathcal{I}} P_i(\omega) = \{\omega\},\ \forall\, \omega \in \Omega \iff \bigvee_{\mathcal{I}} P_i = \Omega^*, \tag{4}$$

где $P_i(\omega)$ это элемент разбиения P_i, который содержит состояние $\omega \in \Omega$, а Ω^* это разбиение на одноэлементные множества (совершенная информация).

Обозначим символом $e = (e_i)_{i \in \mathcal{I}}$ вектор исходных запасов (всех) торговцев рассматриваемой модели, положим $X = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ и определим

$$\mathcal{A}(X) = \{x \in X \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i\} -$$

это множество всех *физически достижимых распределений* модели $\mathcal{E}^{di}$. В дальнейшем всегда предполагается, что модель $\mathcal{E}^{di}$ удовлетворяет следующему предположению:

(A) *Для каждого $i \in \mathcal{I}$: $e_i \in X_i$ и для каждого $x_i \in X_i$ существует открытое выпуклое $G_i \subset L$ такое, что $\mathcal{P}_i(x_i) = G_i \cap X_i$ и $x_i \in \overline{\mathcal{P}_i(x_i)} \setminus \mathcal{P}_i(x_i)$.*[16]

Если предпочтения допускают задание посредством дифференцируемых функций полезности, то появляется понятие гладкой модели: экономика $\mathcal{E}^{di}$ называется ***гладкой***, если для каждого $i \in \mathcal{I}$

$$\mathcal{P}_i(x_i) = \{y \in X_i \mid u_i(y) > u_i(x_i)\} \quad \forall\, x_i \in X_i$$

для некоторой *дифференцируемой* функции u_i, определённой на (некоторой) открытой окрестности множества X_i, причём $\nabla u_i(x_i) \neq 0\ \forall\, x_i \in X_i$.

В рамках модели $\mathcal{E}^{di}$ может быть наведена структура договорной экономики, заданная посредством множества *допустимых* (разрешённых) договоров $\mathcal{W} \subset L^{\mathcal{I}}$. В общем случае постулируется, что множество $\mathcal{W}$ является *звёздным* в нуле[17] в $L^{\mathcal{I}}$. Более того, при договорном подходе нет существенной потребности рассматривать обобщенное пространство информационно допустимых продуктов, и всю тематику, связанную с информационной допустимостью потребительского набора можно спустить на уровень заключаемых договоров и спецификации множества $\mathcal{W}$.

---

[16] Символом $\overline{A}$ обозначено замыкание множества A, а $\setminus$ означает теоретико-множественную разность.

[17] Это означает: $v \in \mathcal{W} \Rightarrow \lambda v \in \mathcal{W}\ \ \forall\, 0 \leq \lambda \leq 1$.

По ходу одно важное замечание относительно предпочтений. В известной литературе широко используется математическое ожидание полезности, вычисленное через рандомизированные функции полезности $u_i(\omega, x_i(\omega))$, $x_i : \Omega \to \mathbb{R}^l_+$, $i \in \mathcal{I}$. Мне представляется, что это было в значительной степени вызвано потребностью применять условное ожидание полезности: для введения и изучения таких понятий как равновесие в рациональных ожиданиях и сравнимость по стимулам (incentive compatibility) — стабильность относительно потенциально возможной лжи. Однако это кажется достаточно очевидным, что во всех этих случаях вполне можно обойтись и без этого: просто предпочтения для реализованного (или нет) события E напрямую никак не должны быть связаны с предпочтениями для $\omega \notin E$. Хотя содержательно вроде бы личность (агент) та же самая и при «близких» событиях должны быть близкие предпочтения... однако эти факторы не воплощены в данной модели. Здесь я говорю именно о предпочтениях, как порядковой категории, а не о полезности, которая, конечно, будет зависеть от $\omega \notin E$. Сказанное означает, что предпочтения индивида могут задаваться, например, посредством обобщенно-сепарабельной функции, имеющей следующий функциональный вид:

$$u_i(x_i(\cdot)) = \psi_i(\varphi^i_1(x_i(\omega_1)), \varphi^i_2(x_i(\omega_2)), \dots, \varphi^i_k(x_i(\omega_k))), \quad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}. \tag{5}$$

Чтобы всё было корректно, здесь нужно предполагать, что функция $\psi_i(\cdot)$ непрерывная и строго монотонно возрастающая по каждому из аргументов, а $\varphi^i_\omega(\cdot)$ — обычные квазивогнутые функции, задающие предпочтения[18]. Для функции указанного вида очевидно, что любые фиксированные объёмы потребления за пределами какого-либо (одного!) элементарного события $\omega \in \Omega$ (или элемента разбиения $E \in P_i$) индуцируют одинаковые предпочтения на пространстве контингентных продуктов, ограниченных на это событие ω. Сказанное соответствует понятию *слабо* сепарабельной полезности.

Сильно сепарабельная полезность имеет следующий функциональный вид:

$$u_i(x_i(\cdot)) = \psi_i(\varphi^i_1(x_i(\omega_1)) + \varphi^i_2(x_i(\omega_2)) + \dots + \varphi^i_k(x_i(\omega_k))), \quad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}. \tag{6}$$

Содержательное различие состоит в том, что для каждого *множества* $E \subset \Omega$ элементарных событий на множестве контингентных продуктов, соответствующих событиям из E, индуцируется некоторое отношение предпочтения, не зависящее от объёмов потребления во внешних по отношению к E событиях $\omega \in \Omega \setminus E$. Для обоснования этого результата см. Barten, Bohm (1982), Debreu (1960). Более того, должны быть понятны и требования к общему случаю: надо, чтобы потребление в событиях внешних (отличных от) по отношению к любому заданному (элементарному?) событию не влияли на предпочтения в рамках данного события. Формально в общем случае сильная сепарабельность означает

$$\mathrm{Pr_E}\left[\mathcal{P}(x_{|_E}, y_{|_{\Omega\setminus E}}) \bigcap ((x_{|_E}, y_{|_{\Omega\setminus E}}) + \mathcal{L}^E)\right] = \mathrm{Pr_E}\left[\mathcal{P}(x_{|_E}, z_{|_{\Omega\setminus E}}) \bigcap ((x_{|_E}, z_{|_{\Omega\setminus E}}) + \mathcal{L}^E)\right] \tag{7}$$

[18] Это всё те же рандомизированные полезности, затем свёрнутые посредством нелинейной функции ψ_i.

$$\forall\, measurable\ y_{|_{\Omega\setminus E}}, z_{|_{\Omega\setminus E}} : \Omega \setminus E \to \mathbb{R}^l_+,$$

где $\mathrm{Pr}_{\mathrm{E}}[\cdot]$ это оператор проектирования на подпространство функций, заданных на $E \subset \Omega$, который в этом случае можно определить как умножение функции из L на характеристическую функцию χ^E множества $E \subseteq \Omega$.[19] Далее всюду, где это нужно, мы будем предполагать указанное свойство предпочтений или просто предполагаем функциональный вид (5). Более того, мы будем предполагать ненасыщенность предпочтений относительно каждого элементарного события, т. е. в терминах (5) должно быть:

$\forall\, \omega \in \Omega$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$ функции $\varphi^i_\omega : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ квазивогнутые и локально ненасыщенные на $\mathbb{R}^l_+$.

Перейдём далее к договорному анализу понятия частного ядра и отвечающему ему понятию равновесия.

5.2. WEE-равновесия и приватное ядро, WEE-lim-равновесия и предельное ядро

Прежде чем формулировать и доказывать разного рода математические утверждения, попробуем разобраться содержательно с тем, что может нового привнести договорной подход в наше понимание того, как функционирует экономика с асимметрично информированными агентами. Представим себе что есть «сегодня» и «завтра» и нам ***сегодня*** нужно спланировать своё завтрашнее потребление. У нас нет точной информации о том, что именно завтра произойдёт, но, по крайней мере для себя, мы знаем что именно мы *будем способны* завтра понять, — когда это «завтра» произойдёт. На модельном уровне те события, которые мы будем способны завтра понимать, формируют ***разбиение*** множества Ω всех элементарных событий завтрашнего дня. Причём у разных агентов эти разбиения разные, в чём и проявляется информационная асимметрия. Планируя свое завтрашнее потребление, индивид должен договориться с другими агентами о том, какие продуктовые обмены завтра будут совершены. Однако удовлетворение индивида от потребления завтрашних продуктов существенно зависит от того, какие события завтра произойдут. Например, если я планирую завтра поездку на природу, но при этом произойдёт дождь, я промокну и к вечеру у меня поднимется температура, то мне потребуются жаропонижающее и другие лекарства. Если дождя не будет, то ценность зонтика и лекарственных препаратов для меня будет невелика. Однако уже сегодня я должен предусмотреть возможность дождя и договорится об обмене каких-то своих продуктов (денег?) на зонтик и лекарства. При этом обмен на зонтик будет желательно совершить тогда, когда будет точно известно, что дождь произойдёт, а в отношении лекарств — тогда, когда температура уже поднялась (или точно известно, что поднимется). Здесь важно, что индивид прежде всего ***должен понимать событие***, при реализации которого совершается обмен. Это, конечно, касается каждой из сторон в меновой сделке, которую мы намерены заключить

[19] Задаётся формулой $\chi^E(\omega) = 1$ для $\omega \in E$ и равно нулю иначе.

уже сегодня; контракт, заключённый в этой сделке, должен начинаться с текста: «Если случится дождь, то ...» и/или текста: «Если случится дождь и у меня поднимется температура, то ...» При этом математическая конструкция может быть следующая.

Контракт (бартерный) $v = (v_i)_{\mathcal{I}}$ это кортеж отображений $v_i : \Omega \to \mathbb{R}^l$, $i \in \mathcal{I}$, удовлетворяющий требованиям измеримости

$$\forall\, i \in \mathcal{I}, \quad v_i(\cdot) \text{ измеримо относительно } P_i, \tag{8}$$

а также стандартному требованию сбалансированности:

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} v_i(\omega) = 0. \tag{9}$$

Первое из этих требований говорит о том, что если индивид не способен отличить одно элементарное событие от другого, например a и b из Ω неразличимы для i — это означает, что a и b попали в один общий элемент информационного разбиения — то и обязательства по договору должны быть одинаковыми, т. е. должно быть $v_i(a) = v_i(b)$, а функция в целом должна быть постоянна на каждом из элементов информационного разбиения. Условие (8) это ограничение, определяющее в данном контексте множество $\mathcal{W}$ допустимых договоров.

Если никаких других ограничений не накладывать и в части разрыва договоров допустить только возможность их полного разрыва, то в качестве договорного распределения мы получим в точности распределение из частного ядра, определение которого даётся ниже.

Определение 3. *Приватное ядро $\mathcal{C}^{pr}(\mathcal{E}^{di})$ модели экономики $\mathcal{E}^{di}$ с асимметрично информированными агентами состоит из распределений $x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in X$ таких, что:*

(i) $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i,$

(ii) $(x_i - e_i) : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *является P_i-измеримым для всех $i \in \mathcal{I}$,*

(iii) $\nexists S \subseteq \mathcal{I} : \exists y^S = (y_i)_S \mid \forall\, i \in S,\ y_i \in X_i$ *такое, что $(y_i - e_i)$ P_i-измеримо,* $y_i \succ_i x_i \ \&\ \sum_S (y_i - e_i) = 0.$

Здесь условие *(iii)* это обычное требование недоминируемости по коалициям, рассмотренное с учётом требования измеримости доминирующего распределения относительно частной информации. В качестве сети договоров, реализующей распределение x из ядра $\mathcal{C}^{pr}(\mathcal{E}^{di})$, нужно взять $V = \{x - e\}$; совпадение понятий с точностью до системы обозначений и терминологии определяется непосредственно. Но что происходит с равновесием?

В соответствии с общей методологией договорного подхода распределение, реализованное сетью допустимых договоров ***не может*** быть равновесием если сеть ***неустойчива сверху*** или ***нестабильна*** относительно ***частичных разрывов*** договоров. Возможно этих требований будет не вполне достаточно, чтобы описать равновесие в максимально общей постановке, но они должны быть выполнены с необходимостью. Итак, чтобы дать приемлемую формулировку понятия равновесия нам потребуется охарактеризовать устойчивые сверху сети договоров.

Напомним, что сеть договоров V называется устойчивой сверху, если при распределении $x = e + \sum_{v \in V} v$, реализуемом этой сетью, ни у какой коалиции не существует взаимовыгодного контракта:

$$\nexists\, v = (v_i)_{\mathcal{I}} \in \mathcal{W}: \quad x_i + v_i \succ_i x_i \quad \forall\, i \in \operatorname{supp}(v).$$

Далее нам потребуется следующая

Лемма 5.1 (о взаимовыгодном контракте). *Пусть $S \subseteq \mathcal{I}$, $S \neq \emptyset$ некоторая коалиция и $A \subseteq \Omega$ событие, которое понимают все члены коалиции S*[20]*. Тогда, если у членов коалиции S* ***не существует*** *взаимовыгодного обмена контингентными продуктами (контракта), то найдутся такой вектор $p \in (\mathbb{R}^l)^A$, $p \neq 0$, и такие векторы $q_i \in (\mathbb{R}^l)^A$, $i \in S$, что*

$$\forall\, i \in S\ \forall\, E \in P_i,\ E \subseteq A \quad \sum_{\omega \in E} q_i(\omega) = 0 \tag{10}$$

и при этом

$$\forall\, i \in S \quad p + q_i \neq 0 \quad \& \quad \langle \mathcal{P}_i(x_i), p + q_i \rangle \geq \langle x_i, p + q_i \rangle. \tag{11}$$

Обратное: пусть существуют векторы, удовлетворяющие (10), (11) причём в (11) хотя бы одно неравенство строгое[21]*. Тогда у членов коалиции S взаимовыгодного контракта* ***не существует****.*

Из этой леммы вытекают важные в дальнейшем анализе следствия.

Следствие 5.1. *В условиях леммы 5.1 пусть предпочтения описываются дифференцируемыми функциями полезности и пусть $x = (x_i)_{\mathcal{I}}$ — внутреннее относительно A и S распределение*[22]*. Тогда у коалиции S* ***не существует*** *взаимовыгодного контракта тогда и только тогда, когда найдутся такой вектор $p \in (\mathbb{R}^l)^A$, $p \neq 0$ и такие $\lambda_i > 0$, $i \in S$, что*

$$\forall\, E \in P_i,\ E \subseteq A \quad \lambda_i \sum_{\omega \in E} \nabla_\omega u_i(x_i) = \sum_{\omega \in E} p(\omega) \quad \forall\, i \in S.$$

Требования в последних соотношениях можно рассматривать как (линейную) систему уравнений относительно $\lambda_i > 0$, $i \in \mathcal{I}$ и $p(\omega) \in \mathbb{R}^l$, $\omega \in A$. Если решение существует, то контракт невозможен. Если же решения нет, то контракт существует. Следующее следствие даёт наиболее просто проверяемый признак существования взаимовыгодного контракта.

[20] $\forall\, i \in S$ множество A измеримо по P_i.

[21] Значит $\exists i : \langle \mathcal{P}_i(x_i), p + q_i \rangle > \langle x_i, p + q_i \rangle \iff \langle y, p + q_i \rangle > \langle x_i, p + q_i \rangle\ \forall\, y \in \mathcal{P}_i(x_i)$.

[22] Значит $x_i(\omega) \in \operatorname{int} \mathbb{R}^l_+$, $\omega \in A$, $i \in S$.

Следствие 5.2. *Пусть в условиях леммы и следствия 5.1 событие $E \in P_i$ для каждого $i \in S$, т. е. все участники коалиции S не различают состояния из E. Тогда взаимовыгодный контракт существует если и только если система векторов $h_i = \sum_{\omega\in A} \nabla_\omega u_i(x_i(\cdot))$, $i \in S$ неколлинеарная.*

Итак, так как по определению стабильного сверху договорного распределения новый взаимовыгодный контракт в случае $A = \Omega$ у коалиции $S = \mathcal{I}$ невозможен, то в этом случае можно применять лемму 5.1. Отсюда следует существование отображения $p : \Omega \to \mathbb{R}^l$, удовлетворяющее соотношениям (11), которое и следует взять в качестве *ценового* отображения.

Далее, для того чтобы прийти к понятию равновесия нужно также выявить свойства, обеспечивающие устойчивость распределения относительно частичных разрывов договоров. Для дифференцируемых полезностей это свойство будет эквивалентно требованию

$$\langle \nabla u_i(x_i), x_i - e_i \rangle \geq 0, \quad \forall\, i \in \mathcal{I},$$

что для точек из внутренности потребительского множества даёт

$$\langle p + q_i, x_i - e_i \rangle \geq 0, \quad \forall\, i \in \mathcal{I}.$$

Здесь, конечно, все неравенства могут реализоваться только в форме строгого равенства. Отметим, что мы просто рассмотрели случай одноэлементной сети договоров $V = \{x - e\}$. Далее, так как в силу (8), (10) для любого контракта $v = (v_i)_\mathcal{I} \in \mathcal{W}$ имеет место $\langle q_i, v_i \rangle = 0$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$, то при данных предположениях предыдущие соотношения будут эквивалентны требованию $\langle p, (\mathcal{P}_i(x_i) - e_i) \cap \mathcal{L}_i \rangle > 0$, $i \in \mathcal{I}$, где

$$\mathcal{L}_i = \mathbf{Map}_{P_i}(\Omega, \mathbb{R}^l) = \{f \mid f : \Omega \to \mathbb{R}^l \text{ есть } P_i - \text{измеримое}\}, \quad i \in \mathcal{I}.$$

В итоге мы приходим к следующему понятию равновесия, которое с договорной точки зрения вполне соответствует понятию частного ядра.

Определение 4. *Пара (x, p), $x = (x_i)_\mathcal{I} \in X$, $p : \Omega \to L'$, $p \neq 0$ называется априорным приватным* ***квазиравновесием*** *(ex ante private quasi-equilibrium), если выполнены следующие требования:*

- *(i)* $(x_i - e_i) : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *является P_i-измеримым для всех $i \in \mathcal{I}$,*
- *(ii)* $0 \not\equiv \langle p, (\mathcal{P}_i(x_i) - e_i) \cap \mathcal{L}_i \rangle \geq 0$, $i \in \mathcal{I}$,
- *(iii)* $\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} e_i$.

Если в пункте (ii) все неравенства ***строгие****, то пара (x, p) называется* ***равновесием****.*

Непосредственное сравнение определений показывает, что это понятие совпадает с WEE-равновесием в случае балансовых соотношений в форме равенства, а также при более общей точке зрения на предпочтения.

5.3. Приватное равновесие и ядро в условиях совершенной конкуренции

В предыдущем разделе были рассмотрены понятия договорного распределения и частного равновесия, близко связанные с известными в литературе понятиями приватного ядра и WEE-равновесия. При этом однако осталось непонятным какова точная взаимосвязь между понятиями договорного распределения и частного равновесия: необходимо понять что происходит в условиях совершенной конкуренции — для корректно определённых концепций ядро и равновесие должны совпадать. В процессе нахождения ответа на данный вопрос мы проясним также условия, при которых приватные априорные равновесия существуют.

Воспользуемся стандартными методами анализа, связанными с рассмотрением реплицированной модели. Далее напомним известные определения, одновременно адаптируя их к нашему контексту. Прежде всего рассмотрим (кратко) вопрос непустоты ядра модели $\mathcal{E}^{di}$.

Модели экономики с дифференцированной информацией $\mathcal{E}^{di}$ можно поставить в соответствие некоторую кооперативную игру с нетрансферабельной полезностью (кратко НТП-игра, см. Мулен (1991)). Напомним, что НТП-игра $(\mathcal{I}, (V(S))_{S\subset\mathcal{I}})$ описывается множеством игроков (агентов) $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$, $(n \geq 2)$ и множествами допустимых векторов выигрышей $V(S) \subset \mathbb{R}^S$ для каждой (непустой) коалиции $S \subset \mathcal{I}$, которые удовлетворяют следующим свойствам:

- $V(S)$ непустое, замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^S$,
- $V(S)$ насыщенно (вниз), т. е., если $x \in V(S)$ и $y \leq x$, то $y \in V(S)$,
- множество всех индивидуально-рациональных векторов выигрыша из $V(S)$, по определению это
$$Q(S) := \{v \in V(S) \ \mid \ v_i \geq V(\{i\}) \ \forall\, i \in S\}, \tag{12}$$
непусто и *ограничено* сверху в $\mathbb{R}^S$.

Рассмотрим конструкцию игры, которая соответствует концепции априорного ядра в модели экономики, и для коалиционного доминирования надлежащим образом используются информационные разбиения P_i^S, $i \in S$, $S \subseteq \mathcal{I}$. Разбиения P_i^S описывают ту информацию, которую может использовать индивид $i \in S$ в процессе поиска доминирующего распределения по коалиции S. В таком случае множество допустимых векторов выигрыша коалиции S задаётся по формуле

$$V(S) = \{(v_i)_{i\in S} \leq (u_i(x_i))_{i\in S} \ \mid \ (x_i)_{i\in S} \in \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(\mathbb{P}^S)\},$$
$$\mathcal{A}(\mathbb{P}^S) = \{y^S = (y_i)_S \mid \sum_S y_i = \sum_S e_i \ \ \& \ \ (y_i - e_i)(\cdot) \ P_i^S \text{ измеримо}, \ \ y_i \in (\mathbb{R}_+^l)^\Omega, \ i \in S\}.$$

Тот факт, что множества $V(S)$ удовлетворяют свойствам, требуемым в определении НТП-игры, легко проверяется и следует из компактности множества всех допустимых распределений и непрерывности функций полезности исходной модели экономики.

Напомним, что семейство $\mathcal{B}$ подмножеств в $\mathcal{I}$ называется *сбалансированным*, если для каждого $S \in \mathcal{B}$ существуют такие действительные $\lambda_S \geq 0$, что выполнено

$$\sum_{S \in \mathcal{B}: i \in S} \lambda_S = 1 \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$$

или, в эквивалентной форме,

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S \mathbf{1}_S = \mathbf{1}_{\mathcal{I}},$$

где, по определению, $\mathbf{1}_S \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ — вектор, удовлетворяющий $(\mathbf{1}_S)_i = 1$ для $i \in S$ и $(\mathbf{1}_S)_i = 0$ при $i \notin S$, т. е. это характеристическая (индикаторная) функция множества S.

Игра $(\mathcal{I}, V)$ называется *сбалансированной*, если для каждого сбалансированного семейства коалиций $\mathcal{B}$ выполнено

$$\bigcap_{S \in \mathcal{B}} \mathrm{pr}^{-1}_{|S}(V(S)) \subseteq V(\mathcal{I}),$$

где $\mathrm{pr}_{|S}(\cdot)$ — проектирующее отображение пространства $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ на $\mathbb{R}^S$.

Известная теорема Скарфа утверждает, что ядро сбалансированной НТП-игры $(\mathcal{I}, (V(S))_{S \subset \mathcal{I}})$ не пусто. С использованием теоремы Скарфа стандартными рассуждениями доказывается следующее

Утверждение 5.1. *Пусть для каждой (допустимой) коалиции $S \subseteq \mathcal{I}$ и каждого $i \in S$ выполнено $P_i^S \preceq P_i^{\mathcal{I}}$, и предпочтения потребителей заданы вогнутыми непрерывными функциями полезности.*[23] *Тогда $\mathcal{C}(\mathcal{E}^{di}) \neq \emptyset$.*

Доказательство утверждения 5.1. Единственное, что требует аккуратного рассмотрения, это свойство сбалансированности игры, построенной по модели экономики. Пусть $\mathcal{B}$ любое сбалансированное семейство и пусть $(\lambda_S)_{\mathcal{B}}$ соответствующее семейство коэффициентов сбалансированности. Пусть $v = (v_i)_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ такой вектор, что $\forall\, S \in \mathcal{B}$ выполнено

$$\exists y^S = (y_i^S)_S \in \mathcal{A}(S) \mid \; v_i \leq u_i(y_i^S), \; \forall\, i \in S.$$

По определению сбалансированного семейства для данного i имеем $\lambda_S v_i \leq \lambda_S u_i(y_i^S)$, откуда, суммируя по коалициям из $\mathcal{B}$, включающим в себя i, с учётом вогнутости $u_i(\cdot)$ получаем

$$v_i = \sum_{S \in \mathcal{B}: i \in S} \lambda_S v_i \leq \sum_{S \in \mathcal{B}: i \in S} \lambda_S u_i(y_i^S) \leq u_i(\sum_{S \in \mathcal{B}: i \in S} \lambda_S y_i^S).$$

Кроме того, имеем

$$(y_i^S - e_i) \text{ есть } P_i^S\text{–измеримое}, \; \forall\, S \in \mathcal{B} : i \in S \;\Rightarrow\; \sum_{S \in \mathcal{B}: i \in S} \lambda_S (y_i^S - e_i) \text{ есть } \bigvee_{S \in \mathcal{B}} P_i^S\text{–измеримое},$$

[23] В общем случае надо требовать компактность множества $\mathcal{A}(\mathbb{P}^{\mathcal{I}})$ всех допустимых распределений гранд-коалиции. Здесь это имеется по определению модели.

и, так как по условию $\bigvee_{S\in\mathcal{B}} P_i^S \preceq P_i^{\mathcal{I}}$, то

$$x_i^{\mathcal{B}} = \sum_{S\in\mathcal{B}:i\in S} \lambda_S y_i^S \text{ есть } P_i^{\mathcal{I}} - \text{измеримое}, \ \forall\, i \in \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad (x_i^{\mathcal{B}})_{\mathcal{I}} \in \mathcal{A}(\mathcal{I}).$$

Поскольку ранее мы имели $v_i \leq u_i(x_i^{\mathcal{B}})$, $i \in \mathcal{I}$, то теперь по определению игры заключаем $v \in V(\mathcal{I})$ — что и требовалось доказать. ■

В качестве следствия к этому утверждению можно заключить непустоту ядра в экономике такой, что для коалиции всех агентов рассматриваются распределения измеримые относительно предельной информации, а для коалиционного доминирования — информацией, достигнутой в любой заданной цепочке коалиционного деления информацией, фиксированной в рамках определения. В этой связи появляются определения:

Определение 5. *Пусть $\alpha = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ произвольная (возможно пустая) цепь коалиций и пусть $\mathbb{P} = \{P_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ информационная структура. Положим $\mathbb{P}^\alpha = \{P_i^\alpha\}_{i\in\mathcal{I}}$, где $P_i^\alpha = k_{S_m}^i(k_{S_{m-1}}^i(\ldots k_{S_1}^i(\mathbb{P})))$, $i \in \mathcal{I}$.*

***Предельное ядро** $\mathcal{C}_{k\alpha}^{lim}(\mathcal{E}^{di})$ **типа k**α состоит из распределений $x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in X$ таких, что:*

(i) $\sum\limits_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} e_i$,

(ii) $(x_i - e_i) : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *есть* P_i^{lim}*-измеримое для всех* $i \in \mathcal{I}$.

(iii) $\nexists S \subseteq \mathcal{I} : \exists y^S = (y_i)_S \mid \forall\, i \in S$, $y_i \in X_i$ *такое, что* $(y_i - e_i)$ *есть* $k_S^i(\mathbb{P}^\alpha)$*-измеримое,* $y_i \succ_i x_i$ & $\sum_S (y_i - e_i) = 0$.

*Предельное ядро типа $k\alpha$ при $\alpha = \emptyset$ называется **предельным k-ядром**.*

***Предельное ядро** $\mathcal{C}^{lim}(\mathcal{E}^{di})$ состоит из распределений, принадлежащих каждому $k\alpha$-ядру для всех последовательностей α, т. е.*

$$\mathcal{C}^{lim}(\mathcal{E}^{di}) = \bigcap_{\alpha} \mathcal{C}_{k\alpha}^{lim}(\mathcal{E}^{di}).$$

Применяя утверждение 5.1, с учётом единственности предельной информации (Маракулин, 2009) заключаем

Следствие 5.3. *Пусть предпочтения потребителей заданы вогнутыми непрерывными функциями полезности и информационное правило $k = (k_S)_{S\in C}$ это монотонное правило деления информации. Тогда предельное ядро и предельное k-ядро непустые.*

Обратимся далее к реплицированным моделям. Репликой экономики с дифференцированной информацией объёма $r \in \mathbb{N}$ назовём модель экономики $\mathcal{E}_r^{di}$, в которой каждому потребителю исходной модели $\mathcal{E}^{di}$ сопоставляется r точных копий в $\mathcal{E}^{di}_r$. Агенты из $\mathcal{E}^{di}_r$ нумеруются двойным индексом (i,m), $i \in \mathcal{I}$, $m = 1,\ldots,r$ и при этом полагается $X_{im} = X_i$, $\omega_{im} = \omega_i$. Предпочтения агентов, определённые и принимающие значение в X_{im}, задаются как $\mathcal{P}_{im} = \mathcal{P}_i$. Информация, которой владеют агенты, также неизменна в пределах заданного типа $P_{im} = P_i$, $\forall\, i,m$. Распределению $x = (x_i)_\mathcal{I}$ модели $\mathcal{E}^{di}$ поставим в соответствие распределение $x^r = (x^r_{im})$ из реплики по правилу $x_{im} = x_i\ \forall\, i,m$.

Определение 6. *Назовём распределение $x = (x_i)_\mathcal{I}$ априорным приватным равновесием Эджворта в модели $\mathcal{E}^{di}$, если $x^r \in \mathcal{C}(\mathcal{E}^{di}_r)$ для каждого натурального $r = 1,2,\ldots$ Пусть $\mathcal{C}^e(\mathcal{E}^{di})$ обозначает множество всех априорных приватных (частных) равновесий Эджворта.*

Рассмотрим далее наиболее характерные свойства равновесий Эджворта и прежде всего вопрос их существования и взаимосвязи с априорным частным равновесием.

Теорема 5.1. *Пусть предпочтения каждого индивида задаются непрерывной и вогнутой на $(\mathbb{R}^l_+)^\Omega$ функцией полезности. Тогда априорные приватные равновесия Эджворта существуют.*

Замечание 5.1. Возможно это и не самая сильная формулировка теоремы существования[24], однако всё же это важный и нетривиальный математический результат, достоинством которого является простота формулировки и сравнительная простота доказательства.

Следующим шагом анализа является сопоставление равновесий Эджворта с так называемым нечётким ядром и последующей его характеризацией в стоимостных категориях. Сделаем это учитывая несимметрично распределённую информацию.

Напомним, что любой вектор

$$t = (t_1,\ldots,t_n) \neq 0, \quad 0 \le t_i \le 1 \ \ \forall\, i \in \mathcal{I}$$

отождествляется с нечёткой коалицией, где вещественные t_i интерпретируются как мера участия потребителя i в данной коалиции. Говорят, что коалиция t доминирует (блокирует) распределение $x \in \mathcal{A}(X)$, если найдётся такой $y^t \in \prod_\mathcal{I} X_i$, что

$$y^t_i - e_i \in \mathcal{L}_i,\ \forall\, i \in \mathcal{I} \ \ \& \ \ \sum_{i\in\mathcal{I}} t_i y^t_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} t_i e_i \iff \sum_{i\in\mathcal{I}} t_i(y^t_i - e_i) = 0 \qquad (13)$$

[24] Действительно важна только непрерывность и выпуклость предпочтений (т. е. выпуклость верхних лебеговских множеств), а вот возможность задания их через функции полезности несущественна, хотя и применяется в изложенном ниже доказательстве. Важна также компактность множества всех сбалансированных распределений, а конечномерность пространства продуктов фактор несущественный.

и при этом

$$y_i^t \succ_i x_i \quad \forall\, i \in \operatorname{supp}(t) = \{i \in \mathcal{I} \mid t_i > 0\}. \tag{14}$$

Для ненасыщенных на $\mathcal{L}_i$ предпочтений условия (13), (14) можно эквивалентным образом переписать в виде[25]

$$0 \in \sum_{i \in \mathcal{I}} t_i[(\mathcal{P}_i(x_i) - e_i) \cap \mathcal{L}_i].$$

Множество всех неблокируемых по нечётким коалициям достижимых состояний, обозначенное как $\mathcal{C}^f(\mathcal{E}^{di})$, называется *нечётким ядром*, которое для выпуклых ненасыщенных предпочтений можно охарактеризовать таким образом:

$$x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E}^{di}) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \notin \operatorname{co} \bigcup_{i \in \mathcal{I}} [(\mathcal{P}_i(x_i) - e_i) \cap \mathcal{L}_i]. \tag{15}$$

Теорема 5.2. *Пусть у каждого индивида множество $\mathcal{P}_i(x_i)$ выпуклое и открытое в X_i, $\forall\, x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in \mathcal{A}(X)$. Тогда априорные частные равновесия Эджворта и элементы нечёткого ядра совпадают, т. е.*

$$\mathcal{C}^e(\mathcal{E}^{di}) = \mathcal{C}^f(\mathcal{E}^{di}).$$

Доказательство теоремы 5.2. Чтобы установить теорему, достаточно показать, что $\mathcal{C}^e(\mathcal{E}^{di}) \subseteq \mathcal{C}^f(\mathcal{E}^{di})$. Предполагая противное, найдём $x \in \mathcal{C}^e(\mathcal{E}^{di})$, который доминируется нечёткой коалицией $t \neq 0$. По определению найдётся $y^t \in \prod_{\mathcal{I}} X_i$ такой, что выполнены соотношения (13), (14). Далее для $t_i > 0$ положим

$$z_i = (t_i/s_i) y_i^t + (1 - t_i/s_i) e_i \quad \Longleftrightarrow \quad s_i(z_i - e_i) = t_i(y_i^t - e_i),$$

где *рациональные* s_i удовлетворяют условию $t_i \leq s_i \leq 1$, а для $t_i = 0$ определим $s_i = 0$. По построению $z_s = (z_i)_{\mathcal{I}} \in \prod_{\mathcal{I}} X_i$ и для каждого индивида поток $z_i - e_i$ является измеримым относительно того же разбиения (алгебры), относительно которого измеримо $y_i^t - e_i$, наконец

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} s_i(z_i - e_i) = 0.$$

Так как по предположению $\mathcal{P}_i(x)$ относительно открыты и выпуклы, то величины s_i можно выбрать так, чтобы выполнялось $z_i \in \mathcal{P}_i(x)$ для всех i, удовлетворяющих $s_i > 0$. Однако последнее противоречит выбору $x \in \mathcal{C}^e(\mathcal{E}^{di})$. Теорема 5.2 доказана. ■

Помимо рассмотренной выше характеризации (15) нам потребуется и другая характеризация нечёткого ядра. С этой целью рассмотрим множества

$$\Omega_i(x_i) = \operatorname{co}(\mathcal{P}_i(x_i) \cup \{e_i\}), \quad i \in \mathcal{I}.$$

[25] Допуская небрежность, здесь и ниже мы иногда отождествляем вектор с одноэлементным множеством, содержащим его.

В Маракулин (2003) была дана характеризация нечёткого ядра с использованием этих множеств в моделях обмена с симметричной информацией. Её надлежащая адаптация для асимметрично информированных индивидов даёт следующий результат:

Утверждение 5.2. *Распределение $x \in \mathcal{A}(X)$ является элементом нечёткого ядра если и только если*

$$\prod_{\mathcal{I}} \Omega_i(x_i) \bigcap \{(z_1, \ldots, z_n) \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i\} \bigcap (\prod_{\mathcal{I}} \mathcal{L}_i + (e_1, \ldots, e_n)) = \{(e_1, \ldots, e_n)\}. \tag{16}$$

Отметим кстати, что в отличии от (15) здесь предпочтения индивидов могут быть и насыщенными.

С помощью (16) мы докажем следующее удобное в приложениях разного рода следствие, которое позволит нам установить основной результат этого раздела.

Следствие 5.4. *Пусть $x \in \mathcal{A}(X)$ и $\mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset$ для всех $i \in \mathcal{I}$. Тогда $x \in \mathcal{C}^f(\mathcal{E}^{di})$ влечёт*:

$$\prod_{\mathcal{I}} (\mathcal{P}_i(x) + \mathrm{co}\{0, e_i - x_i\}) \bigcap \{(z_1, \ldots, z_n) \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} z_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i\} \bigcap$$

$$\bigcap (\prod_{\mathcal{I}} \mathcal{L}_i + (e_1, \ldots, e_n)) = \emptyset. \tag{17}$$

Теорема 5.3. *Каждое априорное приватное равновесие Эджворта является приватным квазиравновесием.*

Данная теорема, совместно с теоремой 5.1, является основным результатом настоящего раздела и содержательно означает, что априорное частное ядро стягивается к равновесию того же типа, заданному по определению 4. Однако, чтобы это высказывание получило безупречный математический смысл, условия теоремы необходимо пополнить требованиями, обеспечивающими полноценные равновесные свойства у любого квазиравновесия. Отметим также, что попытка доказать данную теорему основываясь на характеризации (15) сталкивается со значительными математическими затруднениями, поскольку множества $(\mathcal{P}_i(x_i) - e_i) \cap \mathcal{L}_i$ имеют *пустую* внутренность: следовательно, нельзя гарантировать, что разделяющий множество в правой части (15) и точку '0' функционал не обратится в нуль на $\mathcal{L}_i$, что противоречит условию (ii) определения 4 квазиравновесия.

Понятию приватного равновесия и, следовательно, вальрасовского равновесия в ожиданиях можно дать чисто договорное описание, основанное на понятии нечётко договорного распределения, см. определение 2 на с. 23. Я считаю, что это содержательно значимое понятие, гораздо более естественное нежели равновесие Эджворта. Более того, в рамках модели с асимметрично распределённой информацией понятие нечётко договорного распределения работает столь же эффективно как и в симметричном случае: единственное отличие от определения 2 состоит в дополнительном требовании измеримости продуктовых потоков, получаемых агентом по договорам, измеримости относительно индивидуальной (частной) информации. Полученное таким образом понятие в рамках модели $\mathcal{E}^{di}$ будет иметь следующее характеристическое свойство.

Утверждение 5.3. *Распределение x является нечётко договорным тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{co}\{x_i, e_i\} \cap \mathcal{P}_i(x_i) = \emptyset, \quad \forall\, i \in \mathcal{I}, \tag{18}$$

$$\prod_{\mathcal{I}}[(\mathcal{P}_i(x_i) + \mathrm{co}\{0, e_i - x_i\}) \cup \{e_i\}] \bigcap \{(z_1, \ldots, z_n) \mid \sum_{i\in\mathcal{I}} z_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} e_i\} \bigcap$$
$$\bigcap (\prod_{\mathcal{I}} \mathcal{L}_i + (e_1, \ldots, e_n)) = \{(e_1, \ldots, e_n)\}. \tag{19}$$

Как мы видим, единственное отличие от характеризации в симметричном случае состоит в том, что в формуле (19) в пересечении появляется ещё один элемент, как раз определяющий измеримость агрегированного договора $z - e$. Доказательство утверждения 5.3 вполне следует доказательству утверждения 4.1. В то же время из включения

$$\Omega_i(x_i) \subset (\mathcal{P}_i(x_i) + \mathrm{co}\{0, e_i - x_i\}) \cup \{e_i\}, \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$$

и утверждения 5.2 следует, что нечётко договорные распределения являются элементами нечёткого ядра. С другой стороны, следствие 5.4 показывает (сравните (17) и (19)), что различие в понятиях почти незначимое...

6. REE-РАВНОВЕСИЕ И ДОГОВОРНОЕ ИНТЕРИМ-ЯДРО

В последующих рассуждениях и анализе будет полезно иметь следующее временные представления о различных этапах договорных процессов в экономике с дифференцированной информацией.

F Today afternoon: Consumption of contracts	$\Rightarrow$	A Today after afternoon: New contracting	$\Rightarrow$	$\cdots$ Night	$\Rightarrow$	B Tomorrow before afternoon: Recontracting	$\Rightarrow$	F Tomorrow afternoon: Consumption of contracts

Timing of contractual processes

6.1. Предварительный анализ

Прежде чем перейти к описанию формальных конструкций и построений, попробуем разобраться собственно с концепцией REE-равновесия (в рациональных ожиданиях). Что происходит?

Некто (господь Бог) в некоторый промежуточный момент между сегодня и завтра (на диаграмме ночью) предъявляет на рассмотрение агентам цены, точнее функцию цен $p : \Omega \to \mathbb{R}^l$, по которым завтра будет осуществляться торговля. Осознав функцию $p(\cdot)$, агенты извлекают из неё информацию следующим образом. Они знают, что когда наступит завтра, и они увидят (на мониторах, в магазине) реализованную цену $\bar{p}$, то это означает, что (утром до обеда) реализовалось элементарное событие из множества

$$p^{-1}(\bar{p}) = \{\omega \in \Omega \mid p(\omega) = \bar{p}\}.$$

Кроме того, данный агент i обладает собственной информацией P_i (разбиением Ω) о событиях завтрашнего дня. Поэтому сегодня он знает, что завтра он будет способен различить какое именно событие из числа $p^{-1}(\bar{p}) \cap P_i(\omega) \neq \emptyset$, $\omega \in \Omega$ реализовалось. Однако это означает, что сразу после получения информации о функции $p : \Omega \to \mathbb{R}^l$ индивид i способен сформировать свои планы покупок и продаж, т. е. для каждого $E = E(\bar{p}, \omega) = p^{-1}(\bar{p}) \cap P_i(\omega) \neq \emptyset$ ему нужно найти вектор $v_i(E) \in \mathbb{R}^l$, который бы максимизировал полезность индивида при условии, что реализовалось событие E. В таком случае потребительским набором индивида становится набор $e_i(\omega) + v_i(E)$, $\omega \in E$. Причём в равновесии ситуация такова, что какое бы элементарное событие не произошло завтра, всегда будет баланс спроса и предложения (покупок и продаж).

Представим себе, что Бог послал цены, однозначно различающие все состояния мира... Тогда в промежуточной стадии, после получения ценового сигнала, каждый индивид получит способность понимать (различать) каждое состояние мира и, значит, для каждого из будущих элементарных событий должен сложиться свой собственный рынок, на котором можно рассматривать конкурентные равновесия и ядро в обычном смысле модели Эрроу–Дебре. Конечно, те цены которые послал Бог и должны быть ценами равновесия для каждого из рынков, заданных состояниями природы. Сказанное легко проверяется непосредственно из определения равновесия в рациональных ожиданиях. Но что с ядром? Без сомнения в данном случае в качестве ядра нужно взять декартово произведение ядер — так будут получены и распространены на рассмотренный случай все известные теоретические результаты. Таким образом

$$\sigma(p) = \Omega^* \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}(\mathcal{E}^{di}) = \prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{C}(\mathcal{E}^{di}(\omega)). \tag{20}$$

Прежде чем перейти к рассмотрению общего случая и поиску адекватного представления для ядра и равновесия в рациональных ожиданиях, рассмотрим следующий модельный пример.

Предположим $\Omega = \{a, b, c\}$ и имеется три агента $\mathcal{I} = \{1, 2, 3\}$, с начальной информацией

$$P_1 = \{\{a\}, \{b, c\}\}, \quad P_2 = P_3 = \{\{a, b\}, \{c\}\}.$$

Предположим, природа послала ценовой сигнал такой, что $p' = p(a) = p(b) \neq p(c) = p''$. Что таким образом произошло? Агентам была передана информация не только о разных вариантах завтрашних цен, но и сообщено о возможности различать будущие события $E' = \{a, b\}$ и $E'' = \{c\}$. Конечно, в данном примере это оказалось полезным только для первого индивида, который стал обладателем совершенной информации. Однако, так или иначе разбиение $\{E', E''\}$ это та информация, которой теперь владеет каждый индивид и каждый знает, что остальные это тоже знают (общее знание: common knowledge). Таким образом, уже сегодня могут сложиться и начать функционировать рынки будущих покупок и продаж, специфицированных событиями E' или E''. Здесь для E' каждая сделка начинается с преамбулы: «если произошло E', то...»; для E'' аналогично. А что происходит в соответствии с концепцией равновесия в рациональных ожиданиях? Здесь возможна следующая трактовка:

Для $E' = \{a, b\}$:

$i = 1,\ \omega = a$, набор $x_1(a)$ решает задачу

$$u_1(\varphi_a^1(y_1(a)), *, *) \to \max, \ \ s.t. \ \ y_1(a) \geq 0 \ \ \& \ \ \langle p', y_1(a) - e_1(a) \rangle \leq 0;$$

$i = 1,\ \omega = b$, набор $x_1(b)$ решает задачу

$$u_1(*, \varphi_b^1(y_1(b)), *) \to \max, \ \ s.t. \ \ y_1(b) \geq 0 \ \ \& \ \ \langle p', y_1(b) - e_1(b) \rangle \leq 0;$$

$i = 2,\ E = \{a, b\}$, набор $x_2 = x_2(a, b)$ решает задачу (с учётом $e_2(a) = e_2(b)$)

$$u_2(\varphi_a^2(y_2(a)), \varphi_b^2(y_2(b)), *) \to \max, \ \ s.t. \ \ y_2(a) = y_2(b) \geq 0 \ \ \& \ \ \langle p', y_2 - e_2(a) \rangle \leq 0.$$

$i = 3,\ E = \{a, b\}$, набор $x_3 = x_3(a, b)$ решает задачу (с учётом $e_3(a) = e_3(b)$)

$$u_3(\varphi_a^3(y_3(a)), \varphi_b^3(y_3(b)), *) \to \max, \ \ s.t. \ \ y_3(a) = y_3(b) \geq 0 \ \ \& \ \ \langle p', y_3 - e_3(a) \rangle \leq 0;$$

Баланс: $x_1(a)+x_2(a)+x_3(a) = e_1(a)+e_2(a)+e_3(a)$ & $x_1(b)+x_2(b)+x_3(b) = e_1(b)+e_2(b)+e_3(b)$.

Для $E'' = \{c\}$:

$i = 1,\ \omega = c$, набор $x_1(c)$ решает задачу

$$u_1(*, *, \varphi_c^1(y_1(c))) \to \max, \ \ s.t. \ \ y_1(c) \geq 0 \ \ \& \ \ \langle p'', y_1(c) - e_1(c) \rangle \leq 0;$$

$i = 2,\ \omega = c$, набор $x_2(c)$ решает задачу

$$u_2(*, *, \varphi_c^2(y_2(c))) \to \max, \ \ s.t. \ \ y_2(c) \geq 0 \ \ \& \ \ \langle p'', y_2(c) - e_2(c) \rangle \leq 0;$$

$i = 3,\ \omega = c$, набор $x_3(c)$ решает задачу

$$u_3(*, *, \varphi_c^3(y_3(c))) \to \max, \ \ s.t. \ \ y_3(c) \geq 0 \ \ \& \ \ \langle p'', y_3(c) - e_3(c) \rangle \leq 0;$$

Баланс: $x_1(c) + x_2(c) + x_3(c) = e_1(c) + e_2(c) + e_3(c)$.

Как это видно из предъявленных соотношений, события E' и E'' в рамках общей модели генерируют вполне независимые экономические структуры, подмодели, для которых редуцированное на данное событие REE-распределение обладает специфическими равновесными свойствами. При этом в подмодели для $E' = \{a, b\}$ имеется два характерных момента:

(i) ***цены*** при элементарных событиях a и b ***совпадают***;

(ii) ***1-й индивид***, который способен различать события a и b, в подмодели ***представлен двумя*** разными ***задачами*** потребителя (общее только цены p'), с разными функциями полезности — $\varphi_a^1(\cdot)$ и $\varphi_b^1(\cdot)$. Можно утверждать, что ***индивид 'раздваивается'***: одна его часть работает на рынке заданном событием a, а другая по b.

Отметим важную взаимосвязь между пунктами (i) и (ii): если бы (i) нарушилось, т. е. если бы цены в состояниях a и b стали бы различными, то 'раздвоились' бы все агенты и произошло бы распадение рынка на две части... Именно в силу (i) и неспособности некоторых индивидов различать события и образуется их общий рынок. Попробуем разобраться в сложившейся ситуации подробнее. Здесь вновь будет удобно использовать договорной подход.

6.2. Договорной подход и дифференцированные агенты

В соответствии с общими положениями договорного подхода, первое что требуется определить — это множество W допустимых договоров, корректно отражающих модельный контекст. Выше мы постулировали, что контракт это кортеж отображений $v_i : \Omega \to \mathbb{R}^l$, $i \in \mathcal{I}$, удовлетворяющий требованиям измеримости (8) и баланса (9); напомним их:

$$\forall\, i \in \mathcal{I}, \quad v_i(\cdot) \text{ измеримо относительно } P_i, \quad \forall\, \omega \in \Omega \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} v_i(\omega) = 0. \tag{21}$$

Однако в какой мере это соответствует концепции REE в свете рассмотренного выше примера? Главное, каким образом в контракте и договорном взаимодействии индивидов отражается возможность раздвоения (разложения в пару), как в рассмотренном выше примере, а в общем случае — размножения индивидов в зависимости от того, какой информацией они обладают. По-видимому это нужно специально постулировать.

С этой целью образуем новое множество индивидов, которые индексируются парами вида (i, E), где первая компонента это номер (имя) индивида, а $E \in P_i$ это элемент его информационного разбиения. Здесь индивида (i, E) можно понимать как один из возможных вариантов *завтрашней* реализации агента i, соответствующий знаниям этого агента. Итак, положим

$$\Im = \{(i, E) \mid i \in \mathcal{I}, \;\; E \in P_i\}.$$

Далее определим контракты, которые 'двойной агент' способен заключать. По смыслу конструкции такой агент может жить и функционировать только если случится событие

E, поэтому для $(i,E) \in \Im$ определим

$$v_i^E : \Omega \to \mathbb{R}^l : \quad v_i^E(\omega) = v_i^E(\omega'),\ \forall\, \omega, \omega' \in E \ \ \& \ \ v_i^E(\omega) = 0,\ \forall\, \omega'' \in \Omega \setminus E \iff \tag{22}$$

$$v_i^E(\cdot) \ \ P_i - \text{измеримо} \ \ \& \ \ \operatorname{supp}(v_i^E) = E \in P_i.$$[26]

Конечно, говорить о кортеже $(v_i^E)_{\Im}$ как о контракте будет возможно только если выполнено балансовое ограничение

$$\sum_{\Im} v_i^E = 0. \tag{23}$$

Чтобы индивид $(i,E) \in \Im$ смог функционировать как настоящий экономический агент, его нужно оснастить запасами и предпочтениями. Положим

$$e_i^E = e_i \cdot \chi^E, \quad E \in P_i \ \ \& \ \ (i,E) \in \Im,$$

где $\chi_E(\cdot)$ это характеристическая функция множества $E \subseteq \Omega$ и пусть

$$\mathcal{L}^E = \{ y \cdot \chi^E(\cdot) \in L \mid y \in \mathbb{R}^l \}$$

соответствующее индивиду $(i,E) \in \Im$ подпространство (размерности l) в пространстве контингентных продуктов $L = (\mathbb{R}^l)^\Omega$. Далее зададим предпочтения и потребительские множества. Положим

$$X_i^E = (\mathcal{L}^E + e_i^E) \cap X_i$$

и определим на X_i^E отношение $\succ_i^E$ по формуле

$$y_i^E \succ_i^E x_i^E \iff \exists z_i^{\Omega\setminus E} : \Omega \setminus E \to \mathbb{R}^l \mid \ (y_i^E, z_i^{\Omega\setminus E}) \succ_i (x_i^E, z_i^{\Omega\setminus E}),$$

что можно также переписать в эквивалентном виде как

$$\mathcal{P}_i^E(x_i^E) = [\mathcal{P}_i(x_i) \cap (x_i + \mathcal{L}^E)] \cdot \chi^E, \quad for \ \ x_i^E = x_i \cdot \chi^E.$$

В силу сделанных выше предположений (5) – (7) в контексте экономики с дифференцируемой информацией, это корректный способ задания предпочтения. Отметим, что всегда имеет место

$$\sum_{E \in P_i} \mathcal{P}_i^E(x_i^E) \subset \mathcal{P}_i(x_i),$$

однако обратное неверно. В итоге указанных построений мы приходим к соответствующей модели экономики $\mathcal{E}^{\Im}$.

Итак, я вижу две возможности реализации договорного подхода в моделях с асимметрично информированными индивидами:

---

[26] Отметим, что таким образом любое отображение $v_i(\cdot)$, фигурирующее в определении контракта (9) и измеримое относительно P_i, можно разложить в прямую сумму отображений типа v_i^E, $E \in P_i$.

(i) Множество агентов то же что в исходной модели экономики и контракт полностью определяется условиями (21).

(ii) Множество агентов меняется на $\Im$, к которым применяется определение контракта (22)–(23).

Данные возможности приводят к разным понятиям договорных распределений и соответствующих им понятий ядра и равновесия. В первом случае это априорное частное ядро и равновесие (аналог WEE), во втором это *новые* понятия ядра и равновесия, которые я бы назвал ядром и равновесием с *дифференцированными агентами*[27]. Вариант (i) анализировался в предыдущих разделах, обсудим далее второй вариант, который в конечном счете выводит нас на REE-равновесие.

Рассмотрим прежде всего простейшую возможность ввести ядро по аналогии со стандартным случаем, но уже в описанной выше модели с двойниками; я назвал это D-ядром.

Определение 7. *D-ядро $\mathcal{C}^d(\mathcal{E}^{di})$ модели экономики $\mathcal{E}^{di}$ с асимметрично информированными агентами состоит из распределений $x = (x_i)_\mathcal{I} \in X$ таких, что:*

(i) $\sum\limits_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} e_i,$

(ii) $(x_i - e_i) : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *is P_i-measurable for all $i \in \mathcal{I}$,*

(iii) $\nexists S \subseteq \Im : \exists y^S = (y_i^E)_{(i,E)\in S} \mid \forall\,(i,E) \in S\ y_i^E \in X_i^E$ *is such that* $y_i^E \succ_i^E x_i^E$ & $\sum_{(i,E)\in S}(y_i^E - e_i^E) = 0.$

Как это видно, единственное, но принципиальное отличие D-ядра от приватного состоит в том, что при доминировании распределения коалиции создаются из двойников агентов данной экономики. Тем самым в ядро этого типа попадают распределения, реализуемые стабильной системой договоров, стабильной в промежуточной стадии реализации неопределённости, т. е. тогда, когда каждый агент экономики понимает возможное в будущем состояние природы $\omega \in \Omega$ (еще не реализовалось!) пока-что только в виде $P_i(\omega)$. Здесь также могут складываться коалиции из двойников — ибо неопределённость всё ещё окончательно не разрешена. Позже, наверное, о состоянии ω индивиды узнают больше, но когда это случится, договоры уже будут реализованными. Кроме того, должно быть понятно, что здесь нет возможности для обмана, ибо если более информированный агент сообщит ложную информацию — ω' вместо истинного ω — о состоянии мира, то это не может принести ущерба менее информированным индивидам, ибо в обоих этих случаях по валовому контракту $(v_i)_\mathcal{I}$ эти индивиды имеют тот же самый вектор взаимных поставок, ибо в силу (8) имеем $v_i(\omega') = v_i(\omega)$ при $\omega', \omega \in P_i(\omega)$.

В части существования D-ядра достаточно отметить, что здесь вполне работоспособна

[27] Дифференцированная информация о будущем индуцировала в настоящем дифференциацию и ‘размножение’ агентов в будущем — в зависимости от информации разные агенты по разному ‘отражаются’.

теорема 5.1 с более-менее несложными модификациями, вызванными размножением агентов — игра экономики по-прежнему сбалансирована, а это главное, что нужно для существования ядра.

Обратимся далее к понятию равновесия, которое с договорной точки зрения вполне соответствует понятию D-ядра. Мы начнём анализ с вывода условий, характеризующих возможный взаимовыгодный обмен в модели с дифференцированными агентами: это ещё одна лемма о взаимовыгодном контракте.

Лемма 6.1 (о взаимовыгодном контракте у дифференцированных агентов). *Пусть $S \subseteq \mathcal{I}$, $S \neq \emptyset$ некоторая коалиция и $A \subseteq \Omega$ событие, которое понимают все члены коалиции S и пусть*

$$S(\Im) = \{(i, E) \mid i \in S,\ E \in P_i,\ E \subseteq A\}.$$

Тогда, если у членов коалиции $S(\Im)$ ***не существует*** *взаимовыгодного обмена контингентными продуктами (контракта), то найдутся такой вектор $p \in (\mathbb{R}^l)^A$, $p \neq 0$, и такие векторы $q_i \in (\mathbb{R}^l)^A$, $i \in S$, что*

$$\forall\, i \in S\ \forall\, E \in P_i,\ E \subseteq A \quad \sum_{\omega \in E} q_i(\omega) = 0 \tag{24}$$

и при этом

$$\forall\, i \in S \quad p + q_i \neq 0 \quad \& \quad \langle \mathcal{P}_i^E(x_i^E), p + q_i \rangle \geq \langle x_i^E, p + q_i \rangle \quad \forall\, E \in P_i,\ E \subseteq A. \tag{25}$$

Обратное: пусть существуют векторы, удовлетворяющие (24), (25). Тогда у членов коалиции $S(\Im)$ ***не существует*** *взаимовыгодного контракта, в котором нетривиально участвует индивид $(i, E) \in S(\Im)$ для которого неравенство (25) строгое*[28]*.*

Доказательство леммы 6.1 осуществляется тем же методом, что и леммы 5.1 с одной модификацией, вызванной спецификой D-агентов: в соответствующем пересечении вместо множеств $\mathcal{P}_i(x_i)$ нужно взять $\sum_{E \in P_i,\ E \subseteq A} \mathcal{P}_i^E(x_i^E)$; мы опустим прочие подробности. Отметим также совпадение условия (24) с аналогичным требованием (10) в лемме 5.1.

Лемма 6.1 также как и лемма 5.1 имеет важное в дальнейшем анализе следствие, которое мы формулируем ниже с целью полноты изложения и с тем, чтобы проявить специфику договорного подхода в случае дифференцированных агентов.

Следствие 6.1. *В условиях леммы 6.1 пусть предпочтения описываются дифференцируемыми функциями полезности и пусть $x = (x_i)_{\mathcal{I}}$ — внутреннее относительно A и S распределение*[29]*. Тогда у коалиции $S(\Im)$* ***не существует*** *взаимовыгодного контракта*

[28] См. ссылку выше.

[29] См. следствие 5.1.

тогда и только тогда, когда найдутся такой вектор $p \in (\mathbb{R}^l)^A$, $p \neq 0$ *и такие* $\lambda_{i,E} \geq 0$, $(i, E) \in S(\Im)$, *не для всех* $E \in P_i$ *равные нулю* $i \in S$, *что*

$$\forall\, E \in P_i,\ E \subseteq A \quad \lambda_{i,E} \sum_{\omega \in E} \nabla_\omega u_i(x_i) = \sum_{\omega \in E} p(\omega) \quad \forall\, i \in S.$$

Отметим отличия со следствием 5.1: множители $\lambda_{i,E}$ имеют двойной индекс и, вообще говоря, некоторые из них могут обращаться в 0.

Для того, чтобы сформулировать понятие D-равновесия теперь достаточно к заключению леммы добавить бюджетные равенства.

Определение 8. *Пара* (x, p), $x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in X$, $p : \Omega \to \mathbb{R}^l$, $p \neq 0$ *называется приватным* ***D-квазиравновесием*** *(private D-quasi-equilibrium), если выполнены следующие требования:*

(i) $(x_i - e_i) : \Omega \to \mathbb{R}^l$ P_i*-измерима для всех* $i \in \mathcal{I}$,

(ii) $\langle p^E, (\mathcal{P}_i^E(x_i^E) - e_i^E) \rangle \geq 0, \quad \langle p^E, x_i^E - e_i^E \rangle = 0, \quad \forall\, (i, E) \in \Im$,

(iii) $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i$.

Если в пункте (ii) *все неравенства* ***строгие****, то пара* (x, p) *называется* ***D-равновесием****.*

Заметьте, что в данном определении $p(\cdot) \neq 0$ однако для некоторых $E \in P_i$, $i \in \mathcal{I}$ допустима возможность $p^E = p \cdot \chi^E \equiv 0$. Отметим также альтернативную форму представления условия (ii): $\forall\, (i, E) \in \Im$,

$$\sum_{\omega \in E} p(\omega) x_i(\omega) = \sum_{\omega \in E} p(\omega) e_i(\omega) \quad \&$$

$$\langle \sum_{\omega \in E} p(\omega), y \rangle \geq 0\ \forall\, y \in \mathbb{R}^l : (y \cdot \chi_E(\cdot) + x_i) \in \mathcal{P}_i(x_i).$$

Таким образом, здесь индивид типа (i, E) воспринимает цены в агрегированном виде, агрегированном по состояниям из E, что можно трактовать как форму ожидаемых при реализации события E цен и доходов. Также отметим, что если в последнее определение добавить требование

$$p(\omega) = p(\omega'), \quad \forall\, \omega, \omega' \in E \in P_i, \quad \forall\, i \in \mathcal{I},$$

то мы прийдём к понятию, обобщающему REE-равновесие в рациональных ожиданиях на случай более общих предпочтений.

Существование D-квазиравновесий можно доказать, используя те же методы, что применялись выше в отношении априорного частного квазиравновесия: переход к реплицированным моделям с последующим выходом на нечёткое ядро, элементам которого можно дать ценовую характеризацию в виде квазиравновесий.

В заключении раздела рассмотрим понятия D-ядра и D-равновесия, а также приватного ядра и равновесия на примере DIE-экономики, допускающим демонстрацию в рамках ящика Эджворта (несмотря на то, что пространство контингентных продуктов 4-х-мерное).

Пример 6.1. Рассмотрим следующую модель экономики обмена с асимметрично информированными индивидами. Пусть имеется 2 типа физически разных продуктов, 2 агента, 2 состояния природы и при этом 2-й агент способен их различать, а 1-й нет. Таким образом имеем:

$i = 1, 2$, $\Omega = \{a, b\}$, $P_1 = \{\Omega\}$, $P_2 = \{\{a\}, \{b\}\}$,

$\mathbb{R}^2$ — пространство продуктов,

$L = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ — пространство контингентных продуктов. Пусть $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^4_+$ и рассмотрим следующие функции полезности и начальные запасы:

$u_x = u_1(x(a), x(b)) = \ln(x_1(a)) + \ln(x_2(a)) + \ln(x_1(b)) + \ln(x_2(b))$,

$e_x = e_1 = ((3\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (3\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$;

$u_y = u_2(y(a), y(b)) = 2\ln(y_1(a)) + \ln(y_2(a)) + \ln(y_1(b)) + 2\ln(y_2(b))$,

$e_y = e_2 = ((1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}))$.

Таким образом, совокупные запасы в модели представлены вектором

$\bar{e} = (\bar{e}(a), \bar{e}(b)), \quad \bar{e}(a) = (5, 3), \quad \bar{e}(b) = (4, 4)$.

Далее предположим, что ***обмена информацией*** между агентами ***не происходит***. Из условия измеримости контракта $(v, -v)$, $v = (v(a), v(b)) \in L$ следует, что $v(a) = v(b) = w \in \mathbb{R}^2$ и, значит,

$$x(a) = e_x(a) + v(a) = e_x(b) + v(b) = x(b) = (3\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + (w_1, w_2).$$

Для 2-го индивида планируемые объёмы потребления в будущих состояниях будут различны, но их тоже можно выразить в терминах 2-мерного контракта (w_1, w_2):

$$y(a) = e_y(a) - v(a) = (1\tfrac{1}{2}, 2\tfrac{1}{2}) - (w_1, w_2), \quad y(b) = e_y(b) - v(b) = (\tfrac{1}{2}, 3\tfrac{1}{2}) - (w_1, w_2).$$

Постольку-поскольку 2-й агент не способен потреблять отрицательные объёмы, то

$$y(a) = (1\tfrac{1}{2}, 2\tfrac{1}{2}) - (w_1, w_2) \geq 0, \quad y(b) = (\tfrac{1}{2}, 3\tfrac{1}{2}) - (w_1, w_2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (w_1, w_2) \leq (\tfrac{1}{2}, 2\tfrac{1}{2})$$

и мы приходим к двумерному ящику Эджворта, записанному в потребительских планах 1-го агента, где

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq (x_1, x_2) \leq (4, 3)\}.$$

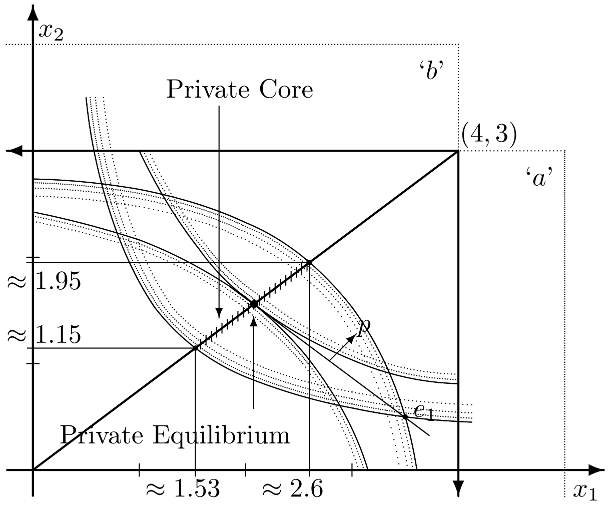

Рис. 2. *Приватное ядро и равновесие*

Границу Парето можно найти, применяя (например) 2-ю теорему благосостояния и заключая таким образом коллинеарность градиентов. В итоге приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{x_1} = \lambda(\frac{2}{5-x_1} + \frac{1}{4-x_1}), \\ \frac{2}{x_2} = \lambda(\frac{2}{4-x_2} + \frac{1}{3-x_2}), \quad \lambda > 0. \end{cases}$$

Исключая из системы $\lambda > 0$, получаем уравнение 3-го порядка, задающее границу Парето во внутренности ящика. Достаточно хорошим её приближением в пределах ящика является кривая, заданная явным уравнением $x_2 = \frac{3}{4}x_1$, т. е. диагональ ящика. Далее, если к уравнению границы Парето добавить бюджетное ограничение 1-го агента (у 2-го будет выполнено автоматически), то мы прийдём к системе, описывающей приватное равновесие. Так как из условий первого порядка цены должны быть коллинеарны градиенту, то находим

$$\langle \nabla u_1(x), x \rangle = \langle \nabla u_1(x), e_1(a) \rangle \quad \Rightarrow \quad 4 = \frac{7}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx \frac{25}{12} \approx 2.08, \quad x_2 \approx \frac{25}{16} \approx 1.56.$$

Результаты анализа представлены графически на рис. 2.

Рассмотрим далее D-ядро и равновесие. С этой целью найдём границу Парето в модели, редуцированной на состояния a, b. Для 'a' приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{x_1} = \lambda\frac{2}{5-x_1}, \\ \frac{2}{x_2} = \lambda\frac{1}{3-x_2}, \quad \lambda > 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_2 = \frac{6x_1}{x_1+5}.$$

Здесь «ядром» будет криволинейный отрезок на этой кривой, заключённый между точками пересечения с кривыми безразличия, проходящими через начальные запасы; здесь это будут точки $A \approx (1.36, 1.28)$ и $B \approx (2.59, 2.05)$.

Для 'b' система будет следующая:

$$\begin{cases} \frac{2}{x_1} = \lambda\frac{1}{4-x_1}, \\ \frac{2}{x_2} = \lambda\frac{2}{4-x_2}, \quad \lambda > 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_2 = \frac{4x_1}{8-x_1}. \tag{26}$$

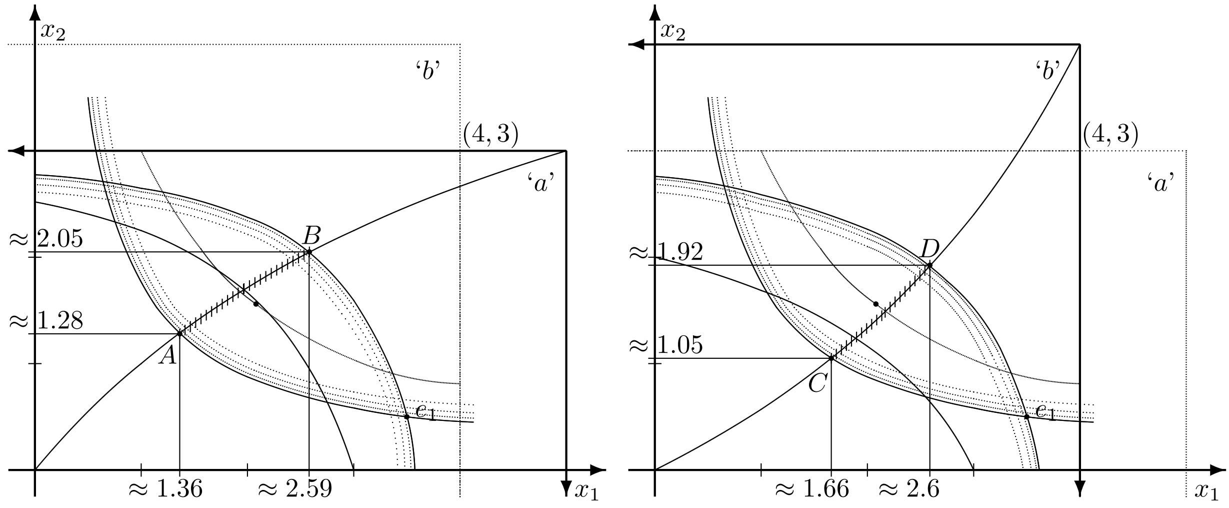

Рис. 3. *D-ядро: анализ в событиях 'a', 'b'*

«Ядру» соответствует криволинейный отрезок кривой, заключённый между точками $C \approx (1.66, 1.05)$ и $D \approx (2.6, 1.92)$. Графическое построение в рамках ящика Эджворта приведено на рис. 3. Далее сведём изложенные построения в единую картину, получая, таким образом, собственно D-ядро.

Действительно, в данном примере эффективно функционировать может только коалиция из всех игроков, ибо другие коалиции не могут заключить ненулевой контракт. Поэтому в качестве элементов D-ядра будут выступать распределения, оптимальные по Парето и индивидуально рациональные (не доминируются одноэлементными коалициями). Оптимальность по Парето распределения $(\bar{x}, \bar{x}, \bar{e}(a) - \bar{x}, \bar{e}(b) - \bar{x}) \in \mathbb{R}^8_+$ в данном контексте означает пустое пересечение трёх множеств:

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1(x(a), x(b)) > u_1(\bar{x}, \bar{x}), x(a) = x(b) = (x_1, x_2)\} \bigcap$$

$$\bigcap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_2^a(\bar{e}(a) - (x_1, x_2)) > u_2^a(\bar{e}(a) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2))\} \bigcap$$

$$\bigcap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_2^b(\bar{e}(b) - (x_1, x_2)) > u_2^b(\bar{e}(b) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2))\} = \emptyset.$$

Первое это множество строго предпочитаемых потребительских планов 1-го агента, записанное с учётом его неспособности различать элементарные события a и b. Два другие множества это множества всех предпочитаемых планов агентов-дубликатов агента 2 — его возможных реализаций в будущих событиях a и b. Все множества записаны в переменных, отвечающих потреблению 1-го индивида. Графическое численное построение для данного примера приведено на рис. 4, где изображено затенённое множество точек $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, представляющее из себя криволинейную область $ACDE$, границей которой являются фрагменты ядер в событиях 'a' и 'b', а также фрагменты кривых безразличия 1-го индивида и $(2, b)$. Заметьте, что здесь часть ядра для 'a', включающая конец B, отсекается кривой безразличия $(2, b)$ и в итоге рассматривается криволинейный отрезок AE, где $E \approx (2.47, 2.5)$.

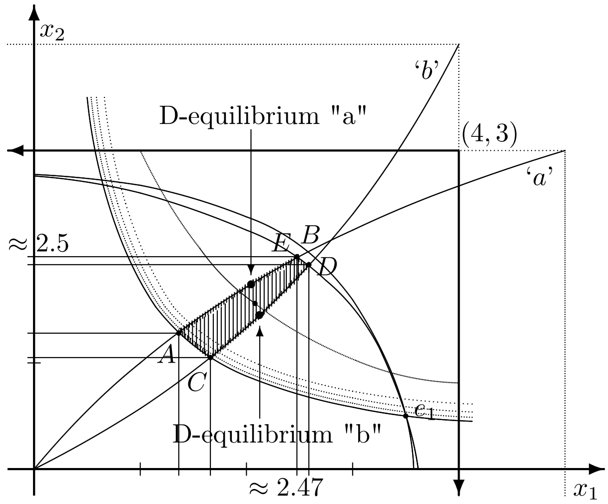

Рис. 4. *D-ядро: затенённая криволинейная область $ACDE$*

Далее в контексте примера рассмотрим понятие D-равновесия. Выражаясь коротко, здесь D-квазиравновесиями являются распределения, в которых реализованы равновесия в элементарных событиях 'a' и 'b' и только они. При этом в ***«дополняющем»*** элементарном событии ***цены равны нулю***; например для D-равновесия на основе события 'b' ***цены в событии 'a' равны нулю***. Вычислим далее эти равновесия. С учётом проведённого выше анализа, это можно сделать, добавляя к уравнению Парето границы бюджетное равенство 1-го индивида, вычисленное относительно цен $p = (p_1, p_2) = \nabla_x u_1(x, x) = (\frac{2}{x_1}, \frac{2}{x_2}) \Rightarrow \langle p, x\rangle = 4 = \frac{7}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \langle p, e_1(a)\rangle$. В итоге для '$a$' получаем следующую систему уравнений, решая которую находим равновесный потребительский план 1-го агента и равновесные цены:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{6x_1}{x_1+5} \\ \frac{7}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 6(4x_1 - 7) = x_1 + 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{47}{23}, \;\; x_2 = \frac{47}{27} \quad \Rightarrow \quad p = (23, 27).$$

Аналогичным образом, найдём (квази)равновесие для события 'b'. Получаем следующую систему уравнений для равновесного потребительского плана 1-го агента:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{4x_1}{8-x_1} \\ \frac{7}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4(4x_1 - 7) = 8 - x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{36}{17}, \;\; x_2 = \frac{36}{25} \quad \Rightarrow \quad p = (17, 25).$$

Итак, найдены следующие D-квазиравновесия:

$$p_a = (23, 27), \; p_b = 0, \; x(a) = x(b) = \left(\frac{47}{23}, \frac{47}{27}\right), \; y(a) = \left(\frac{68}{23}, \frac{34}{27}\right), \; y(b) = \left(\frac{45}{23}, \frac{61}{27}\right),$$

$$p_a = 0, \; p_b = (17, 25), \; x(a) = x(b) = \left(\frac{36}{17}, \frac{36}{25}\right), \; y(a) = \left(\frac{49}{17}, \frac{39}{25}\right), \; y(b) = \left(\frac{32}{17}, \frac{64}{25}\right).$$

Здесь в обоих случаях вектор y находился по формулам $y(a) = \bar{e}(a) - x(a)$ и $y(b) = \bar{e}(b) - x(b)$.

Сейчас мы можем задать весьма важный для договорного подхода и интересный содержательно вопрос: являются ли все найденные квазиравновесия распределениями, которые действительно способны реализоваться в реальной жизни и какие они имеют шансы на длительное существование? Ответ даёт договорной подход: долгоживущее распределение должно быть, по крайней мере, устойчивым снизу относительно частичных разрывов реализующих его договоров. Однако равновесие, индуцированное состоянием 'a', не удовлетворяет этому критерию. Чтобы убедится в этом нужно вычислить у всех агентов производные по направлению к начальным запасам: они должны быть неположительные. Однако ненулевая производная может быть только у агента-дубликата $(2, b)$. Проводя вычисления находим:

$$\nabla_y u_2^b(y) = (\tfrac{1}{y_1}, \tfrac{2}{y_2}), \quad y(b) = (\tfrac{45}{23}, \tfrac{61}{27}) \quad \Rightarrow \quad \nabla_y u_2^b(y(b)) = (\tfrac{23}{45}, \tfrac{54}{61}) \quad \Rightarrow$$

$$e_2(b) - y(b) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{2}) - (\tfrac{45}{23}, \tfrac{61}{27}) = (\tfrac{-67}{23\cdot 2}, \tfrac{67}{54}) \quad \Rightarrow$$

$$\langle \nabla_y u_2^b(y), e_2(b) - y(b) \rangle = \langle (\tfrac{23}{45}, \tfrac{54}{61}), (\tfrac{-67}{23\cdot 2}, \tfrac{67}{54}) \rangle = \tfrac{67}{61} - \tfrac{67}{90} > 0.$$

Таким образом, производная полезности по направлению $e_2(b) - y(b)$ строго больше нуля и, следовательно, агент-дубликат $(2, b)$ будет частично рвать договоры... Другое квазиравновесие, индуцированное состоянием 'b', является устойчивым снизу, что показывает вычисление:

$$\nabla_y u_2^a(y(a)) = (\tfrac{2}{y_1}, \tfrac{1}{y_2}) = (\tfrac{34}{49}, \tfrac{25}{39}) \;\Rightarrow\; \langle \nabla_y u_2^a(y), e_2(a) - y(a) \rangle = \langle (\tfrac{34}{49}, \tfrac{25}{39}), (\tfrac{-47}{34}, \tfrac{47}{50}) \rangle = \tfrac{47}{78} - \tfrac{47}{49} < 0.$$

Таким образом, в отличии от предыдущего, это квазиравновесие имеет шансы на существование и, тем самым, состояние 'b', как определяющее жизнеспособное квазиравновесие, имеет в договорном процессе преимущество перед состоянием 'a'.

В заключение покажем, что других D-(квази)равновесий в данном примере не существует (следовательно, полноценные равновесия не существуют). Понять это можно рассуждая от противного. Предположим $p_a \neq 0$ и $p_b \neq 0$ цены равновесия. Тогда в силу пункта (ii) определения 8 и необходимых условий экстремума будем иметь: $\exists\ \alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ такие, что $\alpha \nabla_x u_1(x, x) = p_a + p_b$, $\beta \nabla_y u_2(y) = p_a$, $\gamma \nabla_z u_2(z) = p_b$ при $y = \bar{e}(a) - x$, $z = \bar{e}(b) - x$. При этом, однако для текущего набора потребительских планов должны также выполняться бюджетные равенства:

$$(p_a + p_b)x = (p_a + p_b)e_1(a) \;\Rightarrow\; (p_a + p_b)\perp(x - e_1(a)) = 0,\; w = (x - e_1(a)) = (x - e_1(b));$$

$$p_a y = p_a e_2(a) \quad \Rightarrow \quad p_a \perp (y - e_2(a)) = 0,\; -w = (y - e_2(a));$$

$$p_b z = p_b e_2(b) \quad \Rightarrow \quad p_b \perp (z - e_2(b)) = 0,\; -w = (z - e_2(b)).$$

Отсюда следует, что каждый из векторов p_a, p_b и $p_a + p_b$ ортогонален вектору $w \neq 0$. Следовательно, т. к. пространство двумерно, то все три градиента полезностей *попарно* *коллинеарны.* Значит, пара (x, y) должна быть оптимальна по Парето для 'a', а пара (x, z) для 'b'. Таким образом, вектор $x = (x_1, x_2)$ должен удовлетворять каждому из двух полученных выше уравнений Парето границы, но таких решений не существует. ■

6.3. Интерим ядро и REE-равновесие

Продолжая обсуждение введённой выше концепции D-ядра и равновесия рассмотрим следующий пример информационной асимметрии.

Пусть есть 2 агента, 1-й знает $\{\{a\}, \{b\}\}$, второй — $\{\{a, b\}\}$. Что будет в случае D-ядра? Главная специфика это то, что в коалициях $\{(1, a), (2, ab)\}$ и $\{(1, b), (2, ab)\}$ по информационным причинам обмен невозможен и, значит, их возможности по доминированию будут те же, что у одноэлементных коалиций (даже меньше). Действительно работоспособной будет только коалиция из всех игроков-двойников (заметьте, что это не то же самое, что в случае приватного ядра). Однако обеспечивает ли это нужную стабильность?

Действительно, если «завтра утром» реализовалось, например, элементарное событие 'a', то 1-й агент может предложить 2-му разорвать старый контракт $v = (v_1^a, v_1^b, v_2^{ab})$, $v_1^a = v_1^b = -v_2^{ab}$ и заключить новый w, если найдётся такой (w_1^a, w_1^b, w_2^{ab}), $w_1^a = w_1^b = -w_2^{ab}$, что

$$\varphi_a^1(w_1^a + e_1^a) > \varphi_a^1(v_1^a + e_1^a) \;\;\&\;\; \psi^2(w_2^{ab} + e_2^a, w_2^{ab} + e_2^b) > \psi^2(v_2^{ab} + e_2^a, v_2^{ab} + e_2^b).$$

Здесь важно, что у первого агента значимую роль играет только двойник 'a', а второй двойник 'b' играет роль болвана: так происходит потому, что событие 'a' уже реализовалось и 1-й агент это знает наверняка. Второй агент не способен получать новую информацию, но, чтобы заключить выгодную сделку, 1-й индивид подыгрывает ему, обещая одинаковые поставки в случае реализации любого из возможных событий. Ясно, что при реализации события 'b' может произойти всё то же самое, но при условии замены функции $\varphi_a^1(\cdot)$ на $\varphi_b^1(\cdot)$.

Главный вопрос в рамках данного примера: является ли договор из D-ядра устойчивым по отношению к угрозам описанного вида? Очевидных оснований утверждать это у нас нет. По этой причине рассмотрим ещё одну концепцию ядра, которое образуют договоры, устойчивые по отношению к попыткам открыть новый процесс заключения договоров в состоянии «завтра утром».

Определение 9. *Интерим-ядро $\mathcal{C}^{int}(\mathcal{E}^{di})$ модели экономики $\mathcal{E}^{di}$ с асимметрично информированными агентами состоит из распределений $x = (x_i)_{\mathcal{I}} \in X$ таких, что:*

(i) $\sum\limits_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} e_i$,

(ii) $(x_i - e_i) : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *есть* P_i*-измеримое для всех* $i \in \mathcal{I}$,

(iii) $\forall\, \omega \in \Omega \nexists\, S(\omega) = S \subseteq \mathcal{I} : \exists y^S = (y_i^E)_{(i,E)\in\Im : i\in S}$, $y_i^E \in \mathcal{L}^E$, $(i, E) \in \Im \mid$

(a) $\forall i \in S$ *для* $F = P_i(\omega)$ $y_i^F \in X_i^F$ & $y_i^F \succ_i^F x_i^F$ *и*

(b) $\sum_{(i,E)\in\Im: i\in S}(y_i^E - e_i^E) = 0.$

Еще раз подчеркнём, что в силу пункта (iii)(**a**) предпочтение в потреблении требуется только у двойников $(i,F) \in \Im$ вида $F = P_i(\omega)$ в предположении реализованного природой события ω. Сравнивая определения заключаем, что интерим ядро является подмножеством D-ядра, т. е. всегда имеет место

$$\mathcal{C}^{int}(\mathcal{E}^{di}) \subseteq \mathcal{C}^{d}(\mathcal{E}^{di}).$$

Однако рассмотренный выше пример показывает, что интерим ядро может не существовать и это, вообще говоря, типичная ситуация. Анализ продолжает

Пример 6.2. Рассмотрим модель экономики обмена с асимметрично информированными индивидами из предыдущего раздела, пример 6.1. Как это видно из определения интерим ядра, пункт (iii), набор потребительских планов, соответствующих текущему элементарному событию $\omega \in \Omega$ должен быть распределением из ядра в экономике, редуцированной на это событие. Это должно выполняться для ***каждого*** элементарного события. В рамках анализа примера 6.1 ядра, соответствующие событиям 'a' и 'b' были построены и изображены на рис. 3, а на рис. 4 приведена сводная картинка, показывающая, что в пределах области, ограниченной кривыми безразличия, границы Парето для этих элементарных событий не пересекаются, т. е. предъявленные ***требования несовместны***. Более того, ситуация принципиально не изменится и при любом малом изменении полезностей и только усугубиться если размерность пространства продуктов увеличится — ибо размерность границы Парето будет прежняя (число агентов минус 1), т. е. это будет одномерная кривая в пространстве размерности 3 и более, и (можно сказать) вероятность непустого пересечения таких кривых равна нулю. Ключевую роль здесь играет факт асимметричного распределения информации.

Как это видно из предложенного примера, для того, чтобы обеспечить непустоту интерим ядра нужно, вообще говоря требовать совпадение индивидуальных предпочтений, ассоциированных с различимыми состояниями мира и индуцированных на пространство договоров. Другими словами, чтобы пересечение ядер оказалось непусто и, тем самым, чтобы непустым было интерим ядро, нужно требовать, чтобы у лица способного различать события было совпадение предпочтений (хотя бы локально) в разных неразличимых другим индивидом состояний природы. Однако именно пустота интерим ядра говорит о том, что какая бы не была текущая точка, реализованная сетью договоров, у индивидов будут стимулы к раскрытию информации: в результате деления информацией у них появляются новые возможности заключить взаимовыгодный контракт.

Очевидно, что существуют информационные структуры, когда ядро непусто при достаточно слабых других предположениях. Однако, я считаю, что генерическим образом это всегда будет симметричная информация и в общем случае асимметрично информированных агентов интерим ядро является пустым множеством. ■

Следующее утверждение говорит о том, что если по определению 8 в D-равновесии дополнительно потребовать, чтобы *относительные* цены в состояниях мира, неразличимых хотя бы для одного индивида, были одинаковые, то такое распределение является элементом интерим ядра.

Утверждение 6.1. *Пусть (x, p) — D-равновесие по определению 8 такое, что*

$$\forall\, i \in \mathcal{I} \ \ \forall\, \omega, \omega' \in E \in P_i, \ \ \exists\, \lambda_{\omega'} \geq 0 : \ \lambda_{\omega'} p(\omega) = p(\omega'). \tag{27}$$

Тогда $x \in \mathcal{C}^{int}(\mathcal{E}^{di})$, т. е. это распределение из интерим ядра.

Доказательство утверждения 6.1. От противного: предположим нашлось $\omega \in \Omega$ такое, что нашлась коалиция S, доминирующая распределение x:

$$\exists y^S = (y_i^E)_{(i,E)\in\Im : i\in S} \mid \sum_{(i,E)\in\Im : i\in S} (y_i^E - e_i^E) = 0 \quad \& \quad [y_i^F \succ_i^F x_i^F, \ F = P_i(\omega)] \ \ \forall\, i \in S.$$

В силу (ii) определения 8 заключаем

$$\langle p^F, y_i^F \rangle > \langle p^F, x_i^F \rangle = \langle p^F, e_i^F \rangle, \ F = P_i(\omega) \quad \forall\, i \in S,$$

откуда, в силу $y_i(\omega') - e_i(\omega') = y_i(\omega) - e_i(\omega)$ для всех $\omega' \in P_i(\omega)$, $i \in S$ и (27), заключаем

$$0 < \langle p^F, y_i^F - e_i^F \rangle = \langle p(\omega), y_i(\omega) - e_i(\omega) \rangle \sum_{\omega' \in F} \lambda_{\omega'}, \ \forall\, i \in S \ \Rightarrow \ \langle p(\omega), \sum_S (y_i(\omega) - e_i(\omega)) \rangle > 0,$$

откуда $\sum_S (y_i(\omega) - e_i(\omega)) \neq 0$, что противоречит условию $(iii)(\mathbf{b})$ определения 9. ■

Результат утверждения 6.1 характеризует D-равновесия, которые являются элементами интерим ядра, однако нужно прояснить условия, при которых они существуют. Следующее утверждение является важным шагом на пути понимания данной проблемы: анализируется ситуация, когда достигнутое в D-равновесии распределение, реализованное как нечётко договорное, таково, что у индивидов нет никакого стимула делится информацией: в любом случае новый взаимовыгодный контракт невозможен.

Утверждение 6.2. *Пусть $x = (x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ нечётко договорное распределение с дифференцированными агентами. Тогда найдутся цены $p : \Omega \to \mathbb{R}^l$, для каждого $i \in \mathcal{I}$ и $E \in P_i$ удовлетворяющие условиям*

$$\sum_{\omega\in E} p(\omega) x_i(\omega) = \sum_{\omega\in E} p(\omega) e_i(\omega)$$

и

$$\langle\sum_{\omega\in E} p(\omega), z\rangle \geq 0,\ \forall\, z\in\mathbb{R}^l:\quad x_i + z\cdot\chi^E \in \mathcal{P}_i(x_i). \tag{28}$$

Таким образом, нечётко договорное распределение является D-квазиравновесием.

Пусть, дополнительно, в распределении $x=(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ у агентов не существует взаимовыгодного контракта даже ***при условии деления информацией****. Тогда (28) заменяется на более квалифицированное требование*

$$\sum_{\omega\in E} p(\omega)z(\omega) \geq 0,\ \forall\, z:\Omega\to\mathbb{R}^l:\quad x_i + z\cdot\chi^E \in \mathcal{P}_i(x_i). \tag{29}$$

Уместно подчеркнуть формальное различие в формулах (28) и (29): в первом случае используется *вектор* $z\in\mathbb{R}^l$, а во втором *функция* $z:\Omega\to\mathbb{R}^l$.

Содержательное значение данного утверждения для договорного процесса состоит в том, что если распределение является нечётко договорным с дифференцированными агентами и (29) не выполняется, то тогда может произойти деление информацией, после которого договорной процесс продолжится.

Последнее утверждение выявило характерные особенности равновесной ситуации в случае, когда у агентов отсутствуют стимулы к выявлению информации. Вопрос однако состоит в том, насколько типична эта ситуация, можно ли как-то оценить шансы на генерическое существование D-равновесной ситуации, дополнительно удовлетворяющей (29). С этой целью проведём её сравнительный анализ по отношению к понятию D-равновесия. Именно, сравним число независимых ограничений и число используемых при этом переменных в рассмотренной выше модельной ситуации, где 1-й агент различает будущие события a и b, а 2-й *не способен* их различать. Подсчитаем баланс между переменными и ограничениями (переменные минус ограничения). Для D-равновесия имеем:

Прямые переменные, используемые в распределении:

$$l \text{ (1st for `a')} + l \text{ (1st for `b')} + l \text{ (2nd for `ab')} - 2l \text{ (number of balance equations)} = l.$$

Ценовые переменные и бюджетные ограничения[30] дают:

$$l-1\ (p(a)\text{ normalized}) + l\ (\text{for } p(b)) - 2\ (\text{number of independent budget equations}) = 2l-3.$$

Условия первого порядка (коллинеарность цен и градиентов):

$$1-l \text{ (1st for `a')} + 1-l \text{ (1st for `b')} + 1-l \text{ (2nd for `ab')} = 3-3l.$$

[30] Стандартно: если выполнен материальный баланс, то одно (любое) из бюджетных равенств следует из прочих. Поэтому независимых ограничений будет на единицу меньше.

В итоге, суммируя правые части, приходим к

$$l + 2l - 3 + 3 - 3l = 0,$$

т. е. в ситуации общего положения (генерически) для дважды дифференцируемых полезностей мы вправе ожидать *конечного* числа D-равновесий.

Что изменится в данном подсчёте для распределения, удовлетворяющего (29)? Только последнее слагаемое, именно, в условиях первого порядка у 2-го индивида появится l дополнительных ограничений[31], т. е. общий баланс составит отрицательную величину и, тем самым, мы вправе ожидать, что генерически таких распределений не будет вообще... Для более подробного анализа можно вернуться к рассмотрению примера 6.1.

Однако что случится в общем случае и какое понятие равновесия соответствует концепции интерим ядра? Чтобы корректно ответить на этот вопрос нам потребуется следующий технический результат.

Лемма 6.2. *Рассмотрим гладкую экономику $\mathcal{E}^{di}$ и* ***внутреннее*** *распределение $x = (x_i)_{\mathcal{I}}$ из интерим ядра, $x \in \mathcal{C}^{int}(\mathcal{E}^{di})$. Тогда найдутся цены $p : \Omega \to \mathbb{R}^l$, $p(\omega) \neq 0 \ \forall \omega \in \Omega$ и действительные $\lambda_{i,E} > 0$, $(i, E) \in \Im$ такие, что*

$$\lambda_{i,E} \sum_{\omega \in E} \nabla_\omega u_i(x_i) = p(\omega) = p(\omega') \quad \forall \, \omega, \omega' \in E, \quad \forall \, (i, E) \in \Im. \tag{30}$$

Следовательно, для данных цен также имеет место

$$\langle \sum_{\omega \in E} p(\omega), z \rangle > 0, \ \forall \, z \in \mathbb{R}^l : \quad x_i + z \cdot \chi^E \in \mathcal{P}_i(x_i). \tag{31}$$

Отметим взаимосвязь (31) с соотношением (28), характеризующем нечёткодоговорное распределение с D-агентами и отвечающее требованию (ii) определения D-(квази)равновесия (опр. 8): отличие состоит только в строгой форме неравенства.

Доказательство леммы 6.2. Анализ определения 9 показывает, что для каждого $\omega \in \Omega$ распределение $x(\omega) = (x_i(\omega))_{\mathcal{I}}$ оптимально по Парето в модели, редуцированной на событие ω, где полезности индивидов заданы на $X_i(\omega) = \mathbb{R}^l_+$ как $\vartheta_i(y_i) = u_i(z_i(\cdot))$, где

$$z_i(\omega') = \begin{cases} y_i, & \omega' \in P_i(\omega), \\ x_i(\omega'), & \omega' \notin P_i(\omega). \end{cases}$$

[31] Вместо $\nabla_a u_2(x_2^a, x_2^b) + \nabla_b u_2(x_2^a, x_2^b) = \lambda(p^a + p^b)$ при $x_2^a - e_2^a = x_2^b - e_2^b$ следует использовать $\nabla_{ab} u_2(x_2^a, x_2^b) = \lambda(p^a, p^b)$.

Отсюда стандартным образом заключаем существование вектора $p(\omega) \in \mathbb{R}^l$, $p(\omega) \neq 0$ и действительных $\mu_{i,\omega} > 0$ таких, что $\mu_{i,\omega}\nabla\vartheta_i(x_i) = p(\omega)$. Таким образом, если нормировать $p(\omega)$, то можно установить (ибо $p(\omega) = \mu_{i,\omega}\nabla\vartheta_i(x_i) = p(\omega'))$, что

$$p(\omega) = p(\omega') \quad for \quad \omega, \omega' \in E, \quad (i, E) \in \Im.$$

Это, с учётом того, что для исходных полезностей имеем $\sum_{\omega \in E} \nabla_\omega u_i(x_i) = \nabla\vartheta_i(y_i)$, доказывает (30). Соотношение (31) следует отсюда немедленно. Лемма доказана. ∎

Теперь мы можем сформулировать равновесное понятие, надлежащим образом соответствующее концепции интерим ядра: лемма 6.2 фактически его обосновывает — к соотношениям (30), (31) нужно добавить бюджетную достижимость (неравенство, реализуемое по факту как равенство).

Определение 10. *Пара (x, p) называется интерим равновесием, если это D-равновесие по определению 8 и при этом дополнительно:*

$$\forall\, i \in \mathcal{I}, \quad \forall\, \omega \in \Omega \quad p(\omega) = p(\omega') \neq 0 \quad \forall\, \omega' \in P_i(\omega).$$

Заметим, что данное определение почти в точности соответствует понятию REE-равновесия (на стр. 18), отличие сводится к специфической вероятностной интерпретации и дополнительной возможности рассмотрения более тонких информационных структур, полученных как обогащение информацией, поступающей по ценовому каналу. Отметим, что также как интерим ядро интерим равновесие, которое является его элементом (в силу утверждения 6.1), может не существовать; существование можно обеспечить только для специфических информационных структур, но для того чтобы их достичь нужно как-то осуществить обмен информацией...

Какова может быть динамика договорного процесса, выводящего систему на интерим равновесие? Ясно, что в такого рода процесс должен быть включен эндогенный процесс обмена информацией. Мы продолжим анализ рассмотренного выше примера (начало 5-й главы). Здесь $\Omega = \{a, b\}$, $P_1 = \{\{a\}, \{b\}\}$, $P_2 = \{\Omega\}$.

Что будет в равновесии? В варианте соответствующем понятию приватного равновесия, 1-й агент должен достигнуть максимума полезности при ограничении

$$p(a)x(a) + p(b)x(b) \leq p(a)e_1(a) + p(b)e_1(b).$$

С другой стороны, в варианте отвечающему D-равновесию он выдаст решение двух задач:

$$\varphi_a^1(x(a)) \to \max \;\; s.t. \; p(a)x(a) \leq p(a)e_1(a) \;\; \& \;\; \varphi_b^1(x(b)) \to \max \;\; s.t. \; p(b)x(b) \leq p(b)e_1(b).$$

Второй агент в обоих случаях решает задачу с дополнительным ограничением:

$$[p(a) + p(b)]y(a, b) \leq p(a)e_2(a) + p(b)e_2(b), \; y(a, b) = y(a) = y(b).$$

В равновесии решения данных задач должны быть сбалансированы.

Вопрос такой — закончится на этом (равновесном распределении) договорной процесс или он может продолжить развитие? Возможно первый агент захочет поделиться информацией со 2-м и передать ему способность различать a и b? Захотеть он может только тогда, когда получит от этого дела осязаемую выгоду. Эта выгода может выражаться в возможности заключить новый выгодный контракт — узнав разницу между состояниями, 2-й пойдет на сделку с первым. Запишем условия этой сделки для D-агентов:

$$\exists\ (v(a), v(b)) :\ \langle p(a), v(a)\rangle > 0,\ \ \langle p(b), v(b)\rangle > 0\ \ -$$

это выигрыши 1-го в каждом из будущих состояний и

$$\langle p(a) + q, -v(a)\rangle > 0,\ \ \langle p(b) - q, -v(b)\rangle > 0,\ \ -$$

это выигрыши второго (возможно не все > 0, один нуль может быть); здесь q это вектор, существование которого определяется из условия *отсутствия* взаимовыгодного контракта при *неизменной* информации (оптимальность по Парето), см. лемму 6.1. Так как при $q \neq \lambda p(a)$ векторы $p(a)$ и $-[p(a) + q]$ неколлинеарны, то найдётся $v(a)$, удовлетворяющий

$$\langle p(a), v(a)\rangle > 0\ \ \&\ \ \langle p(a) + q, -v(a)\rangle > 0$$

одновременно. Таким образом ситуация такова: 1-й говорит 2-му: «Я могу научить тебя различать 'a' и 'b', а ты научишь меня различать событие $\{a, b\}$ (из разбиения 2-го) и затем мы сможем с тобой взаимовыгодно обменяться...»

Когда это не случится в общем случае (пусть распределение внутреннее)? Ответы дают леммы 5.1, 6.1, их следствия 5.1, 5.2, 6.1, а также утверждение 6.2. Это не произойдёт только если для события $a \in \Omega$ выполняется

$$\forall\, z \in \mathbb{R}^l\ \ \langle p(a), z\rangle > 0\ \Rightarrow\ \langle p(a) + q_i(a), z\rangle > 0\ \forall\, i \in \mathcal{I},$$

и, одновременно, то же требование для события $b \in \Omega$:

$$\forall\, z \in \mathbb{R}^l\ \ \langle p(b), z\rangle > 0\ \Rightarrow\ \langle p(b) + q_i(b), z\rangle > 0\ \forall\, i \in \mathcal{I}.$$

В силу леммы Фаркаша 1-е из этих условий эквивалентно тому, что векторы $p(a)$ и $p(a) + q_i(a)$ коллинеарны для всех $i \in \mathcal{I}$; то же для второго условия, но теперь уже для события b. Конечно, когда я говорю о ценах $p(a)$ и $p(a) + q_i(a)$, я имею ввиду градиенты полезности, связанные с ценами условиями $\exists\ \lambda_{1a} > 0$: $\nabla_a u_1(x_1) = \lambda_{1a} p(a)$ и $\exists\ \lambda_{2ab} > 0$: $\nabla_a u_2(x_2) = \lambda_{2ab}(p(a)+q_2)$ $\nabla_b u_2(x_2) = \lambda_{2ab}(p(b)-q_2)$ и аналогичные соотношения для других индивидов и состояния 'b'. Однако из коллинеарности $p(a)$ и $p(a) + q_i(a)$ следует коллинеарность $p(a)$ и $q_i(a) \neq 0$ и аналогично коллинеарность $p(b)$ и $q_i(b) = -q_i(a)$, откуда следует коллинеарность $p(a)$ и $p(b)$.

Таким образом, если у информированного индивида $i = 1$ градиенты $\nabla_a u_1(x_1)$ и $\nabla_b u_1(x_1)$ неколлинеарны, то взаимовыгодный ***контракт*** с индивидом $i = 2$ будет ***невозможен*** только если $(\nabla_a u_2(x_2), \nabla_b u_2(x_2)) = (\alpha \nabla_a u_1(x_1), \beta \nabla_b u_1(x_1))$ для некоторых действительных $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ (это случай[32] $q = 0$). Более того, в силу леммы 6.2 при неколлинеарных градиентах индивид $i = 1$ ясно понимает, что при реализации 'завтра утром' одного из событий 'a' или 'b' он сам или другие индивиды возобновят договорной процесс, т. е. достигнутое распределение не является стабильным. Оба фактора мотивируют $i = 1$ к раскрытию информации для $i = 2$ уже сегодня, и договорной процесс продолжается при новом распределении информации. Так будет продолжаться до тех пор, пока не будет достигнуто договорное распределение, соответствующее D-равновесию, удовлетворяющее условию пропорциональности цен (равенства после перенормировки!) в неразличимых состояниях мира, т. е. тогда, когда будет достигнуто интерим равновесие.

Опишем возможную процедуру нахождения взаимовыгодного контракта в договорном процессе, идущем вместе с делением информацией. Пусть для некоторого события $a \in \Omega$ для пары индивидов i, j векторы $p(a) + q_i(a)$ и $p(a) + q_j(a)$ неколлинеарны. Рассмотрим событие

$$E_{ij}(a) = P_i(a) \cap P_j(a).$$

Индивиды i, j могут научится различать это событие, если поделятся между собой информацией о событиях $P_i(a)$ и $P_j(a)$. Далее, если неколлинеарны векторы

$$\sum_{\omega \in E_{ij}(a)} (p(\omega) + q_i(\omega)) \quad \& \quad \sum_{\omega \in E_{ij}(a)} (p(\omega) + q_j(\omega)), \tag{32}$$

то в силу следствий 5.1, 6.1 к леммам о взаимовыгодном контракте, индивиды будут способны найти взаимовыгодный обмен в событии $E_{ij}(a)$; если же векторы (32) коллинеарны, то в коалицию может быть приглашен третий участник, скажем с номером k и такой, что

$$E_{ijk}(a) = P_i(a) \cap P_j(a) \cap P_k(a) \neq E_{ij}(a),$$

т. е. k-й индивид способен улучшить информацию о событии a. Теперь, если векторы

$$\sum_{\omega \in E_{ijk}(a)} (p(\omega) + q_i(\omega)) \quad \& \quad \sum_{\omega \in E_{ijk}(a)} (p(\omega) + q_j(\omega)) \quad \& \quad \sum_{\omega \in E_{ijk}(a)} (p(\omega) + q_k(\omega))$$

неколлинеарны, то коалиция $\{i, j, k\}$ способна найти новый взаимовыгодный контракт; иначе нужно привлечь в коалицию еще одного агента и т. д. Этот процесс должен когда-то закончится, ибо по предположению (4)

$$\bigcap_{\mathcal{I}} P_i(a) = \{a\},$$

[32] Заметьте, что в этом случае очевидной потребности в делении информацией нет и если всё-таки 1-й научит 2-го различать 'a' и 'b', то ничего не случится и распределение не изменится. Однако после деления информацией распределение получит добавочное свойство стабильности.

а среди векторов $p(a)+q_i(a)$, $i\in\mathcal{I}$ имеется по крайней мере одна неколлинеарная пара.

Если же момент для возможности взаимовыгодного обмена наступил, то реализуется обмен информацией и продолжается обычный договорной процесс, вплоть до наступления новой тупиковой ситуации — нет возможности для обмена без нового деления информацией.

И что имеем в итоге? В итоге система в целом может придти (если не зациклится) к распределению и ситуации, в которой даже после деления информацией взаимовыгодный обмен невозможен. Кроме того, это должно быть устойчивое договорное распределение. Однако что это за случай такой?

(i) Указанным выше способом, а также другими методами, оставшимися за рамками модели (например, ценовой канал распределения информации), было достигнуто новое распределение информации, которое тоньше первоначального, но, вообще говоря, грубее супремального: $\tilde{\mathbb{P}}=(\tilde{P}_i)_{\mathcal{I}}\succeq(P_i)_{\mathcal{I}}=\mathbb{P}$, $\tilde{P}_i\preceq\bigvee_{j\in\mathcal{I}}P_j$, $i\in\mathcal{I}$.

(ii) Для достигнутого распределения информации новый взаимовыгодный контракт невозможен даже если ещё имеется возможность для деления информацией, формально (лемма 6.1): $\exists p:\Omega\to\mathbb{R}^l$, $p\neq 0$ и такие $\lambda_{i,E}>0$, $(i,E)\in\Im$, что

$$\forall\, E\in\tilde{P}_i,\quad \lambda_{i,E}\sum_{\omega\in E}\nabla_\omega u_i(x_i)=\sum_{\omega\in E}p(\omega)\quad\forall\, i\in\mathcal{I}. \tag{33}$$

Кроме того, для стабильности распределения в момент 'завтра утром', должно выполняться условие (27) пропорциональности цен в состояниях мира, неразличимых каким-либо индивидом, что можно записать как коллинеарность, для каждого будущего элементарного события $\forall\bar{\omega}\in\Omega$, семейства векторов $\{\sum_{\omega\in P_i(\bar{\omega})}\nabla_\omega u_i(x_i)_{i\in\mathcal{I}}\}$. В то же время требование коллинеарности градиентов $\{\nabla_{\bar{\omega}}u_i(x_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$, $\forall\bar{\omega}\in\Omega$, формально означающее отсутствие возможности заключить взаимовыгодный контракт после деления информацией, представляется чрезмерным, поскольку у агентов, обладающих информацией, нет очевидной мотивации для её деления, ибо то, что способен различать конкретный индивид это его сугубо частная информация, которая может быть неизвестна партнёру по договору. Здесь диспропорция в градиентах (ценах, пропорциях обмена) может рассматриваться как сигнал для деления информацией: при отсутствии сигнала деления не будет. Таким образом, мы описали договорной процесс, осуществляющий выход на распределение по определению интерим равновесия, но уже в рамках обогащённой информационной структуры.

А что с ядром? Да все то же самое... Это должно быть ядро в модели, построенной по исходной так, что множество потребителей это «двойники» агентов исходной модели, построенные для информационного распределения $\tilde{\mathbb{P}}=(\tilde{P}_i)_{\mathcal{I}}$, полученного на последнем этапе информационного деления:

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}^{di},\Im,\tilde{\mathbb{P}}),\quad \Im(\tilde{\mathbb{P}})=\{(i,E)\mid i\in\mathcal{I},\ E\in\tilde{P}_i\}.$$

Для удобства и краткости употребления назовём это ядро ***D-интерим-ядром***. По построению мы всегда имеем

$$\forall\, i \in \mathcal{I} \quad \tilde{P}_i \preceq \bigvee_{j\in\mathcal{I}} P_j.$$

При этом есть серьёзные основания считать, что в генерическом случае, т. е. для почти всех экономик, описанный выше процесс будет приводить к супремальной информации, т. е. будет

$$\forall\, i \in \mathcal{I} \quad \tilde{P}_i = \bigvee_{j\in\mathcal{I}} P_j = P_\vee.$$

В таком случае будем иметь

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}^{di}, \Im, \tilde{\mathbb{P}}) = \mathcal{C}(\mathcal{E}^{di}, \Im, P_\vee) = \prod_{E\in P_\vee} \mathcal{C}(\mathcal{E}^{di}(E)),$$

где $\mathcal{C}(\mathcal{E}^{di}(E))$ это ядро в модели $\mathcal{E}^{di}(E)$, где агенты те же что и в исходной модели, но при этом пространство продуктов меняется на

$$\{z : E \to \mathbb{R}^l \mid \quad z(\omega) = z(\omega'),\ \forall\, \omega, \omega' \in E\}$$

и рассматриваются запасы и предпочтения исходной модели индуцированные на конус неотрицательных элементов этого пространства (это потребительское множество). В частности, если работает предположение (4), то должно быть

$$P_\vee = \Omega^* \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}(\mathcal{E}^{di}) = \prod_{\omega\in\Omega} \mathcal{C}(\mathcal{E}^{di}(\omega)).$$

Последнее заключение. Данное ядро можно также рассматривать как ядро, генерически соответствующее понятию REE-равновесия. В общем случае надо брать ядро экономики с дифференцированными агентами: в этой модели индивидуальная информация находится так как это определено в концепции REE — супремум исходной информации и информации, полученной по ценовому каналу. Вот только не очень вяжется между собой понятие ядра (стабильность на основе бартерной торговли) и наличие цен и торговли по этим ценам... Однако понятие REE-равновесия придумано не мною.

6.4. Универсальные понятия договорного ядра и равновесия в DIE-экономиках

В предыдущих разделах предлагались и анализировались различные возможности приложения договорного подхода к модели экономики с дифференцированной информацией. При этом, я считаю, что договорной подход оказался весьма эффективным инструментом, с помощью которого были исследованы как приватное ядро и равновесие, так и серия новых понятий (D-ядро и равновесие, интерим понятия), выводящая на договорной аналог понятия REE-равновесия. В настоящем разделе я хочу предложить понятие равновесия, основанное на сложно-договорной модели, при определённых обстоятельствах это понятие реализует приватное равновесие, при некоторых других — REE, но чаще всего это будет нечто промежуточное.

Давайте задумаемся на вопросом, в чём состоит коренное различие между такими понятиями как приватное равновесие (WEE) и равновесие в рациональных ожиданиях (REE), между приватным равновесием в договорном смысле и интерим равновесием (когда никто не хочет выявлять информацию). Я считаю, что принципиальное различие состоит в том, что:

(i) В первом случае (приватное) договоры, заключённые сегодня, после закрытия переговорной стадии *безусловно будут реализованы завтра*, несмотря на то, что завтра у некоторых индивидов может появится желание как-то изменить контракты, т. е. реализация контрактов, подтверждающая репутацию индивида как надёжного партнёра здесь важнее какой-то временной сиюминутной выгоды.

(ii) Во втором случае, случае интерим равновесия и ядра, контракты изначально обладают меньшей стабильностью, и, в соответствии с правилами этой игры, «на следующий день утром» *договорной процесс может возобновиться*, индивиды будут рвать существующие и заключать новые договоры, они будут также обмениваться информацией.

Далее я прежде всего хочу отметить, что если не принимать во внимание возможности по обмену информацией, то статистически (в ожиданиях) первый вариант является для агентов более предпочтительным, ибо приводит к более высоким значениям полезности. Однако имеются проблемы со стабильностью и реализацией... Возможно ли совместить подходы в рамках общей концепции? Конечно да, но при условии договорного взгляда на этот предмет. Именно, в рамках общего пространства договоров, рассмотренного с учётом дифференцированной информации (т. е. измеримость), для каждой коалиции можно выделить специфическое подпространство договоров, обладающих высокой стабильностью: контракты, заключённые с помощью этих договоров сегодня гарантированно будут реализованы завтра. В то же время индивидам не запрещено и заключать любые другие контракты, вот только гарантировать их реализацию завтра нельзя — утром может наступить новая фаза в договорном процессе. Примером контрактов этого типа могут служить договорённости, заключённые в рамках узкой группы ответственных лиц (джентльменов, всегда держущих своё слово). Другим примером служит торговля фьючерсными контрактами: сделка заключена сегодня, а реализуется завтра (через месяц, полгода и т. д.). Контракты второго типа это скорее протокол о намерениях, предварительная стадия на этапе нахождения окончательной договорённости, которая будет достигнута «завтра утром», когда появится первая информация о реализации состояния мира.

Как в целом должен идти договорной процесс? Имеется две стадии, на первой заключаются высокостабильные договоры, а на второй все прочие, причём здесь уже может идти и процесс информационного обмена, как встроенный в договорной процесс выводящий систему на интерим равновесие. Далее рассмотрим ситуацию с формально-математической точки зрения (к сожалению, весьма громоздкую).

Рассмотрим модель $\mathcal{E}^{di}$ экономики чистого обмена с дифференцированной информацией, описанную на стр. 24. Добавим в модель новый элемент $\mathcal{W} = \bigcup_{S\subseteq\mathcal{I}} \mathcal{W}^S$, где $\mathcal{W}^S \subseteq L^{\mathcal{I}}$ это пространство сильностабильных договоров, которые способна заключить коалиция $S \subseteq \mathcal{I}$, т. е. договоров, которые по завершении договорной стадии «сегодня», будут безусловно выполнены завтра[33]. Пусть $\mathcal{W}_i$ это ***проекция*** $\mathcal{W}$ на i-й сомножитель в пространстве распределений $L^{\mathcal{I}}$. Рассмотрим далее два понятия — ядра и равновесия, которые адекватно соответствуют, с договорной точки зрения, случаю дифференцированной информации.

Определение 11. *Распределение $x \in \prod_{\mathcal{I}} X_i$ является элементом договорного ядра, если существует сеть договоров $V = \{v^S\}_{S\subseteq\mathcal{I}}$, $v^S \in W^S$, $S \subseteq \mathcal{I}$ такая, что $y = e + \sum_{v^S \in V} v^S \in \prod_{\mathcal{I}} X_i$ и распределения x и y удовлетворяют условиям: $y = (y_i)_{\mathcal{I}}$ является элементом приватного ядра относительно $\mathcal{W}$, т. е.*

(i) $\sum\limits_{i\in\mathcal{I}} v_i = 0$,

(ii) $v_i : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *есть P_i-измеримая для всех $i \in \mathcal{I}$,*

(iii) $\nexists S \subseteq \mathcal{I} : \exists z^S = (z_i)_S, \quad (z^S - e^S) \in \mathcal{W}^S \mid \forall\, i \in S,\ z_i \in X_i$ *такая, что*

$(z_i - e_i)$ *есть P_i-измеримая, $z_i \succ_i y_i$ & $\sum_S (z_i - e_i) = 0$;*

и распределение x является элементом интерим ядра относительно запасов $y = (y_i)_{\mathcal{I}}$ и (некоторой) информационной структуры $\tilde{\mathbb{P}} = (\tilde{P}_i)_{i\in\mathcal{I}}$, полученной в результате договорного процесса деления информацией т. е. x удовлетворяет

(iv) $\sum\limits_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} e_i$,

(v) $(x_i - y_i) : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *есть $\tilde{P}_i$-измеримое для всех $i \in \mathcal{I}$,*

(vi) $\forall\, \omega \in \Omega \nexists S(\omega) = S \subseteq \mathcal{I} : \exists z^S = (z_i)_{i\in S} \in (\mathbb{R}^l_+)^S$, $\sum_{i\in S}(z_i - y_i(\omega)) = 0$ &

$z_i \cdot \chi_F \succ_i^F x_i^F$, $\forall\, i \in S$ *для* $F = \tilde{P}_i(\omega)$

Заметьте небольшое техническое различие между пунктом (vi) последнего определения и (iii) определения 9. В части существования договорного ядра укажем только на то, что существование приватного ядра относительно $\mathcal{W}$ можно установить без каких-либо затруднений, используя технику изложенную в доказательстве теоремы 9.1. Далее берём любое из распределений из данного ядра, запускаем договорной процесс, и выходим на (неподвижную) точку из D-ядра (существование можно установить прямо с помощью техники теоремы 9.1). Далее, если эта точка не попала в интерим ядро, то осуществляется

[33] Здесь $v = (v_i)_{\mathcal{I}} \in \mathcal{W}^S \Rightarrow v_i = 0$ для $i \notin S$.

деление информацией и новый договорной процесс опять с выходом на точку из D-ядра, но теперь уже относительно обогащённой информационной структуры, и т. д.

Рассмотрим далее двухстадийное договорное равновесие.

Определение 12. *Пара распределений* $(y, x) \in X \times X$ *и пара ценовых отображений* (q, p), $q, p : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *называется договорным равновесием, если пара* (y, q) *является приватным равновесием относительно* $\mathcal{W}$, *т. е. выполнены следующие требования:*

(*i*) $(y_i - e_i) : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *есть* P_i*-измеримая для всех* $i \in \mathcal{I}$,

(*ii*) $0 \not\equiv \langle p, (\mathcal{P}_i(y_i) - e_i) \cap \mathcal{L}_i \cap \mathcal{W}_i \rangle \geq 0$[34], $i \in \mathcal{I}$,

(*iii*) $\sum_{i \in \mathcal{I}} y_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i$.

Второе требование состоит в том, что пара (x, p) *является интерим равновесием относительно начального распределения* $y = (y_i)_{\mathcal{I}}$ *и информационной структуры* $\tilde{P}_i = P_i \vee \sigma(p)$, *где* $\sigma(p)$ *это алгебра событий (поле), генерированная отображением* $p(\cdot)$[35]:

(*iv*) $(x_i - y_i) : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *есть* $\tilde{P}_i$*-измеримая всех* $i \in \mathcal{I}$,

(*v*) $\langle p^E, (\mathcal{P}_i^E(x_i^E) - y_i^E) \rangle > 0, \ \ \langle p^E, x_i^E - y_i^E \rangle = 0, \quad \forall\, i,\ E = \tilde{P}_i(\omega),\ \forall\, \omega \in \Omega$,

(*vi*) $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} y_i$.

В части существования распределений, отвечающих данной концепции, можно заметить только, что всё что нам известно для ядра нужно применить для нахождения нечётко договорных элементов, а им уже соответствуют квазиравновесия. Отметим однако, что попытка рассмотрения равновесия с единой системой цен, а не двухуровневой $q(\cdot)$, $p(\cdot)$ приводит к понятию, существование которого неясно. Кроме того, неясно как интерпретировать такого рода равновесия, ибо тогда уместно трактовать договорной процесс как идущий одновременно в части сильностабильных и слабостабильных договоров.

7. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОГОВОРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭКОНОМИКЕ С ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

В настоящем разделе будут представлены результаты компьютерного моделирования договорных процессов, выводящих экономику на договорные распределения разного типа: приватное договорное ядро и равновесие, D-ядро и D-равновесие и, наконец, интерим концепции.

[34] Напомним, что $\mathcal{L}_i$ это, в пространстве контингентных продуктов, подпространство отображений, измеримых относительно информационного разбиения i-го индивида.

[35] Самая грубая σ-алгебра, относительно которой $p(\cdot)$ измеримо.

Договорные процессы были предложены и исследованы в работе автора (Маракулин, 2006), где в качестве базовой модели рассматривалась стандартная экономика обмена с *симметрично* информированными индивидами; здесь было предложено несколько типов процессов, в первую очередь это правильно-договорные. В процессах этого типа допускается частичный разрыв договоров в контексте разных содержательных гипотез, определяющих характер процесса разрыва договоров в общем виде и в важнейших частных случаях, это:

(IB) — мгновенный разрыв договоров;

(UB) — равномерный разрыв всех договоров;

(CUB) — равномерный разрыв внутрикоалиционных договоров.

Комбинации этих гипотез приводят к правильно-договорным траекториям разного вида общности. При **(IB)** и **(UB)** получается *агрегированная* договорная траектория, при **(IB)** и **(CUB)** — *коалиционно-договорная*; даны формальные и математически обоснованные определения. Кроме того, было введено понятие *правила торговли*, как отображения, однозначно определяющего взаимовыгодный контракт для текущих потребительских планов, и описаны другие его свойства. При использовании правила торговли договорная траектория каждого из упомянутых видов является однозначно определённой. Был также выделен особый тип *доброжелательного* (беневолентного) правила торговли как правила, приводящего в договорном процессе к разрыву договоров только если у индивидов нет никакой возможности заключить новый контракт не влекущий разрыва заключённых ранее. Именно для этого класса доброжелательных процессов были получены основные позитивные результаты о сходимости. В общем случае договорные процессы могут зацикливаться, однако их неподвижная точка всегда является специфическим равновесием (элементом ядра или квазиравновесия — в зависимости от типа процесса), что и вызывает к ним интерес.

В ряде студенческих работ, проведённых под моим научным руководством, рассматривались и моделировались на компьютере договорные процессы, в которых новый взаимовыгодный контракт, а значит и собственно правило торговли находится в соответствии с одним из известных в теории аксиоматических торгов (bargaining theory) типом решения. В том числе рассматривались решения по Нэшу и Калаи-Смородинскому, см. Rubinstein, Osborne (1990), Thomson (1994), которые являются наиболее интересными с теоретической и практической точек зрения. В настоящей работе моделировались процессы, использующие так называемое локальное правило Нэша.

Рассматривается следующая модель экономики обмена с асимметрично информированными индивидами. Имеется 2 типа физически разных продукта, 2 агента, 3 состояния природы. Предпочтения заданы функциями Кобба — Дугласа, $u_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^6$ и $u_2(y)$, $y \in \mathbb{R}^6$ и представлены в логарифмической форме:

$$u_1(x) = \alpha_{a_1}\ln(x_{a_1}) + \alpha_{a_2}\ln(x_{a_2}) + \alpha_{b_1}\ln(x_{b_1}) + \alpha_{b_2}\ln(x_{b_2}) + \alpha_{c_1}\ln(x_{c_1}) + \alpha_{c_2}\ln(x_{c_2}), \quad x \gg 0,$$

$$u_2(y) = \beta_{a_1}\ln(y_{a_1}) + \beta_{a_2}\ln(y_{a_2}) + \beta_{b_1}\ln(y_{b_1}) + \beta_{b_2}\ln(y_{b_2}) + \beta_{c_1}\ln(y_{c_1}) + \beta_{c_2}\ln(y_{c_2}), \quad y \gg 0.$$

На входе программы задаются коэффициенты функции полезности

$$\alpha = (\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2}, \alpha_{b_1}, \alpha_{b_2}, \alpha_{c_1}, \alpha_{c_2}), \quad \beta = (\beta_{a_1}, \beta_{a_2}, \beta_{b_1}, \beta_{b_2}, \beta_{c_1}, \beta_{c_2}),$$

начальные запасы e=(e_1, e_2), $e_1 = (e_1^1, e_1^2, e_1^3)$, $e_2 = (e_2^1, e_2^2, e_2^3)$ и начальное распределение информации: P_1, P_2, представленное как разбиения множества $\Omega = \{a, b, c\}$ всех возможных состояний природы. В программе разбиение задается упорядоченным массивом, составленным из целых чисел; здесь состояние a имеет индекс 1, b — 2, c — 3. При этом, если у одного агента совпадают некоторые элементы массива, то агент не различает состояния, соответствующие индексам этих элементов, т. е. состояния находятся в одном разбиении. Кроме того в программе задаются параметры: $Step > 0$ (шаг) и $Accuracy > 0$ (точность). Программа стартует из начальных запасов $(x, y)^{(0)} = (e_1, e_2)$.

Далее описывается запрограмированная процедура нахождения приватного равновесия при эндогенно идущем процессе деления информации.

Опишем далее использованное в процессе правило торговли. В программе применяется правило названное как «локальный Нэш»: локальный, поскольку по Нэшевскому решению находятся уровни маргинальной прибыльности от контракта. Можно показать, что в договорном случае для парной коалиции это правило соответствует принципу «движения вдоль биссектрисы» угла, образованного градиентами функций полезности (формально у второго берётся антиградиент) — это означает равную прибыльность от контракта (вычисляется как скалярное произведение градиента на вектор продуктового потока). Пусть $w_1^{(n)} = \mathrm{Pr}_W(\nabla u_1(x^{(n)}))$, $w_2^{(n)} = \mathrm{Pr}_W(\nabla u_2(y^{(n)}))$, где $\mathrm{Pr}_W(\cdot)$ это оператор проектирования на пространство $W \subseteq \mathbb{R}^6$ *разрешенных договоров* (параметризовано в потреблениях 1-го индивида). Тогда имеем:

$$v^{(n)} = (v^{(n)}, -v^{(n)}),\ v^{(n)} := \frac{w_1^{(n)}}{|w_1^{(n)}|} - \frac{w_2^{(n)}}{|w_2^{(n)}|}.$$

Таким образом, градиенты проектируются на пространство *разрешенных договоров* (нужна измеримость относительно информации первого и второго агентов) и затем нормируются. Объем полученного договора (длина вектора) $v^{(n)} = (v_1^{(n)}, v_2^{(n)})$ полагается равным $step$, т. е. $v^{(n)} := step * v^{(n)}/|v^{(n)}|$[36]. Далее объем контракта еще более уменьшается (делится на 1.1) — до тех пор, пока контракт не станет взаимовыгодным или пока его объем не станет меньше значения $accuracy$ ($|v^{(n)}| < accuracy$). В первом случае заключается

[36] Здесь несколько некорректно используется общее обозначение для исходного и нормированного контракта.

(подписывается) контракт $v^{(n)}$, система переходит к распределению $(x, y)^{(n)} + v^{(n)}$ и далее программа переходит к возможному разрыву договоров. Во втором случае мы считаем, что программа нашла равновесие при данной информации и значение $(x, y)^{(n)}$ записывается в файл. На следующем шаге, после нахождения равновесия в рамках фиксированной информации, возможно деление информацией.

Процедура разрыва договоров: После каждой итерации заключения договора первый (или второй) индивид частично рвёт валовой контракт в объеме $\frac{|v^{(n)}|}{10}$, если нужно повторяя разрыв до тех пор пока ему это выгодно. Пусть $\lambda^{(n)}$ обозначает число таких разрывов в текущей ситуации. В итоге переход осуществляется по формуле:

$$(x, y)^{(n+1)} = (x, y)^{(n)} + v^{(n)} + \lambda^{(n)} * \frac{|v^{(n)}|}{10} * (e - (x, y)^{(n)} - v^{(n)}).$$

Деление информации: После того как программа дошла до равновесия при данном распределении информации, агентам может быть выгодно ей обменяться (делиться). Какой-либо агент будет иметь стимулы для деления информацией (желает сообщить другому, что отличает один элемент своего разбиения от остальных), если проекция градиента его полезности на пространство договоров отличается от собственно градиента (т. е. нетривиальная, иначе — градиент не принадлежит пространству[37]). Далее, после пробного деления информацией, индивиды находят новый взаимовыгодный контракт по описанному выше правилу, но теперь уже в рамках новой информационной структуры. Теперь, если итоговый объем нового взаимовыгодного контракта больше значения $accuracy$, то агент информацией делится *на самом деле* и на этом процесс деления информации заканчивается. В противном случае индивид полагает деление информацией неэффективным, однако он может также использовать другой метод деления информации (например, в процедуре деления применяется другой элемент информационного разбиения). Наконец, если оба агента потерпели фиаско, то договорной процесс заканчивается. Программа завершает работу.

Результаты работы программы представлены на следующей картинке, см. Рис. 5. Здесь представлены 3 ящика Эджворта в состояния мира $\{a, b, c\}$ (левый верхний угол в ящике). Договорной процесс стартует из начальных запасов (маленькие чёрные кружки) и его развитие представлено кривыми, где красный цвет означает отсутствие разрыва договоров, зелёный — 1-й рвёт договоры, синий — 2-й рвёт. Красные кружки обозначают равновесие, которое соответствует информации типа $1st$, $2nd$, $3rd$ последовательно улучшенной в процессе деления; здесь $1st$ соответствует начальной информации, $2nd$ получена в результате деления инициированного 2-м агентом, а затем $3rd$ — деление от 1-го. Начальные параметры модели можно менять и эти данные представлены на панели в нижней части экрана, слева направо: 1-я таблица представляет данные по исходным запасам (матрица 3×4);

[37] На самом деле в программе просматриваются градиенты обоих агентов, что несколько расширяет возможности информационного обмена.

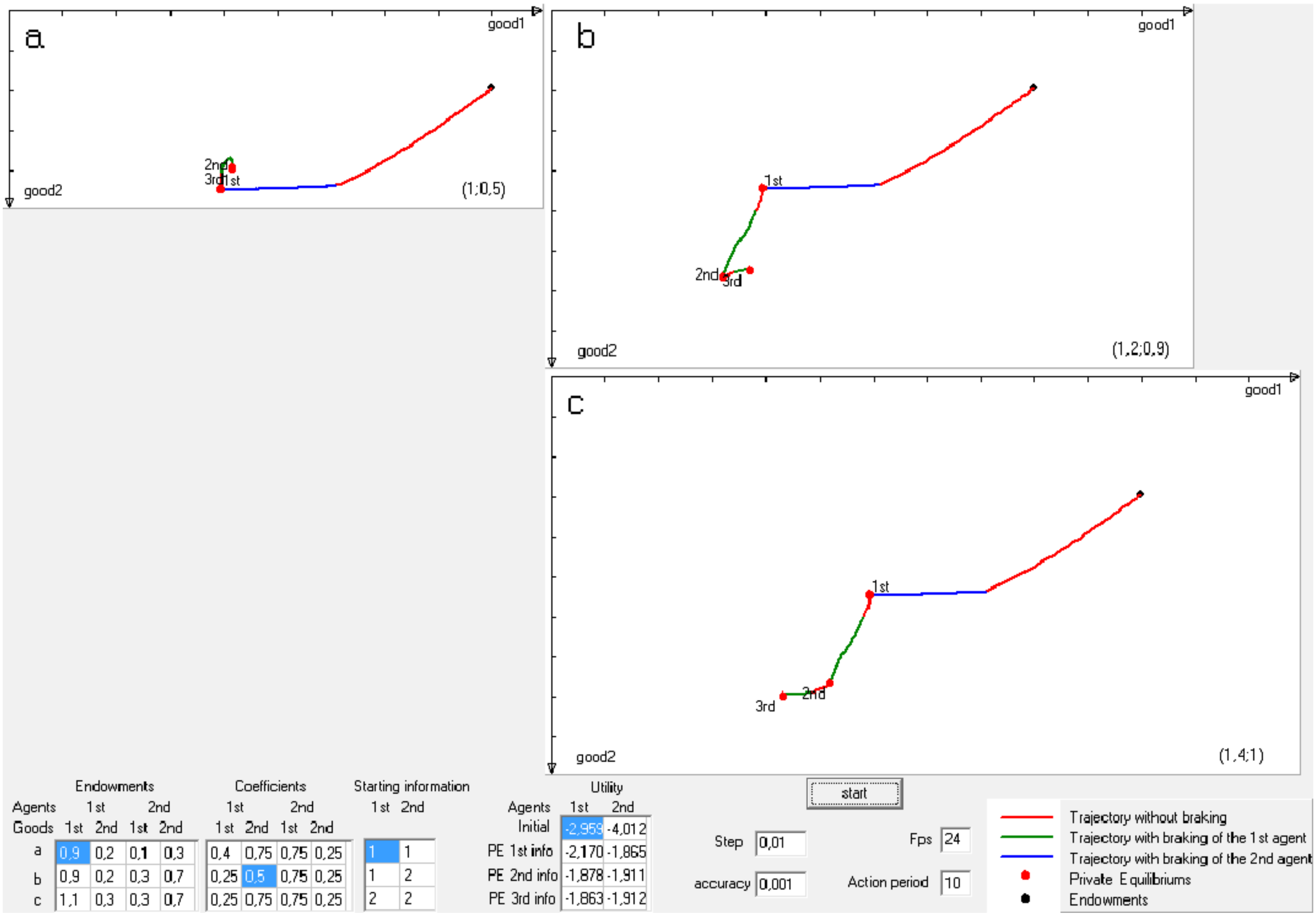

Рис. 5. Динамика приватного договорного процесса с делением информации

2-я это коэффициенты функций полезности; 3-я начальная информация; 4-я динамика изменения полезности по равновесиям с разной информацией; далее здесь представлены шаг, точность, число итераций и проч. Анализируя полученные результаты можно увидеть довольно экзотический характер изменения текущего распределения и полезности. В частности видно, что в состоянии 'a' после двукратного деления информацией распределение возвращается в точку равновесия с начальной информацией; другой забавный факт — поделившись информацией на 1-м этапе деления, 2-й индивид в итоге проиграл, ибо его полезность в новых равновесиях уменьшилась. Ясно, что на этапе деления ему представлялось, что его полезность возрастёт — локально так и произошло, но затем началось её падение — так уж устроен договорной процесс, принимаются решения рациональные в ограниченном, а не глобальном смысле.

Подобное компьютерное моделирование проводилось и для договорных процессов, выводящих на D-квазиравновесие. Результаты представлены на рис. 6. Любопытно, что после 1-го акта деления информацией, когда 2-й научает 1-го различать 'a' и 'b', и, таким образом, рынок 'a' отделяется, но при этом договорной процесс не получает развития, распределение для 'a' остаётся прежним. Подобным образом для 'b' и 'c', после того как второй научится их различать, ситуация для 'b' не изменится и динамика будет только на рынке 'c'. Тем самым состояния природы получают некоторое естественное упорядочивание. Происходит это потому, что для исходной информации «узким местом» является 'a',

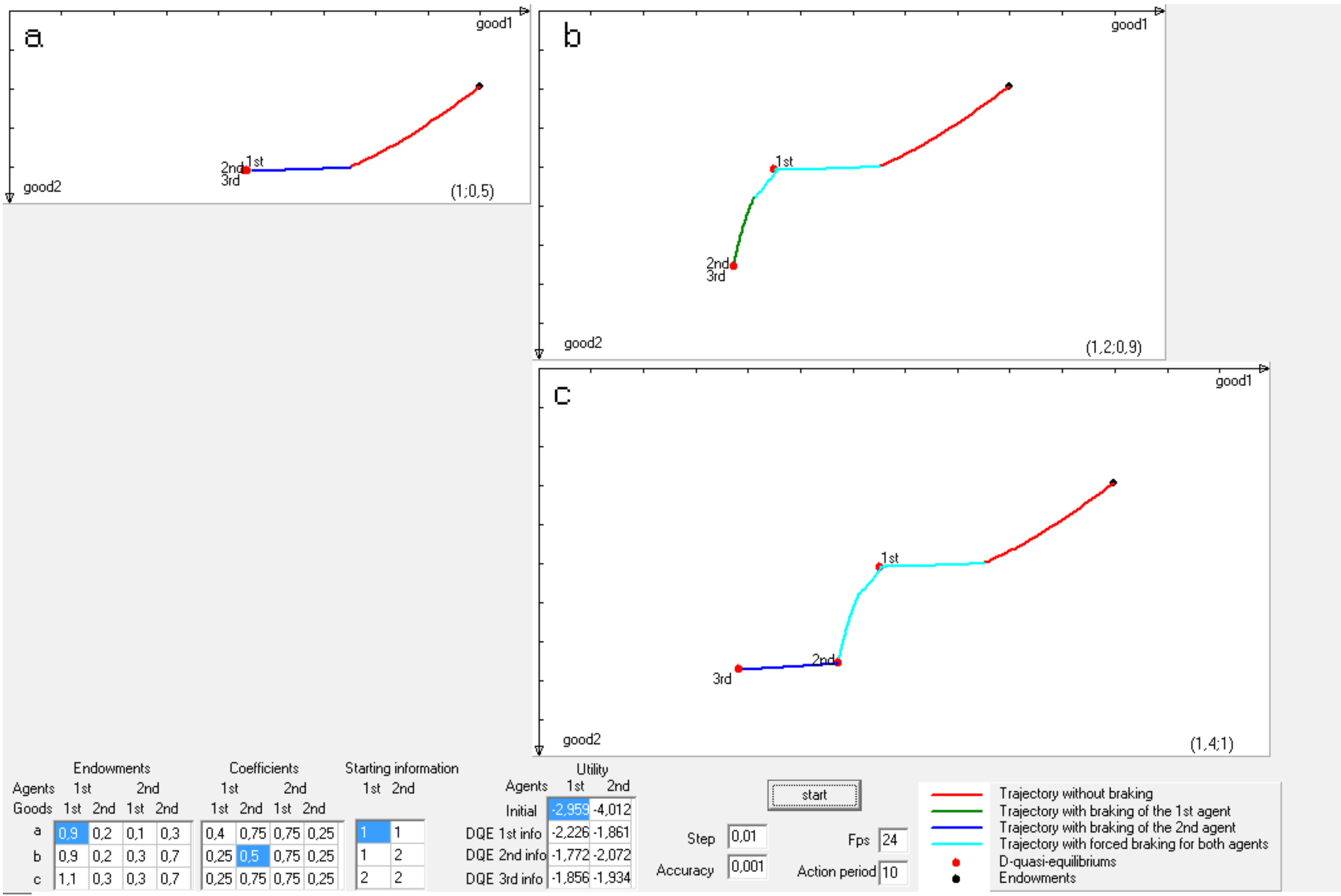

Рис. 6. Динамика договорного процесса с дифференцированными агентами и делением информации

для 'b' и 'c' — 'b'; именно для этих событий реализуется D-квазиравновесие заданное через равновесие в данном событии мира, см. пример 6.1. Также любопытно, что для дифференцированных агентов при некоторых данных развитие договорного процесса сразу после деления информации возможно протекать таким образом, что сначала идёт разрыв имеющихся договоров, а уже затем заключение новых (для представленных на картинке чисел это не так). Данный факт имеет простое объяснение: после деления информацией в модели с дифференцированными агентами появляются новые агенты (функция полезности у некоторого индивида расщепляется на части), которым может оказаться выгодным рвать валовый договор. В случае приватного равновесия это невозможно.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе реализации проекта был проведён анализ различных понятий ядра и равновесия с точки зрения договорного подхода: анализировались концепции априорного приватного ядра и равновесия, в том числе относительно предельной информации; введены понятия D-ядра и D-равновесия и, наконец, были введены понятия интерим ядра и интерим равновесия. Понятие априорного частного равновесия близко примыкает (развивает) к понятию вальрасовского равновесия в ожиданиях (WEE), а интерим равновесие развивает концепцию равновесия в рациональных ожиданиях (REE). Концепция интерим ядра тоже новая и через интерим равновесие соответствует понятию REE.

Математические результаты по теме: доказаны теоремы существования априорного частного равновесия и его совпадения с априорным частным ядром в условиях совершенной конкуренции в рамках, я считаю, вполне приемлемых модельных предположений. Подобные результаты обозначены для D-ядра и равновесия. В части интерим концепций на примере показано, что обычно (генерически) им соответствуют пустое множество решений. Однако это случай, когда возможно поделиться информацией и затем заключить взаимовыгодный контракт. После реализации интерим равновесия (элемента из ядра) договорной процесс заканчивается.

Важно, что во всех предложенных и изученных понятиях индивиды не могут лгать с выгодой для себя и, тем самым, все объекты становятся "incentive compatible". Конечно, это происходит по причине измеримости контрактов относительно частной информации. Однако, чтобы реализовать WEE-равновесия и распределения из частного ядра в момент, когда завтра уже наступило, надо уже сегодня обеспечить механизм реализации — юридически оформленные договора и проч. Это так, ибо если это не распределение из интерим-ядра, то всегда найдется группа желающих разорвать договоры «составленные вчера вечером» и заключить новые «сегодня утром», т. е. тогда, когда неопределённость разрешилась, пусть пока ещё только частично. Более того, если нет устойчивости относительно частичных разрывов (значит, это не равновесие с дифференцированными агентами), то найдутся желающие частично рвать договоры... При отсутствии механизма эффективного контроля за соблюдением договоров, это будет означать недопоставки по заключённым договорам и, как следствие, влечёт разбалансировку экономики в целом. Высказанные соображения привели к следующей идее о наиболее «правильном» (адекватном) понятии равновесия и ядра изложенным в разделе 6.4. На словах: предположим, что в пространстве всех допустимых договоров, измеримых в нужной мере, выделяется особое подпространство договоров, обладающих особой экзогенно заданной формой стабильности: если договор этого типа заключён сегодня, то непременно будет реализован завтра. Прочие договоры не обладают такой сильной стабильностью, но агенты их так же могут заключать. При этом, однако, эти договоры являются специфической формой необязательного соглашения: завтра утром индивиды могут передумать и разорвать контракт без каких-либо проблем для себя — это в рамках правил игры и все знают это. Таким образом складывается то, что можно было бы назвать, в соответствии с терминологией из Маракулин (2003), сложно договорным распределением. К этим распределениям приводят стабильные сети договоров, с учётом указанной специфики и разных возможностей по разрыву договора — только целиком или можно и частично. Таким способом вводятся специфические понятия ядра и равновесия.

Введённые понятия иллюстрирует следующий содержательный пример. Предположим, что имеется группа ответственных за данное ими слово агентов, эти люди всегда исполняют данные ими обещания — даже если это окажется им невыгодно в данный момент и они могут понести ущерб по сравнению со случаем разрыва заключённого ранее (вчера) договора. Этот договор был взаимовыгодным в рамках известной вчера вечером информации и имеющейся на тот момент неопределённости. Сегодня появилась свежая информация, хотя окончательно неопределённость всё ещё не разрешилась. И теперь один из участников договора осознаёт, что в новых обстоятельствах ему было бы выгодно разорвать контракт, может быть только частично — однако он не делает этого... С сиюминутной точки зрения это кажется неразумным, однако очень даже разумно в стратегическом долговременном плане — в последнем случае используется ожидаемая полезность, а в предыдущем текущая. Однако не все индивиды так себя ведут в этих обстоятельствах и, даже если вы являетесь ответственным лицом в смысле контрактных обязательств, это ещё не значит, что вы уже член клуба — надо чтобы другие агенты это узнали и поверили в это... Так вот, контракты, заключённые между членами клуба ответственных агентов, будут реализованы завтра наверняка — и это все знают — в то время как прочие договоры — в зависимости от ситуации, и никто заранее не знает, какова она будет в точности...

9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство утверждения 4.1. Пусть x нечётко договорное распределение, реализованное правильной сетью V, т. е. $x = x(V)$ для некоторой сети V, удовлетворяющей определению 2. Предположим (3) ложно и, следовательно, существует $y = (y_i)_{\mathcal{I}} \neq e$, принадлежащий левой части (3). Рассмотрим коалицию $S = \{i \in \mathcal{I} \mid y_i \neq e_i\}$. Отметим, что $\mathcal{P}_i(x_i) \neq \emptyset$, $i \in S$ и найдём $z_i \in \mathcal{P}_i(x_i)$, $i \in S$ такие, что $y_i = z_i + \lambda_i(e_i - x_i)$ для некоторого $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i \in S$ и $y_i = e_i$, $i \notin S$. Положим $u_i = y_i - e_i$, $i \in \mathcal{I}$. Так как $\sum_{i\in\mathcal{I}} y_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} e_i$, то $\sum_{\mathcal{I}} u_i = 0$ и, следовательно, $u = (u_i)_{i\in\mathcal{I}}$ контракт, где $\operatorname{supp}(u) = S \neq \emptyset$. Теперь можно написать

$$z_i = y_i - e_i + \lambda_i(x_i - e_i) + e_i = u_i + \lambda_i \sum_{v\in V} v_i + e_i, \quad i \in S.$$

Далее для $v \in V$ положим $t_i = t_i^v = \lambda_i$, $i \in S$, пусть $t_i = t_i^v \in [0,1]$, $i \notin S$ и применим $T(V) = \{t^v\}_{v\in V}$ для распределения $x = x(V)$. Имеем $x^T = e + \Delta(V^T)$, где по построению $x_i^T = e_i + t_i(x_i - e_i)$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$. Следовательно, по построению

$$u_i + x_i^T = z_i \in \mathcal{P}_i(x_i), \quad \forall\, i \in S.$$

Таким образом, x^T не является договорным сверху, что противоречит тому, что x нечётко договорное распределение.

Покажем, что если правильно-договорное снизу распределение x удовлетворяет (3), то оно нечётко договорное относительно сети $V = \{x - e\}$. Предположим противное и найдём

$T = \{t\}$ и контракт $u = (u_i)_{\mathcal{I}}$, $\operatorname{supp}(u) = S \neq \emptyset$ такие, что

$$u_i + t_i(x_i - e_i) + e_i \in \mathcal{P}_i(x_i), \quad \forall\, i \in S \iff z_i = u_i + e_i \in \mathcal{P}_i(x_i) + t_i(e_i - x_i), \quad \forall\, i \in S.$$

Положим $z_i = e_i$ для $i \notin S$. Теперь из определения контракта можно заключить $\sum_{i\in\mathcal{I}} z_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} e_i$. Тем самым найдено распределение $z \neq e$, принадлежащее левой части (3), получили противоречие. ■

Далее прежде всего дадим необходимые определения. Начнём с рассмотрения аффинного подпространства $\mathcal{A}(\mathbb{P})$ всех сбалансированных распределений, измеримых относительно заданной информационной структуры $\mathbb{P} = \{P_i\}_{\mathcal{I}}$, где $L = (\mathbb{R}^l)^\Omega$ это пространство контингентных продуктов. Положим

$$\mathcal{A}(\mathbb{P}) = \{(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \mid \sum_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} e_i \;\;\&\;\; \forall\, i \in \mathcal{I} \;\; x_i : \Omega \to \mathbb{R}^l \;\; P_i - \text{измерима}\}.$$

Запишем подробнее требование измеримости отображений $x_i(\cdot)$, имеем $\iff$
$x_i(\cdot)$ постоянна на элементах информационного разбиения P_i $\iff$
$x_i(\cdot) \in \mathbf{Map}_{P_i}(\Omega, \mathbb{R}^l)$ $\iff$

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad x_i(\omega') = x_i(\omega) \text{ для всех } \omega' \in P_i(\omega). \tag{34}$$

Лемма 9.1. *Пусть P некоторое разбиение Ω. Тогда пространство, ортогональное подпространству $\mathbf{Map}_P(\Omega, \mathbb{R}^l)$ всех P-измеримых, со значениями в $\mathbb{R}^l$ функций, описывается следующим образом:*

$$[\mathbf{Map}_P(\Omega, \mathbb{R}^l)]^\perp = \{q : \Omega \to \mathbb{R}^l \mid \forall\, \omega \in \Omega, \sum_{\omega' \in P(\omega)} q(\omega') = 0\}. \tag{35}$$

Таким образом, эта лемма утверждает, что функционал $q_i(\cdot)$ обращается в ноль на всех отображениях, удовлетворяющих (34), тогда и только тогда, когда для каждого элемента $P_i(\omega)$ разбиения P_i равна нулю сумма векторов $q_i(\omega')$, взятая по $\omega' \in P_i(\omega)$.

Доказательство леммы 9.1. Пусть $z \in \mathbf{Map}_P(\Omega, \mathbb{R}^l)$ и q из двойственного пространства. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_k$ элементы разбиения P. Вычислим скалярное произведение векторов:

$$\begin{aligned}\langle z, q\rangle &= \sum_{\omega\in E_1} \langle z(\omega), q(\omega)\rangle + \sum_{\omega\in E_2} \langle z(\omega), q(\omega)\rangle + \cdots + \sum_{\omega\in E_k} \langle z(\omega), q(\omega)\rangle = \\ &= \langle z(\omega_1), \sum_{\omega\in E_1} q(\omega)\rangle + \langle z(\omega_2), \sum_{\omega\in E_2} q(\omega)\rangle + \cdots + \langle z(\omega_k), \sum_{\omega\in E_k} q(\omega)\rangle,\end{aligned}$$

где $\omega_j \in E_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$ выбраны произвольным образом. Так как векторы $z(w_j) \in \mathbb{R}^l$ могут быть любыми, то, для того, чтобы последняя сумма обращалась в ноль необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{\omega \in E_j} q(\omega) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Что и требовалось доказать. ■

Доказательство леммы 5.1 (о взаимовыгодном контракте). Рассмотрим ситуацию, когда взаимовыгодного контракта не существует. Это можно записать таким образом. Пусть

$$\mathcal{V}_S = \{v = (v_i)_S \in L^S \mid v_i : \Omega \to \mathbb{R}^l \ P_i - \text{измерима}, \ v_i(\omega) = 0, \ \omega \notin A, \ i \in S, \sum_S v_i = 0\},$$

это пространство возможных контрактов в коалиции S таких, что обмен происходит в пределах события A. Тогда

$$\nexists \ v \in \mathcal{V}_S : \ (x_i + v_i)_S \in \prod_S \mathcal{P}_i(x_i) \quad \Longleftrightarrow \quad \prod_S (\mathcal{P}_i(x_i) - \{x_i\}) \bigcap \mathcal{V}_S = \emptyset.$$

В последней формуле пересекаются выпуклые множества, причём первое из них имеет непустую внутренность. Значит, применима терема отделимости и мы можем заключить существование такого вектора (функционала) $f = (f_i)_{i \in S} \in (L^S)' = L^S$, $f \neq 0$, что

$$\langle f, \prod_S (\mathcal{P}_i(x_i) - \{x_i\}) \rangle \geq \langle f, \mathcal{V}_S \rangle. \tag{36}$$

Так как $\mathcal{V}_S$ подпространство, то $\langle f, \mathcal{V}_S \rangle = 0$ и, более того, в силу

$$\mathcal{V}_S = \prod_{i \in S} \mathcal{V}_A^i \bigcap \{v = (v_i)_{i \in S} \in L^S \mid \sum_S v_i = 0\},$$

где $\mathcal{V}_A^i = \{v_i \in L \mid v_i : \Omega \to \mathbb{R}^l, \ P_i - \text{измерима}, \ v_i(\omega) = 0, \forall \, \omega \notin A\}$, то f разлагается в сумму двух функционалов $f = q + p$ таких, что $q = (q_i)_S$ обращается в нуль на первом из пересекаемых в последней формуле множеств, а $p = (p_i)_S$ на втором. Отсюда с применением леммы 9.1 имеем:

$$\langle q, \prod_{i \in S} \mathcal{V}_A^i \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \langle q_i, \mathcal{V}_A^i \rangle = 0 \, \forall \, i \in S \ \Rightarrow \ \forall \, E \in P_i, \ E \subseteq A \ \sum_{\omega \in E} q_i(\omega) = 0 \ \ \forall \, i \in S; \tag{37}$$

вторая часть предыдущего заключения даёт

$$\langle p, \{v = (v_i)_{i \in S} \in L^S \mid \sum_S v_i = 0\} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = p_j = p, \ \forall \, i \neq j, \ i, j \in S.$$

В итоге имеем:

$$\exists p \in (\mathbb{R}^l)^\Omega : \ \ \forall \, i \in S \ \ \exists q_i \in (\mathbb{R}^l)^\Omega \ \ | \ \ f_i = p + q_i \ \ \& \ \ \forall \, E \in P_i, \ E \subseteq A \ \ \sum_{\omega \in E} q_i(\omega) = 0.$$

С другой стороны, последнее вместе с (36) даёт $\langle f, \prod_S (\mathcal{P}_i(x_i) - \{x_i\}) \rangle \geq 0$, откуда в силу $0 \in \mathrm{cl}(\mathcal{P}_i(x_i) - \{x_i\})$, $i \in \mathcal{I}$ (локальная ненасыщаемость предпочтений) заключаем

$$\langle f_i, \mathcal{P}_i(x_i) \rangle \geq \langle f_i, x_i \rangle, \quad i \in S.$$

Далее покажем, что $p \neq 0$ и $p + q_i \neq 0$ для всех i.

Увеличив потребление каждого индивида на единицу каждого продукта в каждом состоянии мира из A, мы получим распределение, строго предпочитаемое каждым агентом и из *внутренности* множества $(\mathbb{R}^l)^A \cap \prod_S \mathcal{P}_i(x_i)$. Отсюда следует, что значение функционала f на этом распределении должно быть строго больше его значения на $x = (x_i)_S$, так как иначе из неравенства (36) будет следовать, что на некоторой окрестности нуля f обращается в нуль и, значит, функционал равен нулю, что противоречит заключению теоремы отделимости. Однако при этом, в силу (37), разница в значениях функционала составит величину $\sum_{\omega \in A}(p(\omega) \cdot \mathbf{1}) \neq 0$, что, в частности, доказывает $p_{|A} \neq 0$.

Предположим далее $p + q_i = 0$ для некоторого i. Тогда $\sum_{\omega \in A}(p(\omega) + q_i(\omega)) \cdot \mathbf{1} = 0$, откуда в силу (37) имеем $\sum_{\omega \in A}(p(\omega) \cdot \mathbf{1}) = -\sum_{\omega \in A}(q_i(\omega) \cdot \mathbf{1} = 0$, что в силу предыдущего невозможно.

Доказательство второй части леммы вполне стандартно. Предположим, что в условиях леммы нашёлся взаимовыгодный контракт $v = (v_i)_S$, т. е. нашёлся вектор со свойствами: $x_i + v_i \in \mathcal{P}_i(x_i)\ \forall\, i \in S\ \&\ \sum_S v_i = 0$. Применяя (11) и суммируя неравенства находим $\sum_S p(x_i + v_i) > \sum_S p x_i$, что невозможно. ■

Доказательство следствия 5.1 (к лемме 5.1 о взаимовыгодном контракте). В силу (11) для дифференцируемых предпочтений во внутренней точке вектор $f_i = p + q_i \neq 0$ должен быть пропорционален градиенту функции полезности. Причём, так как $f_i \neq 0$ для каждого $i \in S$, то коэффициент пропорциональности будет *строго* больше нуля. Значит, можем заключить:

$$\forall\, i \in S\ \exists\, \lambda_i > 0: \ \lambda_i \nabla u_i(x_i) = (p + q_i),$$

откуда, суммируя по $\omega \in E \in P_i$, $E \subseteq A$ в силу (10) будем иметь

$$\forall\, E \in P_i,\ E \subseteq A \ \ \lambda_i \sum_{\omega \in E} \nabla_\omega u_i(x_i) = \sum_{\omega \in E} p(\omega) \ \ \forall\, i \in S.$$

Что и требовалось доказать. Легко видеть, что изложенные рассуждения обратимы. ■

Рассмотрим кооперативную игру с дробными коалициями. Для заданного $r \in \mathbb{N}$ дробная коалиция задаётся вектором

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_n): \quad r d_i \in \{0, 1, \dots, r\}$$

и множеством допустимых вектор-выигрышей агентов, нетривиально участвующих в данной коалиции:

$$V(d) \subset \mathbb{R}^{\mathrm{supp}\,(d)}, \ \ \mathrm{supp}\,(d) = \{i \in \mathcal{I} \mid d_i > 0\}.$$

Пусть D обозначает множество всех ненулевых дробных коалиций. Так же как и обычные, дробные коалиции можно использовать для доминирования текущего дележа; при этом мы приходим к понятию дробного ядра игры, это

$$\mathcal{C}_q(V) = \{x \in V(\mathcal{I}) \mid \nexists d \in D : \; \exists\, y \in V(d) \text{ такой, что } y_i > x_i \;\forall\, i \in \operatorname{supp}(d)\}.$$

Далее мы рассмотрим обобщение теоремы Скарфа на случай дробных коалиций. Для этого нам потребуется распространить на этот случай понятие сбалансированного семейства коалиций.

Назовём семейство *дробных* коалиций $\mathcal{B} \subseteq D$ *сбалансированным*, если для $d \in \mathcal{B}$ существуют такие действительные $\lambda_d \geq 0$, что выполнено

$$\sum_{d \in \mathcal{B}} \lambda_d d_i = 1 \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$$

или, в эквивалентной форме,

$$\sum_{d \in \mathcal{B}} \lambda_d d = \mathbf{1}_{\mathcal{I}}. \tag{38}$$

Игра (D, V) называется *сбалансированной*, если для каждого сбалансированного семейства коалиций $\mathcal{B}$ выполнено

$$\bigcap_{d \in \mathcal{B}} \operatorname{pr}^{-1}_{|_{S(d)}}(V(d)) \subseteq V(\mathcal{I}),$$

где $\operatorname{pr}_{|_{S(d)}}(\cdot)$ — проектирующее отображение пространства $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ на $\mathbb{R}^{S(d)}$, $S(d) = \operatorname{supp}(d)$.

Теорема 9.1. *Пусть (D, V) кооперативная игра с дробными коалициями, удовлетворяющая обычным требованиям (замкнутость, насыщенность вниз, (12) и т. д. для дробных коалиций). Тогда, если (D, V) сбалансирована, то $\mathcal{C}_q(V) \neq \emptyset$.*

Доказательство теоремы 9.1. Доказательство основано на применении теоремы Какутани о существовании неподвижной точки к надлежащим образом построенному точечно-множественному отображению. Собственно идея этого доказательства близка и отчасти заимствована мною у Данилова, который первым предложил короткое элегантное доказательство теоремы Скарфа, основанное на применении теоремы Какутани (см. лекцию 22 из Данилов (2002)). Конструкция этого отображения и выпуклого компакта, который это отображение переводит в себя, описывается ниже.

Будем считать, без ограничения общности, что одноэлементные коалиции способны заработать ноль, но не более, т. е., что $V(\mathbf{1}_{\{i\}}) = (-\infty, 0]\;\forall\, i \in \mathcal{I}$. Далее рассмотрим множества

$$\widetilde{V}(d) = V(d) \cap \mathbb{R}_+^{\operatorname{supp}(d)} \neq \emptyset, \quad d \in D.$$

По предположению (12) все они являются непустыми и компактными. Следовательно, найдётся такое действительное $c > 0$, что куб со стороной $2c$ с центром в нуле содержит в своей внутренности каждое из этих множеств, т. е. выполнено

$$\widetilde{V}(d) \subset \operatorname{int} G \cap \mathbb{R}^{\operatorname{supp}(d)}, \quad G = \{z \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \mid -c \cdot (1, 1, \ldots, 1) \leq z \leq c \cdot (1, 1, \ldots, 1)\}, \quad \forall\, d \in D.$$

На кубе G определим следующие точечно-множественные отображения[38]:

$$\chi_d(z) = \begin{cases} \{2\}, & \text{если} \quad z_d \in \operatorname{int}(\widetilde{V}(d) - \mathbb{R}_+^{\operatorname{supp}(d)}), \\ \{0\}, & \text{если} \quad z_d \notin (\widetilde{V}(d) - \mathbb{R}_+^{\operatorname{supp}(d)}), \\ [0,2], & \text{иначе.} \end{cases}$$

Итак, по определению $\chi_d(z)$ принимает значение $\{2\}$ если $z_d = (z_i)_{i\in\operatorname{supp}(d)}$ находится внутри «скорректированного» множества коалиционных возможностей $\widetilde{V}(d) - \mathbb{R}_+^{\operatorname{supp}(d)}$, равна отрезку $[0,2]$ на его границе и совпадает с $\{0\}$ за его пределами.

На кубе $[0,2]^D$ определим точечно-множественное отображение $\varphi(\cdot)$ со значениями в G по формуле:

$$\varphi(\Lambda) = \operatorname*{argmax}_{z\in G}\langle z, \sum_{d\in D}\lambda_d d - \mathbf{1}_{\mathcal{I}}\rangle, \quad \Lambda = (\lambda_d)_{d\in D} \in [0,2]^D. \tag{39}$$

Наконец, определим искомое отображение компакта $G \times [0,2]^D$ в себя по формуле

$$\psi(z,\Lambda) = \varphi(\Lambda) \times \prod_D \chi_d(z) \subset G \times [0,2]^D, \quad (z,\Lambda) \in G \times [0,2]^D.$$

По построению легко видеть, что отображение ψ имеет замкнутый график и, конечно, непустые выпуклые значения. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы Какутани о неподвижной точке и можем заключить существование такой пары $(\bar{z},\bar{\Lambda}) \in G\times[0,2]^D$, что

$$(\bar{z},\bar{\Lambda}) \in \psi(\bar{z},\bar{\Lambda}).$$

Покажем далее, что $\bar{z} \in \mathcal{C}_q(V)$. С этой целью покажем, что в неподвижной точке выполняется

$$\sum_{d\in D}\bar{\lambda}_d d = \mathbf{1}_{\mathcal{I}}, \quad \bar{\lambda}_d \in \chi_d(\bar{z}),\ d \in D, \tag{40}$$

т. е. семейство $\bar{\Lambda}$ сбалансировано. Предположим противное, тогда:

$$\sum_{d\in D}\bar{\lambda}_d d - \mathbf{1}_{\mathcal{I}} \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists\, i \in \mathcal{I} : \sum_{d\in D}\bar{\lambda}_d d_i - 1 \neq 0.$$

Рассмотрим одну возможность: для данного i выполнено $\sum_{d\in D}\bar{\lambda}_d d_i - 1 > 0$. Но тогда в силу (39) должно быть $\bar{z}_i \in \varphi_i(\bar{\Lambda}) = \{c\}$, откуда из определения c и построения $\chi_d(\bar{z}) = \{0\}$ $\forall\, d \in D$ и, значит, $\sum_{d\in D}\bar{\lambda}_d d_i = 0$. Получили противоречие.

Далее предположим, что для i выполнено $\sum_{d\in D}\bar{\lambda}_d d_i - 1 < 0$. В силу (39) это даёт $\bar{z}_i \in \varphi_i(\Lambda) = \{-c\} < 0$, откуда по построению $\bar{\lambda}_{\mathbf{1}_{\{i\}}} = 2 \Rightarrow \sum_{d\in D}\bar{\lambda}_d d_i \geq 2$. Вновь имеем противоречие. Равенство (40) доказано, так как опровергнуты все другие возможности.

[38] Получены путем замыкания графика характеристической функции множества с последующим овыпуклением значений.

Условие (40) это условие сбалансированности набора $\bar{\Lambda} = (\bar{\lambda}_d)_{d\in D}$ и, так как по построению $\chi_d(z)$ при $\bar{\lambda}_d > 0$, $\bar{\lambda}_d \in \chi_d(\bar{z})$ должно быть $\bar{z}_d \in V(d)$, то в силу сбалансированности дробно-коалиционной игры, имеем $\bar{z} \in V(\mathcal{I})$. Наконец, если бы нашлась коалиция $d \in D$, доминирующая $\bar{z}$, то это означало бы, что для данного d выполнено $\bar{\lambda}_d = 2 \in \chi_d(\bar{z})$, что вновь противоречит (40). Итак, найден не доминируемый никакой коалицией исход $\bar{z}$ из $V(\mathcal{I})$ и, следовательно, $\mathcal{C}_q(V) \neq \emptyset$. ■

Доказательство теоремы 5.1. Для того, чтобы доказать теорему будет достаточно доказать непустоту симметрической части ядра

$$\{x = (x_{im})_{m=1,i\in\mathcal{I}}^{m=r} \in \mathcal{C}(\mathcal{E}_r^{di}) \mid x_{im} = x_{im'}\ \forall\, m, m' = 1, \ldots, r,\ \forall\, i \in \mathcal{I}\} = \mathbb{S}(\mathcal{C}(\mathcal{E}_r^{di}))$$

для каждой из реплик рассматриваемой модели. Сделаем это. С этой целью поставим в соответствие модели $\mathcal{E}_r^{di}$ кооперативную игру n-лиц с дробными коалициями. Для коалиции $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $rd_i \in \{0, 1, \ldots, r\}$ $\forall\, i \in \mathcal{I}$ определим множество

$$\mathcal{A}(d) = \{y^d = (y_i)_{\mathcal{I}} \mid \sum_{\mathcal{I}} d_i y_i = \sum_{\mathcal{I}} d_i e_i \ \&\ (y_i - e_i)(\cdot)\ P_i^0 \text{ измеримо},\ y_i \in (\mathbb{R}_+^l)^{\Omega},\ i \in \mathcal{I}\}.$$

От обычных множеств, отвечающих стандартным коалициям, это множество внутрикоалиционных распределений отличается в части балансовых соотношений, где фактически рассматриваются требования, отвечающие коалиции реплицированной модели экономики. Далее положим

$$V(d) = \{(v_i)_{i\in \mathrm{supp}\,(d)} \leq (u_i(x_i^d))_{i\in \mathrm{supp}\,(d)} \ \mid\ x^d \in \mathcal{A}(d)\}.$$

Для того чтобы применить теорему 9.1 достаточно проверить сбалансированность построенной таким образом игры (D, V). Сделаем это.

Пусть $\mathcal{B} \subseteq D$ *сбалансированное* семейство дробных коалиций и пусть $\lambda_d \geq 0$, $d \in \mathcal{B}$ соответствующая система скалярных коэффициентов, удовлетворяющая (38). Пусть $v \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ такой, что $\forall\, d \in D$

$$(v_i)_{i\in \mathrm{supp}\,(d)} \in V(d) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x^d \in \mathcal{A}(d):\ (v_i)_{i\in \mathrm{supp}\,(d)} \leq (u_i(x_i^d))_{i\in \mathrm{supp}\,(d)}.$$

Рассмотрим распределение в коалиции всех индивидов, заданное по формулам:

$$z_i = \sum_{d\in\mathcal{B}} \lambda_d d_i (x_i^d - e_i), \quad i \in \mathcal{I}.$$

По построению $z_i(\cdot)$ P_i-измерима и, кроме того, имеет место

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} z_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} [\sum_{d\in\mathcal{B}} \lambda_d d_i (x_i^d - e_i)] = \sum_{d\in\mathcal{B}} \lambda_d \sum_{i\in\mathcal{I}} d_i (x_i^d - e_i) = 0.$$

Значит $z = (z_i)_{i\in\mathcal{I}}$ допустимый договор, причём так как $\sum_{d\in\mathcal{B}} \lambda_d d_i = 1$, то

$$z_i + e_i = \sum_{d\in\mathcal{B}} \lambda_d d_i x_i^d \in (\mathbb{R}_+^l)^{\Omega}, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Далее, умножая неравенства $v_i \le u_i(x_i^d)$ на $\lambda_d d_i \ge 0$ и складывая их по $d \in \mathcal{B}$ получаем

$$v_i = (\sum_{d\in\mathcal{B}} \lambda_d d_i) v_i \le \sum_{d\in\mathcal{B}} \lambda_d d_i u_i(x_i^d) \le u_i(\sum_{d\in\mathcal{B}} \lambda_d d_i x_i^d) = u_i(z_i + e_i), \quad \forall\, i \in \mathcal{I}.$$

По определению $V(\mathcal{I})$ это означает $v \in V(\mathcal{I})$ и, тем самым, игра в целом сбалансирована. По теореме 9.1 заключаем существование некоторого $\bar{v} \in \mathcal{C}_q(V)$ такого, что

$$\exists\, x \in \mathcal{A}(\mathcal{I}) : \bar{v} = u(x) \;\;\&\;\; \nexists\, d \in D \mid \exists y^d \in \mathcal{A}(d) :\; u_i(x_i^d) < u_i(y_i^d), \quad i \in \mathrm{supp}\,(d). \tag{41}$$

Далее покажем, что $x^r = (x, x, \dots, x) \in \mathbb{S}(\mathcal{C}(\mathcal{E}_r^{di}))$. Предположим противное и пусть $T \subseteq \mathcal{I} \times \{1, \dots, r\}$ доминирующая коалиция, т. е.

$$\exists z^T = (z_{im})_{(i,m)\in T} : \quad u_i(z_{im}) > u_i(x_i)\; \forall\, (i, m) \in T.$$

Положим далее $T(i) = \{m \in \{1, \dots, r\} \mid (i, m) \in T\}$, пусть $|T(i)| = \mathrm{card}(T(i))$ это число элементов в этом множестве и пусть $d_i = \frac{|T(i)|}{r}$, $i \in \mathcal{I}$, задают дробную коалицию $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Определим далее распределение $y^d \in \mathcal{A}(d)$, полагая

$$y_i^d = \frac{1}{|T(i)|} \sum_{m\in T(i)} z_{im}, \quad i \in \mathrm{supp}\,(d).$$

Теперь в силу выпуклости предпочтений (вогнутость полезностей) и того, что по выбору T доминирует x^r, заключаем

$$y_i^d \succ_i x_i \;\; \forall\, i \in \mathrm{supp}\,(d),$$

что противоречит (41). Это завершает доказательство того факта, что симметричная часть ядра каждой из реплик исходной модели непуста. Проектируя это множество на пространство распределений, мы заключаем непустоту и компактность для каждого $r \in \mathbb{N}$ множества

$$\{x \in \mathcal{A}(\mathcal{I}) \mid x^r \in \mathcal{C}(\mathcal{E}_r^{di})\}.$$

Так как эти множества вкладываются одно в другое, уменьшаясь с ростом r, то по лемме о вложенных компактах их пересечение должно быть непусто — что и требовалось доказать. ■

Доказательство следствия 5.4. Доказательство основано на применении утверждения 5.2 и соотношения (16), характеризующих элементы нечёткого ядра. Нужно показать, что (16) влечёт (17).

Предположим, что x удовлетворяет (16) и что (17) ложно. Тогда найдутся вектор $t = (t_1, \dots, t_n)$, $0 \le t_i \le 1$ и наборы $z_i \succ_i x_i$, $i \in \mathcal{I}$ такие, что имеет место

$$\sum_{\mathcal{I}} z_i + \sum_{\mathcal{I}} t_i(e_i - x_i) = \sum_{\mathcal{I}} e_i, \quad z_i - e_i \in \mathcal{L}_i, \quad i \in \mathcal{I}. \tag{42}$$

Далее для действительного $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ рассмотрим вектор $y = y(\beta) = (y_i)_{i\in\mathcal{I}}$, полагая

$$y_i(\beta) = \beta[z_i + t_i(e_i - x_i)] + (1-\beta)x_i, \quad i \in \mathcal{I}.$$

В силу (42) и $x \in \mathcal{A}(X)$ имеем $\sum_{\mathcal{I}} y_i(\beta) = \sum_{\mathcal{I}} e_i$ и $y_i(\beta) - e_i \in \mathcal{L}_i$, $i \in \mathcal{I}$ для каждого β. Теперь векторы $y_i(\beta)$ представим в виде

$$y_i(\beta) = (1-\beta t_i)x_i + \beta t_i e_i + (1-\beta t_i)\frac{\beta}{1-\beta t_i}(z_i - x_i), \quad i \in \mathcal{I},$$

где по выбору β имеем $\mu_i = \frac{\beta}{1-\beta t_i} \leq 1$. Это по предположениям на предпочтения для $i \in \mathcal{I}$ влечёт

$$\mu_i(z_i - x_i) \in \mathcal{P}_i(x) - x_i \;\Rightarrow\; \exists\, \eta_i \in \mathcal{P}_i(x) : \mu_i(z_i - x_i) = \eta_i - x_i.$$

Следовательно, предыдущая формула даёт

$$y_i = (1-\beta t_i)\eta_i + \beta t_i e_i,$$

что влечёт $y_i \in \Omega_i(x_i)$, $i \in \mathcal{I}$. Последнее позволяет применить соотношение (16), заключая $y = y(\beta) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ для *всех* действительных $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$. Записывая это это равенство покомпонентно по определению $y_i(\beta)$ заключаем

$$\beta[z_i + t_i(e_i - x_i)] + (1-\beta)x_i = e_i \;\Rightarrow\; z_i + t_i(e_i - x_i) = x_i + \frac{e_i - x_i}{\beta}$$

что должно быть выполнено для всех $i \in \mathcal{I}$ и *всех* $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$. Однако эти уравнения (рассмотренные для *разных* β) могут выполняться только если $x_i = e_i = z_i$, $i \in \mathcal{I}$, что по выбору z_i влечёт $x_i \succ_i x_i$ и противоречит предположениям на предпочтения — что и требовалось доказать. ■

Доказательство теоремы 5.3. Пусть $x \in \mathcal{C}^e(\mathcal{E}^{di})$. Воспользуемся следствием 5.4 и формулой (17), к которой применим теорему отделимости и найдём функционал (вектор) $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in L^{\mathcal{I}}$, $f \neq 0$ отделяющий самое левое множество в (17) от пересечения двух оставшихся. Имеем:

$$\langle f, \prod_{\mathcal{I}}(\mathcal{P}_i(x) + \mathrm{co}\{0, e_i - x_i\})\rangle \geq \langle f, \{(z_1, \ldots, z_n) \mid \sum_{i\in\mathcal{I}} z_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} e_i\} \bigcap (\prod_{\mathcal{I}} \mathcal{L}_i + (e_1, \ldots, e_n))\rangle. \tag{43}$$

Так как в правой части неравенства представлены значения функционала на нетривиальном аффинном подпространстве, функционал $f(\cdot)$ должен быть на нём постоянен, что эквивалентно

$$\langle f, \prod_{\mathcal{I}} \mathcal{L}_i \bigcap \{(z_1, \ldots, z_n) \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{i\in\mathcal{I}} z_i = 0\}\rangle = 0.$$

Отсюда следует, что f разлагается в сумму двух функционалов $f = q + p$ таких, что $q = (q_i)_{\mathcal{I}}$ обращается в нуль на первом из пересекаемых в последней формуле множеств, а $p = (p_i)_{\mathcal{I}}$ на втором. Отсюда с применением леммы 9.1 имеем:

$$\langle q, \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{L}_i\rangle = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \langle q_i, \mathcal{L}_i\rangle = 0 \;\; \forall\, i \in \mathcal{I} \;\;\Rightarrow\;\; \forall\, E \in P_i, \;\; \sum_{\omega\in E} q_i(\omega) = 0 \;\; \forall\, i \in \mathcal{I}; \tag{44}$$

вторая часть предыдущего заключения даёт

$$\langle p, \{v = (v_i)_{i\in\mathcal{I}} \in L^{\mathcal{I}} \mid \sum_{\mathcal{I}} v_i = 0\}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = p_j = p,\ \forall\, i,j \in \mathcal{I}.$$

В итоге имеем:

$$\exists p \in (\mathbb{R}^l)^\Omega : \quad \forall\, i \in \mathcal{I} \ \ \exists q_i \in (\mathbb{R}^l)^\Omega \ \mid \ f_i = p + q_i \ \ \& \ \ \forall\, E \in P_i, \ \ \sum_{\omega\in E} q_i(\omega) = 0.$$

Проводя далее стандартные рассуждения, осуществлённые ранее в лемме 5.1 (о взаимовыгодном контракте), устанавливаем аналог формулы (11). Действительно, вычисляя правую часть (43) с учётом вышеприведённых заключений, находим $\sum_{j\in\mathcal{I}}\langle p + q_j, e_j\rangle$. С другой стороны, выбирая $e_j = x_j + (e_j - x_j) \in \mathrm{cl}(\mathcal{P}_j(x) + \mathrm{co}\{0, e_j - x_j\})$ для $j \neq i$ и $z_i + (e_i - x_i) \in (\mathcal{P}_i(x) + \mathrm{co}\{0, e_i - x_i\})$ и подставляя это в левую часть (43) находим $\langle p + q_i, z_i - x_i\rangle + \sum_{j\in\mathcal{I}}\langle p + q_j, e_j\rangle$. Производя сокращения и с учётом произвола в выборе $z_i \in \mathcal{P}_i(x)$ заключаем

$$\langle p + q_i, \mathcal{P}_i(x_i)\rangle \geq \langle p + q_i, x_i\rangle \ \ \& \ \ p + q_i \neq 0 \ \ \forall\, i \in \mathcal{I},$$

где последнее неравенство и $p \neq 0$ доказываются точно так, как это было сделано в лемме 5.1. Наконец, чтобы доказать бюджетные равенства, в последнем рассуждении вместо $(e_i - x_i) \in \mathrm{co}\{0, e_i - x_i\}$ возьмём $0 \in \mathrm{co}\{0, e_i - x_i\}$, далее заключая

$$\langle p + q_i, \mathcal{P}_i(x_i)\rangle \geq \langle p + q_i, e_i\rangle \ \ \forall\, i \in \mathcal{I}.$$

Так как $x_i \in \mathrm{cl}\mathcal{P}_i(x)$, то должно быть $\langle p + q_i, x_i\rangle \geq \langle p + q_i, e_i\rangle \Rightarrow \langle p + q_i, x_i - e_i\rangle \geq 0$, что в силу (44) и $x_i - e_i \in \mathcal{L}_i$ даёт $\langle p, x_i - e_i\rangle \geq 0$, $i \in \mathcal{I}$. Однако в силу сбалансированности распределения последнее возможно только в случае равенств $\langle p, x_i\rangle = \langle p, e_i\rangle$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$. Теорема 5.3 доказана. ■

Доказательство утверждения 6.2. Установим первую часть утверждения. Прежде всего, её условия нужно представить в виде, удобном для математического анализа. С этой целью сформулируем аналог соотношения (19), применённый к дифференцированным агентам. Положим

$$L(E) = \{z : \Omega \to \mathbb{R}^l \mid z(\omega) = 0,\ \omega \notin E\} = \chi^E \cdot L.$$

Тогда, для для нечётко договорного распределения с фиксированной информацией имеем

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} \sum_{E\in P_i} [((\chi^E \cdot \mathcal{P}_i(x_i)) \cap (x_i^E + L(E)) + \mathrm{co}\{0, e_i^E - x_i^E\}) \cup \{e_i^E\}] \bigcap$$

$$\bigcap \{z = (z_i)_{\mathcal{I}} \mid z_i = \sum_{E\in P_i} z_i^E,\ \forall\, i \in \mathcal{I} \ \ \& \ \ \sum_{i\in\mathcal{I}} z_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} e_i \ \&$$

$$(z_i^E - e_i^E)_{|E} = const,\ \& \ (z_i^E - e_i^E)_{|\Omega\setminus E} = 0,\ \forall\, (i,E) \in \Im\} = \{(e_1, \ldots, e_n)\}. \tag{45}$$

Отметим, что в отличие от (19), здесь нет необходимости включать в пересечение третий элемент, который вычленяет в пересечении контракты, измеримые относительно индивидуальной информации. По этим же соображениям вместо $\mathcal{P}_i^E(x_i)$ в конструкции первого из пересекаемых множеств использовались множества $(\chi^E \cdot \mathcal{P}_i(x_i)) \cap (x_i^E + L(E))$, где $(\chi^E \cdot \mathcal{P}_i(x_i))$ это алгебраическое произведение характеристической функции множества на множество предпочитаемых планов.

Далее, чтобы охарактеризовать распределения в ценовых категориях, применим теорему отделимости к пересечению (45) и найдём, таким образом, линейный функционал (вектор) $\pi = (p_i)_{i\in\mathcal{I}} \neq 0$ разделяющий эти множества. Данный функционал имеет следующую специальную структуру, в чём можно убедиться, используя рассуждения из доказательства леммы 5.1 (о взаимовыгодном контракте, см. стр. 70):

$$\exists p : \Omega \to \mathbb{R}^l \ \ \& \ \ q_i : \Omega \to \mathbb{R}^l, p + q_i \neq 0, \ \forall\, i \in \mathcal{I}$$

такие, что $\forall\, i \in \mathcal{I}\ \forall\, E \in P_i$

$$\begin{gathered}\sum_{\omega\in E} q_i(\omega) = 0 \ \ \& \\ \langle(\chi^E \cdot \mathcal{P}_i(x_i)) \cap (x_i^E + L(E)), p^E + q_i^E\rangle = \langle \mathcal{P}_i(x_i) \cap (x_i + L(E)), p^E + q_i^E\rangle \geq \\ \langle x_i^E, p^E + q_i^E\rangle = \langle e_i^E, p^E + q_i^E\rangle. \end{gathered} \tag{46}$$

Обратите внимание, что здесь функционал $p^E + q_i^E$ является опорным к множеству $\mathcal{P}_i(x_i) \cap (x_i + L(E))$, где, в отличие от $\mathcal{P}_i^E(x_i)$, в разных состояниях природы из E могут потребляться разные продуктовые потоки, т. е. возможно $(z_i - e_i)_{|E} \neq const$ при $z_i \in \mathcal{P}_i(x_i) \cap (x_i + L(E))$. Кроме того, отметим, что сейчас нельзя гарантировать, что $p^E + q_i^E \neq 0$ для всех $E \in P_i$; известно только что хотя бы одно не обращается в нуль (ибо $p + q_i \neq 0$). Далее, в силу $\langle \chi^E, q_i^E\rangle = 0$ для функций вида $x_i + z \cdot \chi^E \in \mathcal{P}_i(x_i)$, $z \in \mathbb{R}^l$ в соотношениях (46) можно избавиться от q_i записать их в эквивалентном виде: $\forall\, (i, E) \in \Im$,

$$\langle \sum_{\omega\in E} p(\omega), x_i^E - e_i^E\rangle = 0 \ \ \& \ \ \langle \sum_{\omega\in E} p(\omega), z\rangle \geq 0, \ \forall\, z \in \mathbb{R}^l : \ x_i + z \cdot \chi^E \in \mathcal{P}_i(x_i),$$

что доказывает первую часть леммы и (28). Отметим, что это в точности то, что требуется по определению D-квазиравновесия.

Далее, тот факт, что не существует взаимовыгодного контракта и после деления информацией означает, что нет взаимовыгодного контракта в условиях полной информации. При этом, однако, текущее распределение по-прежнему реализуется сетью договоров, отвечающей концепции с дифференцированными агентами и только эти договоры можно рвать — частично, нечётко или полностью. Последнее означает, что для того, чтобы удовлетворить условиям утверждения достаточно второе из пересекаемых множеств заменить на подобное ему, но вообще без требований измеримости (во втором множестве надо рассмотреть случай когда все различаемые события одноэлементные, т. е. когда $E = \{\omega\}$, $\omega \in \Omega$). В итоге получаем

$$\prod_{i\in\mathcal{I}}\sum_{E\in P_i}[(\chi^E\cdot\mathcal{P}_i(x_i))\cap(x_i^E+L(E))+\mathrm{co}\{0,e_i^E-x_i^E\})\cup\{e_i^E\}]\bigcap\{z=(z_i)_{i\in\mathcal{I}}\mid\sum_{i\in\mathcal{I}}z_i=\sum_{i\in\mathcal{I}}e_i\}.$$

Применяя далее стандартным образом теорему отделимости, заключаем существование «ценового» отображения $p : \Omega \to \mathbb{R}^l$ такого, что $\forall\,(i, E) \in \Im$,

$$\sum_{\omega\in E}p(\omega)x_i(\omega)=\sum_{\omega\in E}p(\omega)e_i(\omega)\ \&\ \sum_{\omega\in E}p(\omega)z(\omega)\geq 0,\ \forall\,z:\Omega\to\mathbb{R}^l : x_i+z\cdot\chi^E\in\mathcal{P}_i(x_i)\ -$$

что и требовалось доказать. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Aliprantis et al. eds. (2001) *Economic Theory* **18** (Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg)

Allen, B. (1991a) Market games with asymmetric information and nontransferable utility: representation results and the core, *University of Pensilvanya, CARESS Working Paper* #91-09

Allen, B. (1991b) Transferable utility market games with asymmetric information: representation results and the core, *University of Pensilvanya, CARESS Working Paper* #91-16

Allen, B. (1994) Market games with asymmetric information: the core with finitely many states of the world, in: B. Munier and M. J. Machina, eds., *Models and Experiments in Risk and Rationality* (Kluwer Academic Press)

Barten, A., P. and V. Bohm (1982) Consumer theory, in: Arrow, K. J. and M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. II, (North-Holland, Amsterdam) 381–429

Debreu, G. (1960) Topological methods in cardinal utility theory, in: Arrow, K., Karlin, S. and P. Suppes, eds., *Mathematical methods in the social siences* (Stanford University Press, Stanford)

Glycopantis, D. and N. C. Yannelis eds. (2004) *Differential information economies* (Springer–Verlag)

Glycopantis, D. and N. C. Yannelis (2004) Information, efficiency, and the core of an economy: comments on Wilson's paper, in: *Differential Information Economies* (Springer–Verlag) 65–71

Ichiishi, T. and A. Yamazaki (2006) *Cooperative extentions of the Bayesian game* (World Scientific Publishing, New Jersey/London)

Jackson, M. O., Simon, L. K., Swinkels, J. M. and W. R. Zame (2002) Communication and equilibrium in discontinuous games of incomplete information, *Econometrica* **70**, 1711–40

Jackson, M. O., Simon, L. K., Swinkels, J. M. and W. R. Zame (2004) Corrigendum to "Communication and equilibrium in discontinuous games of incomplete information", *Econometrica* **72**, 1927–29

Radner, R. (1968) Competitive equilibrium under uncertainty, *Econometrica* **36**, 31–58

Radner, R. (1978) Rational expectation equilibrium: generic existence and information revealed by prices, *Econometrica* **47**, 655–678

Radner, R. (1982) Equilibrium under uncertainty, in: K. J. Arrow and M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. II (North-Holland, Amsterdam) 923–1006

Rubinstein A. and M. J. Osborne (1990) *Bargaining and Markets* (Academic Press, San Diego, California)

Schwable, U. (1999) *The core of economies with asymmetric information* (Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York)

Thomson, W. (1994) Cooperative models of bargaining, in: R. J. Aumann, and S. Hart, eds., *Handbook of Game Theory*, Vol. II (Elsevier Science B.V.) 1237–84

Wilson, R. (1978) Information, efficiency, and the core of an economy, *Econometrica* **46**, 807–816

Алипрантис К., Браун Д., Беркёншо О. (1995) *Существование и оптимальность конкурентного равновесия* (пер. с англ., Москва: Мир, 384 с.)

Данилов В. И. (2002) *Лекции по теории игр* (Российская экономическая школа, Москва, 140 с.)

Козырев А. Н. (1982) Договорные и вполне договорные состояния в абстрактной экономике, *Препринт* № 7, 44 с. (Новосибирск: Институт математики СО АН СССР)

Козырев А. Н. (1981) Устойчивые системы договоров в экономике чистого обмена, *Оптимизация* **29** (44), 66–78 (Новосибирск: Изд. ИМ СО АН СССР)

Макаров В. Л. (1980) О понятии договора в абстрактной экономике, *Оптимизация* **24** (41), 5–17 (Новосибирск: Изд. ИМ СО АН СССР)

Макаров В. Л. (1982) Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства, *Итоги науки и техники: Современные проблемы математики* **19**, 23–58 (Москва: ВИНИТИ АН СССР)

Маракулин В. М. (2003) Договоры и коалиционное доминирование в неполных рынках, *Научный доклад* № 02/04, 114 с. (Москва: Консорциум экономических исследований и образования)

Маракулин В. М. (2006) О сходимости договорных траекторий в экономике чистого обмена, *Научный доклад* № 06/07, 94 с. (Москва: Консорциум экономических исследований и образования)

Маракулин В. М. (2009) Экономики с асимметрично информированными агентами: концепция предельной информации, *Журнал Новой Экономической Ассоциации* **1–2**, 62–85

Мулен Э. *Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели* (пер. с англ., Москва: Мир, 464 с.)

Полтерович В. М. (1970) *Математические модели перераспределения ресурсов*, 107 с. (Москва: Центральный экономико–математический Институт)