Общественный выбор и политическая конкуренция*

Валерий МАРАКУЛИН†

Введение

Предметом настоящего эссе является общественный выбор и его приложения к теории конкурентной борьбы политических партий. Мы рассмотрим наиболее важные результаты и вытекающие из них выводы, относящиеся к демократическому выбору и его политическим последствиям.

Вопросы общественного выбора стали занимать умы общественных деятелей со второй половины 18-го века, накануне французской революции. Начиная с политической философии Просвещения выбор правил голосования являлся главной этической проблемой, связанной с далеко идущими приложениями для функционирования большинства политических институтов. Дебаты о справедливости различных методов голосования начались с исследований де Борда (1781) и маркиза де Кондорсе (1785). При этом уже тогда стало ясно, что проблема общественного выбора не имеет простого очевидного решения и, что такое демократия и собственно демократический выбор как формализованная процедура неясно. Действительно, как мы увидим в дальнейшем, наиболее естественные процедуры голосования могут приводить либо к неразрешимым логическим парадоксам, не позволяющим осуществить общественный выбор (правило большинства при попарном сравнении альтернатив), либо этот выбор может оказаться неудачным с точки зрения общества (правило частичного большинства), или манипулируемым (правило Борда). Мы начнём с обсуждения формальной модели коллективного выбора, в дальнейшем в её контексте будет рассмотрена известная теорема Эрроу (1951) о диктаторе. Содержательно теорему Эрроу можно интерпретировать как невозможность универсального демократического выбора, однако это не означает что этот выбор невозможен никогда, просто в существенно разных ситуациях должны применяться разные процедуры голосования. Следовательно, появляется потребность выделить и, по возможности, расклассифицировать ситуации, в которых действительно демократический выбор все-таки возможен. Наиболее значимым примером такого рода является случай "однопиковых" предпочтений избирателей: оказывается, что тогда при попарном сравнении альтернатив по правилу большинства всегда найдётся наилучшая альтернатива, так называемый победитель по Кондорсе. Именно в рамках однопиковых предпочтений избирателей были развиты современные модели политической конкуренции, в их числе модели Доунса и Хотеллинга, которые обсуждаются во второй части эссе.

*Исследование поддержано грантом Президента РФ по поддержке научных школ № НШ–4999.2006.6

†Ведущий научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.

1 Задача общественного выбора

В данном разделе мы обсудим общую задачу общественного выбора как в формальном так и в содержательном контекстах.

Пусть $\mathcal{A}$ некоторое достаточно произвольное множество альтернатив, т. е. вариантов проектов, кандидатов и т. д. из которых нужно сделать разумный (общественный) выбор. Будем предполагать, если это не оговорено особо, что множество $\mathcal{A}$ *конечно*.

Пусть $\mathcal{I}$ множество индивидуумов (агентов, выборщиков), образующих общество, которому нужно сделать выбор подходящей альтернативы из $\mathcal{A}$. Предположим, что индивидов конечное число и пусть $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Каждый индивид является разумно мыслящим субъектом, что на модельном уровне означает, что он/она непротиворечивым образом понимает свои интересы и способен ранжировать альтернативы по степени привлекательности. Другими словами у каждого $i \in \mathcal{I}$ имеется линейное упорядочивание альтернатив, которое обозначается как $\succeq_i$. Запись $a \succeq_i b$ означает, что индивид i предпочитает (возможно нестрого) альтернативу a альтернативе b, $a, b \in \mathcal{A}$. Формально $\succeq_i$ является *предпорядком* на $\mathcal{A}$, т. е. это бинарное отношение, удовлетворяющее аксиомам:

(1) Транзитивность: для любых $a, b, c \in \mathcal{A}$

$$[a \succeq b \ \ \textbf{и} \ \ b \succeq c] \ \Rightarrow \ a \succeq c.$$

(2) Полнота: для любых $a, b \in \mathcal{A}$

$$a \succeq b \ \ \textbf{или} \ \ b \succeq a.$$

Если $\succeq$ предпорядок, то возможна ситуация, когда для некоторой пары альтернатив $a \succeq b$ и $b \succeq a$ одновременно. В таком случае говорят, что a эквивалентно b и обозначают это[1] как $a \sim b$. Запись $a \succ b$ означает, что $a \succeq b$ и $b \not\succeq a$, т. е. a *строго* лучше (предпочтительнее) b.

Возможно также применение дополнительной аксиомы:

(3) Антисимметрия: для любых $a, b \in \mathcal{A}$

$$[a \succeq b \ \ \textbf{и} \ \ b \succeq a] \ \Rightarrow \ a = b.$$

Отношение, удовлетворяющее (1)–(3) называется *линейным* или *полным порядком*. Именно так упорядочены числа на числовой прямой или, например, слова в словаре (порядок использующий тот же принцип называется лексикографическим).

Заметьте, что именно транзитивность и полнота $\succeq_i$ позволяют считать индивида i рационально мыслящим. Действительно, (1) означает, что его суждения об альтернативах непротиворечивы и, если для некоторой (любой) тройки альтернатив случится $[a \succeq b$ **и** $b \succeq c]$, то он выберет a. С другой стороны, аксиома (2) говорит о том, что индивид способен сравнить между собой любую пару альтернатив (имеет мнение). При конечном множестве альтернатив[2] любой предпорядок можно задать с помощью некоторой функции $u : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ по правилу (постройте такую функцию): для любых $a, b \in \mathcal{A}$

$$a \succeq b \quad \Longleftrightarrow \quad u(a) \geq u(b).$$

[1] Легко видеть, что с формально-математической точки зрения это действительно *отношение эквивалентности*.

[2] Для бесконечного множества $\mathcal{A}$ это неверно; например, не существует функции, задающей лексикографическое упорядочивание на $\mathbb{R}^2$.

Конечно, верно и обратное: по данному правилу любая функция задаёт предпорядок (проверьте аксиомы). Функцию, задающую данный предпорядок, называют функцией полезности, хотя в контексте задачи общественного выбора (как и во многих других экономических вопросах) само понятие полезности вещь малоосмысленная — в основе выбора лежит именно набор индивидуальных упорядочиваний возможных альтернатив. Однако зачастую применение функций полезности удобнее в рассуждениях и обозначениях, и мы часто будем это делать: нужно просто понимать условность этого языка.

При заданных множествах альтернатив и индивидов набор индивидуальных предпочтений $\{\succeq_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ называется *профилем предпочтений* или просто *профилем*. В терминах функций полезности любой профиль можно задать как *вектор*-функцию $u : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, $u(a) = (u_1(a), u_2(a), \ldots, u_n(a))$, $a \in \mathcal{A}$. Верно и обратное, однако существует множество (бесконечно много) функций, задающих один и тот же профиль.

Задача общественного выбора состоит в том, чтобы по исходной информации — задано множество альтернатив и профиль предпочтений — найти альтернативу (хотелось бы единственную), в наибольшей мере устраивающую всё общество. При этом выражению "в наибольшей мере устраивающую всё общество" нужно придать точный формальный смысл. Более того, в реальной жизни информация об индивидуальных предпочтениях имеет частный характер, корректно предполагать что только сам индивид может точно знать свои предпочтения (хотя и так бывает не всегда). Следовательно, задача состоит не в указании одной альтернативы для данного конкретного профиля, но в построении некоторого хорошего отображения (правила), хорошего в четком смысле, которое способно выявлять альтернативу-победителя для множества разных профилей и для разных множеств альтернатив. Формально речь идёт о поиске отображения F, которое называется *функцией общественного выбора*, определённой на некотором классе профилей $U \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = (L(\mathcal{A}))^n$ это множество *всех* возможных профилей, а $L(\mathcal{A})$ совокупность *всех* линейных порядков на $\mathcal{A}$. Другими словами, нужно найти "хорошее" отображение

$$F : U \to \mathcal{A},$$

которое каждому возможному (допустимому) профилю $u \in U$ сопоставляет альтернативу-победителя $F(u) \in \mathcal{A}$; альтернатива $F(u)$ и является выбором общества в случае, когда мнения индивидов об альтернативах задаются профилем $u : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$. Далее сделаем два важных замечания.

Первое. Если задача общественного выбора корректно решена для некоторого (конечного) множества альтернатив и каждого его подмножества, то тогда по заданному профилю предпочтений можно легко построить (восстановить) *коллективное упорядочивание* данного множества альтернатив. Действительно, если у нас есть победитель на $\mathcal{A}$, пусть это a, имеется b — победитель на $\mathcal{A}\setminus\{a\}$, есть также c — победитель на $\mathcal{A} \setminus \{a, b\}$ и т. д., то альтернативы будут упорядочены как $a \succ b \succ c \ldots$ Верно и обратное: зная *линейный* коллективный порядок, в качестве победителя нужно взять наибольшую в смысле этого порядка альтернативу. Таким образом, нахождение одной альтернативы–победителя или коллективного упорядочения в целом это, по сути, эквивалентные задачи. Отметим также, что в общем случае отображение F может быть и точечно-множественным, т. е. общественный выбор для некоторых профилей может быть неединственным.

Второе. В реальной жизни, до того как общественный выбор будет осуществлен, мы не можем точно знать о предпочтениях каждого отдельно взятого индивида, ибо это сугубо частная информация. Поэтому, вообще говоря, мы хотели бы найти такое (универсальное) правило общественного выбора, которое было бы применимо к любому мысленно возможному профилю, т. е. хотелось бы найти функцию F определённую на всем $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Однако, как мы это увидим позже, такой функции, хорошей хотя бы в некотором слабом смысле, может не быть вообще. Таким образом, приходится выбирать между "качеством" функции выбора и "размером" её области определения. Один из частных вариантов этой проблемы проявляется в знаменитой теореме Эрроу о невозможности демократического выбора, рассматриваемой в разделе 3.

2 Кондорсе против Борда

В случае когда возможных для выбора альтернатив только *две*, проблема общественного выбора имеет простое решение *по правилу большинства*, что бесспорно является наиболее справедливым методом. Аксиоматическое обоснование принципа большинства для двух альтернатив было дано Мэйем в 1952 г. Ситуация меняется кардинальным образом если имеется три и более альтернативы. Действительно, какое правило голосования является адекватным продолжением принципа большинства для пары альтернатив? Может быть это правило *относительного большинства*: выборщик указывает ровно одно имя в бюллетене для голосования, и выигрывает альтернатива, получившая наибольшее количество голосов. Большинство обывателей согласится с этим правилом... Однако анализ показывает, что это один из наиболее неудачных методов нахождения общественного решения — ниже мы приведём профиль, подтверждающий этот тезис. Это понимали Кондорсе и Борда, которые в конце 18 века предложили, каждый своё, другие правила взамен относительного большинства.

2.1 Правила Кондорсе и Борда, парадокс голосования

Кондорсе предложил выбирать кандидата (альтернативу), который побеждает любого другого кандидата при *парном* сравнении (дуэли). К сожалению, такого рода кандидат — *победитель по Кондорсе* — может *не* существовать. Борда предложил приписать очки каждому кандидату, линейно *возрастающие в зависимости от его ранга* в предпочтении выборщика. Затем он предложил избрать кандидата, получившего наибольшее *суммарное количество очков* у всех выборщиков. Эти две идеи приводят к двум наиболее важным семействам правил голосования, а именно, правилам *состоятельным по Кондорсе* (дают в качестве победителя по правилу победителя по Кондорсе, если таковой существует), и к *методам подсчета очков* (с произвольно заданной системой очков по рангам). Далее рассмотрим указанные подходы более подробно, но в основном на модельных примерах.

Начнём с описания примера, демонстрирующего негативные свойства правила относительного большинства. Рассмотрим профиль:

3	5	7	6
a	a	b	c
b	c	d	b
c	b	c	d
d	d	a	a

Эту таблицу следует читать так. 1-й столбец, сверху вниз: 3 — это число индивидов, упорядочивающих альтернативы в порядке первого столбца (сверху вниз) $a \succ b \succ c \succ d$; прочие столбцы читаются аналогично. Видим, что в данном профиле альтернатива a набирает 8 голосов, b — 7 и c — 6 голосов, d никто не поддержал. Итак, a победитель по правилу относительного большинства. Однако что будет при парном сравнении альтернатив? Ясно, что a проигрывает любой другой альтернативе при парном сравнении со счётом 8:13. Таким образом, правило относительного большинства привело к избранию наихудшего кандидата! Более того, легко видеть, что c выигрывает у d со счётом 14:7, а против b побеждает 11:10. Следовательно, как утверждает Кондорсе, по мнению большинства должен быть избран кандидат c. Убедитесь, что порядок Кондорсе (проверьте другие парные сравнения по правилу большинства) это $c \overset{c}{\succ} b \overset{c}{\succ} d \overset{c}{\succ} a$.

Рассматривая тот же профиль, Борда соглашается, что a — плохой кандидат, но предлагает в качестве победителя b. Борда принимает во внимание ранги кандидатов в предпочтениях выборщиков: если я ставлю кандидата на первое место, то это должно помочь ему больше, чем если бы я поставил его на второе место. Сравним в профиле b и c; b имеет 1-й ранг у 7-ми индивидов (у c только 6), 1-й или 2-й у 16-ти (у c 11) и с 1-го по 3-й ранги у всех индивидов (так же как c). Значит, при сравнении с c альтернативе b должно быть отдано предпочтение. Борда предлагает конкретный способ учёта ранга альтернативы в индивидуальных предпочтениях: для каждого предпочтения альтернативе приписывается столько очков, сколько альтернатив она обыграла (выше по рангу), далее находится сумма очков по всем предпочтениям. Совокупное (коллективное) предпочтение задаётся упорядочиванием по числу набранных очков (как у функции полезности). Убедитесь в том, что для рассмотренного профиля оценки будут следующими: $d = 0 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 6 = 20$; $a = 3 \cdot 8 + 0 \cdot 13 = 24$; $c = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 38$; $b = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 7 = 44$. Порядок Борда: $b \overset{b}{\succ} c \overset{b}{\succ} a \overset{b}{\succ} d$ и b выигрывает по Борда.

Оба предложенных способа имеют свои достоинства и недостатки. Действительно, как мы увидим ниже, правило Кондорсе может привести к упорядочиванию, в котором нарушается аксиома транзитивности. В то же время правила, основанные на подсчёте очков, отвечающих рангам в индивидуальных предпочтениях (а ля Борда), являются манипулируемыми. Последнее означает, что в процессе голосования индивидуумы могут голосовать стратегически, т. е. использовать ложный порядок, с целью вывести в качестве победителя более предпочтительного для себя кандидата (по истинному предпочтению). Действительно, если в данном профиле последние 6 выборщиков изменят позицию b, переместив её на последнее место, то кандидат b потеряет 12 очков и в итоговом порядке займёт 2-е место. Так, действуя согласованно и будучи хорошо информированными о предпочтениях других индивидов, сторонники c выводят её на первое место. Рассмотрит далее эти проблемы подробнее.

Следующий профиль получил в теории название “парадокс Кондорсе”.

8	7	6
a	c	b
b	a	c
c	b	a

Проведём попарное сравнение альтернатив по правилу большинства. Находим: $a \overset{15:6}{\succ} b$, $b \overset{14:7}{\succ} c$, $c \overset{13:8}{\succ} a \Rightarrow a \succ b \succ c \succ a$. Получился цикл — нарушена аксиома транзитивности — и непонятно какую альтернативу следует назвать победителем. Более того, ясно что числа, стоящие в первой строке (представительность предпочтения в профиле) могут быть и другие, но "достаточно близкие". Оказывается, что эффект парадокса Кондорсе является, вообще говоря, массовым явлением[3]: с ростом числа альтернатив вероятность появления парадокса в (случайно выбранном) профиле стремится к 1 (с ростом числа выборщиков возрастает, но имеет конечный предел), см. [1, Мулен 1991]. Понимая возникшую проблему, Кондорсе предложил "разорвать самую слабую связь в цикле", в нашем примере это $c \overset{13:8}{\succ} a$. Так нужно поступить с каждым циклом, — вот только неясно как это определить заранее, до выборов (сначала закон, а потом результат, иначе будет беззаконие).

На практике не только возможность появления парадокса голосования, но и большая трудоёмкость попарного сравнения альтернатив[4] препятствует широкому применению принципа Кондорсе. Поэтому в реальной политической практике широкое распространение получило правило голосования в два тура (конечно, потенциально туров может быть и больше): в первом туре выбираются 2 альтернативы, набравшие *относительно наибольшее* число голосов, и во 2-м туре[5] осуществляется голосование уже только между этими (двумя!) альтернативами. По всей видимости, голосование в 2 тура является наиболее удачным вариантом для многих практически значимых ситуаций, однако этот метод также не лишён недостатков. Действительно, как это видно из первого примера, победитель по Кондорсе может существовать, но не быть победителем голосования в 2 тура (проверьте!). Кроме того, следующий пример показывает, что голосование по турам не монотонно. Рассмотрим два профиля:

6	5	4	2
a	c	b	b
b	a	c	a
c	b	a	c

6	5	4	2
a	c	b	a
b	a	c	b
c	b	a	c

В левом профиле альтернативы a и b проходят во 2-й тур, в котором выигрывает альтернатива a. Правый профиль отличается от левого только тем, что в последнем столбце a и b поменялись местами, т. е. 2 выборщика усилили поддержку a. Однако для a это услуга оказалась медвежьей: в итоге во второй тур вместо b выходит альтернатива c, которая выигрывает у a во втором туре. Таким образом, улучшение позиции кандидата a приводит к его поражению!

В следующем разделе рассматривается важный в приложениях класс правил состоятельных по Кондорсе.

[3] Политологи считают это явление редким, хотя известен целый ряд исторических ситуаций, когда он наблюдался и влиял на ход событий.

[4] Уже при 5-ти альтернативах нужно провести $C_5^2 = 10$ парных сравнений, а при n кандидатах $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Что скажет тётя Маруся, придя на участок и получив такой бюллетень?

[5] Если какой-либо кандидат набирает более 50% голосов в 1-м туре, то он объявляется победителем и 2-й тур не проводится. Однако ясно, что этот кандидат является победителем по Кондорсе.

2.2 Состоятельность по Кондорсе

Понятие правила, *состоятельного по Кондорсе*, является компромиссным и практически значимым вариантом общественного выбора, основанного на попарном сравнении альтернатив по принципу большинства. Идея в том, что в случае, когда данный профиль имеет победителя по Кондорсе, то при данном правиле этот победитель должен быть избран. В случае, когда победителя по Кондорсе нет, находится какая-то (достаточно разумная) альтернатива-победитель или, даже, коллективное упорядочивание альтернатив в целом. Такого рода правила широко распространены в реальной жизни, укажем на наиболее значимые.

Правило Копленда. Для данной альтернативы $a \in \mathcal{A}$ осуществляется парное сравнение по принципу большинства со всеми другими альтернативами $x \neq a$. Положим $r(a, x) = 1$ если a выигрывает у x, $r(a, x) = 0$ при ничьей и $r(a, x) = -1$ при проигрыше по принципу большинства. Определим оценку Копленда $R(a)$ по формуле $R(a) = \sum_{x \in \mathcal{A}, x \neq a} r(a, x)$. Полученные оценки задают на множестве альтернатив предпорядок (как функция полезности) и, тем самым, может быть найден победитель(и). Докажите, что таким образом задано правило состоятельное по Кондорсе. Данное правило широко распространено в спортивных состязаниях, это турнир по круговой системе[6]: чтобы его выиграть, нужно выиграть у наибольшего возможного числа кандидатов (команд).

Правило Симпсона. Для альтернативы $a \in \mathcal{A}$ при попарном сравнении с другими альтернативами $x \neq a$ ставится в соответствие оценка $n(a, x)$ — это число голосов за a против x. Тогда оценка Симпсона это $N(a) = \min_{x \in \mathcal{A}, x \neq a} n(a, x)$. Оценки Симпсона задают на $\mathcal{A}$ некоторый предпорядок, наибольшие элементы которого образуют множество победителей по Симпсону. Для того чтобы выиграть по Симпсону, вам нужно, чтобы никакой кандидат не собрал против вас значительного большинства. Проводя аналогию со спортивными состязаниями представим себе хоккейный турнир по круговой системе, причём такой, что в каждом матче число (общее) голов одинаково. По итогам матчей находится победитель турнира по Симпсону: это команда, забившая больше других голов в худшем своём матче. Заметьте, что команда, выигравшая все матчи кроме одного, который проиграла с сухим счётом, займёт (разделит) последнее место, в то время как по Копленду место будет не ниже второго. Докажите, что правило Симпсона состоятельно по Кондорсе.

Правило на бинарном дереве. Формально дерево это односвязный граф без циклов[7]. У каждого конечного дерева имеются финальные (или терминальные) вершины и единственная вершина, называемая корнем. Примеры бинарных деревьев и отвечающих им процедур голосования приведены на следующих картинках, см. рис 1. В бинарном дереве из корня (звёздочка) исходят два ребра, для финальных вершин одно (входящее), а в промежуточных (кружочек) три (два входят и одно выходит). Левой картинке соответствует такая процедура голосования: сначала a сравнивается с b, победитель выходит на c, а последний победитель сравнивается с c. Каждый раз

[6] За победу команда получает 2 очка, за ничью 1 и 0 очков за поражение. В принятой сейчас системе в чемпионатах по футболу за победу дают 3 очка — это тоже правило, состоятельное по Кондорсе, но несколько иное.

[7] Граф это (конечный) набор вершин и рёбер; геометрически ребро это дуга, соединяющая две вершины (отождествляются с точками на плоскости). Граф связный, если двигаясь по рёбрам без перескока можно из любой вершины добраться до любой другой. Цикл это когда, выходя из вершины вдоль одного ребра, можно (без перескоков!) вернуться в эту же вершину через другое ребро.

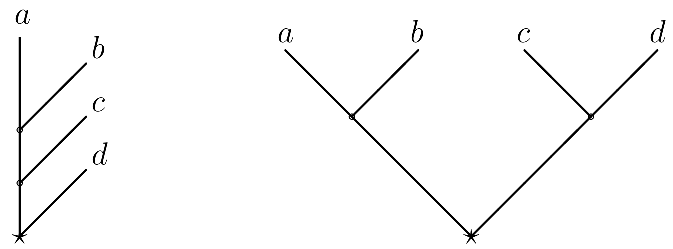

Рис. 1: Варианты бинарных “деревьев голосования”

осуществляется сравнение по большинству и при этом движение идёт от финальной вершины к корню, в котором и появится альтернатива-победитель. Эта процедура соответствует тому, как принимаются законы в конгрессе США. Здесь a это основной законопроект, b — поправка к нему, c — поправка к поправке и т. д. На правой картинке представлена другая процедура голосования: альтернативы разбиваются на пары, победители которых встречаются между собой и выявляют альтернативу-победителя по данному правилу. Здесь вы конечно узнали полуфинал на первом этапе и финал на втором: в спортивных состязаниях процедуры подобного выявления победителя сейчас зачастую называют системой “нокаут”, а в старые времена говорили “олимпийская система”. Отметим, что задавая некоторое “дерево голосования”, мы тем самым фиксируем повестку дня, точно специфицируя какие вопросы и в каком порядке ставятся на голосование.

Должно быть ясно, что любая процедура голосования, заданная на бинарном дереве, это правило состоятельное по Кондорсе. Однако что будет в случае, когда в профиле нет победителя по Кондорсе? Например, рассмотрим профиль отвечающий парадоксу Кондорсе (см. раздел выше). Итоговый результат существенно зависит от того как альтернативы ассоциируются с вершинами. Действительно, проверьте, что, меняя конфигурацию альтернатив на дереве (типа левого на рис. 1), можно в качестве победителя вывести любую альтернативу! В цикле коллективного упорядочивания это соответствует разрыву одной из порядковых связей и, значит, появляется возможность найти победителя. Таким образом, при подходящей конфигурации предпочтений (профиле) от повестки дня может зависеть очень многое, что выявляет роль спикера в парламенте, ведь именно спикер задаёт повестку.

В заключении данного раздела мы рассмотрим вопрос о сравнении правил состоятельных по Кондорсе и правил, основанных на методе подсчёта очков. Вопрос ставится так: возможно ли так подобрать шкалу очков, чтобы получить правило состоятельное по Кондорсе? Ответ даёт теорема Фишберна (1973) — каждое правило подсчёта очков (а ля Борда) *не* состоятельно по Кондорсе. Доказательство этой теоремы реализует следующий профиль:

шкала	3	2	1	1
s_2	c	a	a	b
$\vee$				
s_1	a	b	c	c
$\vee$				
s_0	b	c	b	a

Левый столбец определяет шкалу оценок ранга альтернатив в индивидуальных предпочтениях такую, что $s_2 > s_1 > s_0$. Проведя попарное сравнение альтернатив по правилу большинства, находим победителя по Кондорсе, это альтернатива c. С другой стороны, оценки по методу подсчёта очков будут следующими:

$$\text{очки } a = 3s_2 + 3s_1 + s_0 > 3s_2 + 2s_1 + 2s_0 = \text{очки } c > s_2 + 2s_1 + 4s_0 = \text{очки } b.$$

Таким образом, a это победитель по методу подсчёта очков, а c побеждает по любому правилу, состоятельному по Кондорсе. Результат сохраняет свою силу если шкала очков возрастает нестрого монотонно (но не постоянна), однако конструкция соответствующего профиля более нетривиальна. Итак, не существует метода подсчёта очков, состоятельного по Кондорсе.

В данном разделе мы рассмотрели некоторые наиболее важные факты теории общественного выбора, относящиеся к методам подсчёта очков и правилам состоятельным по Кондорсе. В целом имеется довольно развитая аксиоматическая теория этих методов, заинтересованный читатель может ознакомится с ней самостоятельно, см. напр. [1].

Далее мы перейдём к рассмотрению одного из наиболее значимых результатов в общественном выборе — теореме Эрроу о диктаторе.

3 Теорема Эрроу о невозможности демократического выбора

Со времени дебатов между Кондорсе и Борда и особенно в первой половине 20-го века было предпринято множество попыток сконструировать разумную функцию общественного выбора. Однако все предложения обладали теми или иными недостатками. Трудность данной проблемы стала более ясной после выхода в свет замечательной теоремы о невозможности демократического выбора, доказанной в 1951 году Кеннетом Эрроу. Эрроу использовал аксиоматический подход, в котором рассматривалась задача общественного выбора, где *профилю* предпочтений *сопоставляется* коллективное упорядочивание, *предпорядок*, заданный на множестве всех альтернатив. В теореме Эрроу ключевую роль играла следующая аксиома *независимости от посторонних альтернатив*[8]:

Определение 3.1 (НПАЭ) *Пусть* $\overset{u}{\succeq}$ *это коллективный предпорядок, сопоставленный профилю* $\mathbf{u}$. *Тогда для любых двух (разных) профилей* $\mathbf{u} = (u_i)_{\mathcal{I}}$, $\mathbf{v} = (v_i)_{\mathcal{I}}$ *и любой пары альтернатив* $a, b \in \mathcal{A}$, *условие*

$$\forall\, i \in \mathcal{I} \quad [u_i(a) > u_i(b) \iff v_i(a) > v_i(b)]$$

влечёт

$$a \overset{u}{\succeq} b \iff a \overset{v}{\succeq} b.$$

Смысл данной аксиомы в том, что коллективное упорядочивание двух альтернатив должно полностью определятся мнениями индивидуумов об этих альтернативах и не зависит от разницы во мнениях в отношении какой-либо другой, третьей альтернативы. Математически это означает, что если два разных профиля совпадают при их снижении на двухэлементное множество $\{a, b\}$, то и в двух коллективных упорядочиваниях соотношения между a и b совпадут. Например, из истинности НПАЭ следует, что мнение избирателей о Жириновском не должно влиять на упорядочивание таких альтернатив как Путин и Зюганов.

Другая гипотеза теоремы Эрроу — это аксиома Парето[9] или эффективности:

[8] В литературе принято использовать термин “независимость от посторонних альтернатив Эрроу”, ибо имеются и другие виды “независимости”; например, в теории аксиоматических торгов появляется “независимость от посторонних альтернатив Нэша”.

[9] Это фамилия швейцарского экономиста, впервые применившего подобное требование эффективности (в другом контексте).

Определение 3.2 (Парето) *Для любого профиля* $\mathbf{u}$: *если для некоторого* $a \in \mathcal{A}$ *и любой другой альтернативы* $b \in \mathcal{A}$ *выполняется* $u_i(a) > u_i(b)$ $\forall\, i \in \mathcal{I}$, *то*

$$a \overset{u}{\succ} b, \quad \forall\, b \in \mathcal{I}.$$

Таким образом, аксиома Парето требует, что если в данном профиле существует альтернатива, которая по мнению *каждого* избирателя является наилучшей, то она является наилучшей (строго!) и в коллективном упорядочивании.

Наконец, мы укажем также ещё на одно предположение, не всегда представленное в явном виде в других источниках, но исключительно важное для правильного понимания теоремы Эрроу. Это предположение об *универсальности* правила коллективного упорядочивания, т. е. то, что правило коллективного упорядочивания должно быть определено для любого мысленно возможного профиля. На математическом языке это:

Определение 3.3 (Универсальность) *Предпорядок* $\overset{u}{\succeq}$ *определен для каждого профиля* $\mathbf{u} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, *т. е.* $U = \mathrm{dom} F = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Стоит подчеркнуть, что для каждого $\mathbf{u} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ бинарное отношение $\overset{u}{\succeq}$ должно быть не просто сформулировано, но также удовлетворять всем аксиомам предпорядка, т. е. это должно быть транзитивное и полное отношение.

Теорема 3.1 (K. Arrow 1951) *Пусть в* $\mathcal{A}$ ***не менее трёх*** *альтернатив. Тогда любое правило коллективного упорядочивания, удовлетворяющее аксиомам НПАЭ, Парето и Универсальности, является* ***диктаторским*** *правилом, т. е. существует такой индивид* $i \in \mathcal{I}$, *что для каждого профиля* $\overset{u}{\succeq} = \succeq_i$.

Иногда требование к правилу коллективного упорядочивания быть не диктаторским непосредственно вводят в формулировку теоремы Эрроу. В таком случае теорему формулируют как "не существует правила, удовлетворяющего аксиомам..." Отметим также, что аксиома Парето является не слишком значимой в содержательном контексте: при удалении этой аксиомы из формулировки теоремы могут дополнительно появиться только малоосмысленные антидиктаторские правила (выбирается индивид и его упорядочивание переворачивается: худший элемент становится лучшим, второй снизу — вторым сверху и т. д.).

Доказательство. Назовём множество $B(a,b) \subseteq \mathcal{I}$ решающим для (упорядоченной[10]) пары альтернатив a, b, если для *любого* профиля $\mathbf{u}$, удовлетворяющего

$$[u_i(a) > u_i(b) \;\; \forall\, i \in B(a,b) \;\;\&\;\; u_i(a) < u_i(b) \;\; \forall\, i \notin B(a,b)] \;\Rightarrow\; a \overset{u}{\succ} b. \tag{3.1}$$

Отметим, что в силу НПАЭ множество будет решающим, если для *некоторого* (хотя бы одного) профиля выполнено свойство (3.1). В силу аксиомы Парето множество $\mathcal{I}$ является решающим для любой пары альтернатив. Поэтому, решающие множества существуют. Выберем среди них (для всевозможных пар альтернатив) минимальное множество — по включению или числу элементов (по мощности). Пусть это будет

[10] Множество, решающее для (a,b), *не* обязано быть решающим для (b,a).

$T \subseteq \mathcal{I}$, которое является решающим множеством относительно *некоторой* пары альтернатив $a, b \in \mathcal{A}$. Далее покажем, что T одноэлементное множество.

Предположим противное. Тогда T можно разбить на два попарно непересекающихся множества, пусть это будут[11] T_1 и T_2. Далее рассмотрим альтернативу $c \neq a$, $c \neq b$ (существует, ибо в $\mathcal{A}$ не менее трёх альтернатив) и следующий профиль $\mathbf{u}$:

T_1	T_2	$\mathcal{I} \backslash T$
a	c	b
b	a	c
c	b	a

Эту таблицу следует читать так. 1-й столбец, сверху вниз: T_1 — это номера (множество) индивидов, упорядочивающих альтернативы в порядке первого столбца (сверху вниз) $a \succ b \succ c$; 2-й и 3-й столбцы читаются аналогично.

В данном профиле и далее в доказательстве альтернативы из $\mathcal{A} \setminus \{a, b, c\}$ не рассматриваются, ибо в силу НПАЭ их положение в профиле не может повлиять на упорядочивание между a, b, c. Кроме того, это допустимый профиль в силу аксиомы Универсальности.

Далее, так как множество T решающее для (a, b), то $a \overset{u}{\succ} b$. Множество T_1 *не* является решающим для (a, c), следовательно (из полноты коллективного упорядочивания), заключаем $c \overset{u}{\succeq} a$, откуда по транзитивности $c \overset{u}{\succ} b$. С другой стороны, множество T_2 *не* решающее для (c, b), поэтому должно быть $b \overset{u}{\succeq} c$, что противоречит предыдущему.

Итак, мы нашли пару (a, b) и *единственного* индивида, скажем 1, такие что $\{1\}$ — решающее множество для (a, b). Далее покажем, что $\{1\}$ решающее для *любой* пары (c, d). Рассмотрим два профиля:

1	$\mathcal{I} \backslash \{1\}$
c	b
a	c
b	a

1	$\mathcal{I} \backslash \{1\}$
c	b
b	d
d	c

Для 1-го профиля имеем: $c \overset{u}{\succ} a$ (Парето), $a \overset{u}{\succ} b$ ($\{1\}$ — решающее для (a, b)) и, значит (транзитивность) $c \overset{u}{\succ} b$. Следовательно (см. профиль), $\{1\}$ — решающее множество для (c, b).

Аналогично для 2-го профиля: $b \overset{u}{\succ} d$ (Парето), $c \overset{u}{\succ} b$, ибо $\{1\}$ — решающее для (c, b), откуда по транзитивности $c \overset{u}{\succ} d$. Следовательно, доказано, что $\{1\}$ — решающее множество для (c, d), т. е. это решающее множество для любой пары альтернатив.

На последнем этапе покажем, что если в профиле $u_1(a) > u_1(b)$ для некоторых (произвольно выбранных) альтернатив a, b, то независимо от мнений прочих индивидов $i \neq 1$, выполнено $a \overset{u}{\succ} b$. С этой целью рассмотрим следующий профиль $\mathbf{v}$:

1	$\mathcal{I} \backslash \{1\}$
a	c
c	$\mathbf{u}_{-1}(a, b)$
b	$\vdots$

Здесь во 2-м столбце показаны упорядочивания альтернатив индивидов из $\mathcal{I} \setminus \{1\}$, причём альтернатива c для них наилучшая, а a и b упорядочиваются так же как в профиле u. Для профиля v имеем: $c \overset{v}{\succ} b$ (Парето) и $a \overset{v}{\succ} c$, т. к. $\{1\}$ — решающее для (a, c). Следовательно, $a \overset{v}{\succ} b$ и по НПАЭ заключаем $a \overset{u}{\succ} b$ — что и требовалось доказать. $\square$

Теорема Эрроу и её ключевая аксиома независимости тесно переплетаются с тео-

[11] Имеем: $T = T_1 \cup T_2$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $T_1 \neq \emptyset$, $T_2 \neq \emptyset$.

ремой Гиббарда — Сэттертуэйта и требованием неманипулируемости правила общественного выбора. Теорема Гиббарда — Сэттертуэйта (доказана Гиббардом в 1973 и переоткрыта Сэттертуэйтом в 1975 гг) утверждает, что если альтернатив не менее трёх, то любая неманипулируемая сюрьективная[12] функция общественного выбора диктаторская. Таким образом, неманипулируемость по сути эквивалентна требованию независимости от посторонних альтернатив (с учётом прочих требований и аксиом). Содержательно сюрьективность функции общественного выбора означает, что ни одна из альтернатив не может быть отброшена (есть профиль, когда она выигрывает). В то же время неманипулируемость это свойство функции общественного выбора, исключающее возможность индивидам предъявлять ложные предпочтения — лгать можно, но невыгодно! Подробнее с теоремой Гиббарда — Сэттертуэйта можно ознакомится в [1], глава 10.

В предыдущих разделах было представлено множество негативных результатов теории общественного выбора: ни один из предложенных методов нахождения альтернативы-победителя нельзя назвать вполне удовлетворительным. Далее мы рассмотрим позитивные результаты, которые, однако, имеют место только в ограниченной области унимодальных (однопиковых) предпочтений.

4 Унимодальные предпочтения и победители по Кондорсе

На практике во многих случаях приходится сталкиваться со следующей ситуацией: множество альтернатив как вариантов некоторого законопроекта можно некоторым естественным образом упорядочить. Например, речь может идти об акцизах на водку или (другой набор альтернатив) о таможенных пошлинах на импорт автомобилей (ставка на 1 cm^3 объёма двигателя) и т. д. Тогда сами альтернативы можно отождествить с числами на действительной оси, определяя тем самым порядок на множестве всех альтернатив. Можно предположить, что предпочтения каждого избирателя обладают таким свойством: при сравнении двух альтернатив, каждая из которых находится левее (правее) его наилучшей альтернативы (пик полезности), избиратель предпочитает ближайшую к пику альтернативу более удалённой. Например, если он/она считает, что оптимальная ставка налога на водку 30%, то при выборе между ставками 15% и 20% он/она выберет последнее; аналогично, 35% будет предпочтительнее ставки в 40%. Заметим, что здесь нет требования на то как сравниваются между собой альтернативы, находящиеся по разные стороны от пика: неизвестно что лучше, 20% или 35%, может быть и так и эдак. Представляется, что подавляющее большинство избирателей согласится с указанными свойствами предпочтений в подобных описанным выше вариантах множества альтернатив.

Далее мы приведём формальное понятие унимодальных[13] или однопиковых предпочтений.

Определение 4.1 *Профиль предпочтений* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *на множестве аль-*

[12]Говорят, что отображение F сюрьективно или является отображением "на", если для каждого элемента y области значений найдётся элемент x в области определения такой, что $F(x) = y$. Применительно к нашему случаю: $\forall\, a \in \mathcal{A}\ \exists\, u \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) : F(u) = a$.

[13]Унимодальный это значит приводимый к общей шкале, имеющий общий модуль.

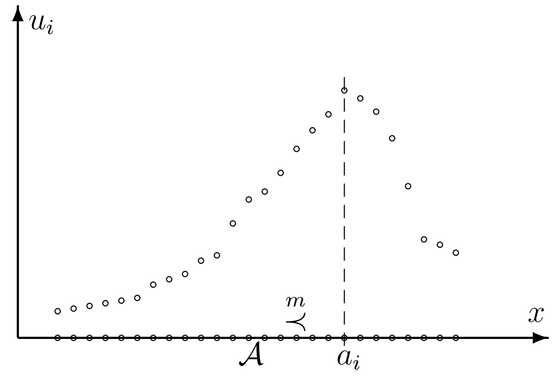

Рис. 2: Однопиковое предпочтение индивида $i \in \mathcal{I}$

тернатив $\mathcal{A}$ называется унимодальным, если на $\mathcal{A}$ существует такой ***линейный*** *порядок $\overset{m}{\succeq}$, что для* ***любого*** *индивида $i \in \mathcal{I}$ и его* ***наилучшей*** *альтернативы a_i для любых $a, b \in \mathcal{A}$ имеет место:*

$$\left.\begin{array}{l} b \overset{m}{\succ} a \overset{m}{\succeq} a_i \\ b \overset{m}{\prec} a \overset{m}{\preceq} a_i \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad u_i(a) > u_i(b). \tag{4.2}$$

Отметим, что вообще говоря порядок $\overset{m}{\succeq}$ на $\mathcal{A}$ может не иметь никакого специфического смысла, и в каждом конкретном случае он может быть разным. Единственная роль этого порядка в том, чтобы задать что-то вроде шкалы такой, чтобы выполнялось требование (4.2). Исключительно важно то, что $\overset{m}{\succeq}$ *один и тот же для всех* индивидуумов.

Понятию унимодального профиля предпочтений можно придать графически-образное представление, так как это изображено на рис. 2. Здесь график функции полезности похож на изображение горы: двигаясь слева направо (или наоборот) наблюдатель всё время (монотонно) поднимается в гору вплоть до пика, но перевалив через пик, он начинает (монотонный) спуск. Отсюда проистекает ещё одно название — *однопиковые* предпочтения.

Основным результатом об унимодальных предпочтениях, применяемым в разнообразных приложениях, является следующая теорема о медианном избирателе.

Теорема 4.1 *Пусть $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ унимодальный профиль на $\mathcal{A}$ и пусть число индивидуумов-избирателей нечётно. Тогда в профиле существует* ***победитель по Кондорсе****, который является* ***средним пиком*** *индивидуальных предпочтений. Более того, бинарное отношение по принципу большинства транзитивно, т. е. является линейным порядком.*

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. С этой целью переупорядочим избирателей так, чтобы относительно порядка $\overset{m}{\succeq}$ индивид с большим номером имел пик правее (нестрого) пика индивида с меньшим номером. Другими словами, без ограничения общности будем считать, что нумерация индивидов удовлетворяет

$$i > j \quad \Rightarrow \quad a_i \overset{m}{\succeq} a_j, \quad \forall\, i, j \in \mathcal{I},$$

где a_i и a_j это наилучшие альтернативы избирателей i, j соответственно. Теперь альтернативу-победителя по Кондорсе можно указать непосредственно: это наилучшая альтернатива *медианного* избирателя — индивида с номером $i^* = \frac{n+1}{2}$, т. е. это

$a^* = \operatorname*{argmax}_{a \in \mathcal{A}} u_{i^*}(a)$. Чтобы доказать этот факт возьмём любую альтернативу $b \neq a^*$. Тогда выполнено $b \overset{m}{\prec} a^*$ или $a^* \overset{m}{\prec} b$. Пусть, например, реализовался первый вариант. Тогда избиратели с номерами $i \geq \frac{n+1}{2}$ образует большинство и при этом их наилучшие альтернативы удовлетворяют $a_i \overset{m}{\succeq} a^*$ (находятся правее альтернативы a^*). Применяя первое из условий в (4.2), заключаем, что $a^* \succ_i b \; \forall\, i \geq \frac{n+1}{2}$. Таким образом, при парном голосовании a^* против b, альтернатива a^* получит большинство голосов. Второй вариант рассматривается симметрично (большинство образуют избиратели $i \leq \frac{n+1}{2}$).

Докажем вторую часть теоремы от противного. Предположим, что нашлись три альтернативы такие, что выполнено[14] $a \overset{u}{\succ} b$, $b \overset{u}{\succ} c$ и $c \overset{u}{\succ} a$.

Рассмотрим первую пару соотношений, т. е. $a \overset{u}{\succ} b$ и $b \overset{u}{\succ} c$. Здесь $\overset{u}{\succ}$ это отношение по принципу большинства, а два множества индивидов, каждое из которых образует большинство, имеют непустое пересечение. Значит, найдётся такой избиратель $i \in \mathcal{I}$, для которого будет $u_i(a) > u_i(b) > u_i(c)$. Отсюда следует, что альтернатива c *не* может располагаться *между* альтернативами a и b в смысле порядка $\overset{m}{\succ}$, т. е. каждое из соотношений $a \overset{m}{\succ} c \overset{m}{\succ} b$ и $b \overset{m}{\succ} c \overset{m}{\succ} a$ невозможно. Действительно, проверьте все мыслимые варианты расположения этих альтернатив для однопикового (относительно $\overset{m}{\succ}$) предпочтения $\succ_i$: для данного i полезность каждой из "промежуточных" альтернатив *не* может быть *меньше* чем $\min\{u_i(a), u_i(b)\}$, а у c меньше!

Подобным образом из соотношений $b \overset{u}{\succ} c \overset{u}{\succ} a$ и $c \overset{u}{\succ} a \overset{u}{\succ} b$ следует, что: из первого — *a не между b и c*, из второго — *b не между a и c*. Однако одна из трёх альтернатив должна быть между двумя другими — противоречие. Следовательно, сделанное предположение неверно и, значит, цикла быть не может[15]. $\square$

Отметим, что в случае однопиковых предпочтений победитель по Кондорсе находится как средний пик. Отсюда следует, что при практическом применении правила Кондорсе нет необходимости проводить трудоёмкий процесс попарного сравнения альтернатив: избирателям достаточно сообщить свои наилучшие альтернативы (пики), а далее можно просто вычислить средний пик.

В своей первой части — существование победителя по Кондорсе — теорема 4.1 допускает обобщение на класс унимодальных предпочтений, заданных на дереве. Например, это может быть дерево, изображённое на рис. 3. Как обычно, альтернативы ассоциируются с вершинами дерева, однако нужно уточнить понятие унимодальности на дереве. Делается это так: у каждого индивида имеется наилучшая вершина a^* и для каждой другой альтернативы x имеется *единственный* путь (цепочка сопряжённых рёбер и вершин), соединяющий x с a^*. Унимодальность предпочтения означает, что вдоль этого пути полезность данного индивидуума монотонно возрастает — это имеет место для любого индивида и любой альтернативы $x \neq a^*$. Далее рассмотрим набросок доказательства.

Ведём индукцию по числу вершин (альтернатив) в дереве. База индукции — три альтернативы — очевидна, ибо тогда возможен только тривиальный граф

---

[14] Здесь отношение по принципу большинства всегда строгое, ибо n нечётно.

[15] Прим. Маракулина В. М. Вариант доказательства 2-й части теоремы: Пусть a, b, c любые альтернативы. Рассмотрим снижение профиля на $\{a, b, c\} = \mathcal{B}$ и пусть, например, $a \overset{m}{\succ} b \overset{m}{\succ} c$. Из однопиковости исходного профиля следует $u_i(b) > \min\{u_i(a), u_i(c)\} \; \forall\, i$, что влечёт однопиковость *снижения* на $\mathcal{B}$. Значит, на $\mathcal{B}$ существует победитель по Кондорсе и, тем самым, цикл для a, b, c невозможен.

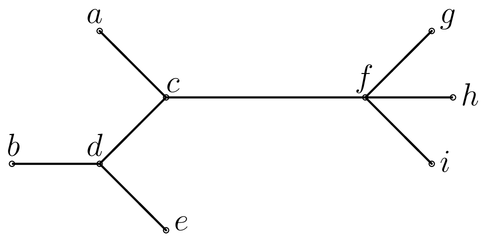

Рис. 3: Вариант дерева альтернатив

$a - b - c$, с которым можно связать порядок $a \overset{m}{\prec} b \overset{m}{\prec} c$. Унимодальность на этом графе влечёт унимодальность в смысле теоремы 4.1 и, значит, победитель по Кондорсе существует. Пусть число вершин в графе больше трёх и пусть для всех деревьев со строго меньшим числом вершин победитель по Кондорсе существует. Возьмём любую терминальную (финальную) вершину a. Если это пик для большинства избирателей, то это победитель по Кондорсе. В противном случае рассмотрим (единственную) вершину b, связанную ребром с a, и далее исключим из дерева вершину a и входящее в неё ребро. Очевидно, что полученный при этом граф является деревом, на котором снижение исходного профиля унимодально, и индивиды, у которых пик был в a, будут иметь новый пик b. По индуктивному предположению на редуцированном дереве существует победитель по Кондорсе, пусть это c. Легко видеть, что именно этот c и является победителем по Кондорсе на исходном дереве. Действительно, при голосовании между x и c при $x \neq a$, за c голосуют те же избиратели, что на редуцированном дереве. Случай $x = a$ более нетривиальный. Здесь для каждого i имеем $u_i(b) > \min\{u_i(a), u_i(c)\}$ (убедитесь!), откуда следует, что снижение профиля на множество $\{a, b, c\}$ будет унимодально (например, для порядка $a \overset{m}{\prec} b \overset{m}{\prec} c$ однопиковость нарушается только если $u_i(b) < \min\{u_i(a), u_i(c)\}$). Следовательно, на этом трёхэлементном множестве существует победитель по Кондорсе. Однако c выигрывает у b и, так как пиков в a меньшинство, то b выигрывает у a по большинству. Значит, победителем Кондорсе может быть только c, который и выиграет у a. □

Отметим, что вторая часть теоремы 4.1 — тот факт, что мажоритарное правило реализует предпорядок — на случай дерева не обобщается! Таким образом, победитель по Кондорсе существует, но среди других альтернатив циклы возможны. Эту мысль иллюстрирует следующий профиль, унимодальный на графе-звезда:

$$\begin{array}{ccc} a & c & b \\ d & d & d \\ b & a & c \\ c & b & a \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a- & d & -c \\ & | & \\ & b & \end{array}$$

Унимодальность профиля на дереве проверяется непосредственно. При этом d это победитель по Кондорсе, а три другие альтернативы упорядочены в профиле так, что складывается парадокс голосования, т. е. цикл. □

Завершая данный раздел, мы рассмотрим вопрос о коалиционной манипулируемости мажоритарного правила. Нужно понимать, что здесь речь может идти только об ограниченной области профилей, в рамках которой у каждого профиля существует победитель по Кондорсе.

Действительно, пусть число избирателей нечётно и пусть область $D \subset L(\mathcal{A})$ такова, что для любого профиля $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $u_i \in D \ \forall i$, существует победитель по Кондорсе. Например, в качестве D можно принять множество всех унимодальных предпочтений относительно некоторого заданного (фиксированного) упорядочивания $\overset{m}{\succeq}$. Пусть общественный выбор осуществляется по какому-нибудь правилу, состоятельному по Кондорсе, т. е. для $\mathbf{u} \in D^{\mathcal{I}}$ общество выбирает альтернативу a, побеждающую во всех парных сравнениях по принципу большинства. Покажем, что не существует такой группы избирателей $S \subseteq \mathcal{I}$, которой было бы выгодно представить ложные предпочтения $v_i \in D$, $i \in S$. От противного: предположим, что это произошло и пусть сложился другой победитель b такой, что $u_i(b) > u_i(a)$, $\forall\, i \in S$. Однако так как a выигрывает у b по правилу большинства для u, то и для профиля (u_{-S}, v_S) — это профиль, в котором избиратели из S употребили ложные предпочтения v_i, $i \in S$ — победить должен a, ибо при сравнении a с b по (u_{-S}, v_S) поддержка a могла только расширится. Таким образом, лгать нет смысла...

Список литературы

[1] Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели: Пер. с англ. — Москва: Мир, 1991. — 464 с.