На правах рукописи

Маракулин Валерий Михайлович

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В СОВРЕМЕННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Специальность 08.00.13 — математические и инструментальные методы экономики

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Новосибирск

2003

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук — В. И. Данилов
доктор физико-математических наук, профессор — О. А. Малафеев
доктор физико-математических наук, профессор — А. А. Шананин

Ведущая организация:

Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН

Защита состоится «____» _________ 2003 г. в на заседании диссертационного совета Д 002.013.02 в Центральном экономико-математическом институте РАН по адресу: 117418 Москва, Нахимовский проспект, 47, ауд. 520.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале Центрального экономико-математического института РАН, в читальном зале Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (630090 Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4), а также на сайте:
www.math.nsc.ru/~mathecon/marakulinRUS.html

Автореферат разослан «____» сентября 2003 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
к. физ.-мат. наук — С. В. Борисова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Одна из основных целей экономической теории и её составной части — теории общего равновесия — состоит в том, чтобы описывать распределения ресурсов, реализуемые через систему рынков. Это распределение появляется как результат баланса интересов, реализуемых в рамках институциональных и физических ограничений разного рода, в результате "рыночной игры" экономических агентов, почему и называется равновесием. Серьёзный анализ концепции равновесия предполагает построение и изучение математических моделей экономики, в рамках которых равновесие описывается как распределение, обладающее четкими, недвусмысленными свойствами. При этом вопрос его существования в модели имеет первостепенное значение, поскольку означает математическую непротиворечивость предъявленных к равновесию требований и, следовательно, корректность самой модели.

В своей основополагающей работе Кеннет Эрроу и Жерар Дебре [1] заложили основы современных математических моделей замкнутой децентрализованной экономической системы, отразив присущие ей черты в наиболее специфической математической форме. Развитая в этих рамках теория экономического равновесия является, по-видимому, одним из наиболее выдающихся достижений математической ветви экономической теории второй половины 20-го века. Последние 40 лет были отмечены обширным потоком работ, обобщающих результаты Эрроу–Дебре в самых различных направлениях. В частности, многими исследователями ослаблялись предположения, гарантирующие существование равновесий. Большая часть этих предположений усилиями многих авторов (таких как Мас-Колелл, Ауманн, Гильденбранд, Гейл и многие другие) была доведена до математического совершенства и, по-видимому, не может быть принципиально ослаблена в дальнейшем. При этом, однако, в этой теории имеется одно, на наш взгляд искусственное, предположение "о выживаемости" экономических агентов. Это предположение плохо интерпретируется и имеет скорее чисто математический характер, серьёзно ограничивая рамки применимости модели. В отличии от таких требований как непрерывность, компактность, выпуклость соответствующих элементов модели, это предположение не представляется безусловно необходимым для существования равновесия. Конечно, "проблема условия выживаемости" не может быть разрешена в традиционных модельных рамках ибо, как показывают многие примеры, при отсутствии какого либо аналога этому условию и при прочих обычных посылках, равновесия могут не существовать. Преодолеть эту трудность можно, если ревизовать собственно понятие цены, а именно, вместо обычных "стандартных" цен использовать "нестандартные" (в смысле нестандартного анализа). Важно, что таким образом методологически не меняется собственно концепция равновесия, но модифицируется математическая модель, в которой, содержательно, для измерения стоимостных параметров используется более тонкая (в надлежащей мере) шкала чем шкала, применяемая для измерения объёмов потребляемых благ.

Вопрос существования равновесия вновь появляется в новых современных моделях экономики. В их числе модели с бесконечномерным пространством продуктов и неполные рынки.

С начала 70-х годов в литературе отмечен устойчивый интерес к моделям экономики с бесконечным числом продуктов и это не случайность. Действительно, уже обычная модель обмена с конечным числом торговцев превращается в бесконечно-товарную, если принять во внимание, что продукты могут быть распределены в пространстве и обладать потенциально различными "непрерывными" потребительскими свойствами[1], — а это все свойства реальной экономики, которыми пренебрегает классическая теория распределения ресурсов. Время — это другой важный фактор, превращающий модель в бесконечно-товарную, ибо продукты, потребляемые в различные моменты, следует считать различными. Кроме того, на рынке могут появляться новые и исчезать старые агенты, — такого рода постановки приводят к важному классу моделей с перекрывающимися поколениями. Важно, что многие вопросы могут быть корректным образом исследованы только в бесконечномерной постановке. Более того, бесконечномерная постановка позволяет вычленить наиболее общие свойства и предположения, дающие в рассматриваемом случае существование равновесных цен в конкурентных экономиках и оценить их экономическую значимость.

С математической точки зрения равновесный анализ бесконечномерных моделей существенно сложнее. Одна из трудностей состоит в том, что во многих интересных пространствах конус неотрицательных элементов имеет пустую внутренность, что не позволя-

[1]Например, содержание белков, жиров, витаминов в продуктах питания.

ет применить стандартную технику теории существования. Чтобы преодолеть её, имея целью получить непрерывный функционал равновесных цен, Мас-Колелл [2] вводит важное понятие “равномерно правильных предпочтений”. Это требование “правильности” затем ослаблялось многими авторами (Яннелис и Зейм в [3], Подчек [4], автор настоящей диссертации [12], [13]). Сейчас это довольно абстрактное требование, выраженное в поточечных терминах. Более того, равновесный анализ в современных моделях распространяется на пространства, в которых имеется только слабая форма взаимосвязи топологической и порядковой структур — допустимо, чтобы решёточные операции не были непрерывными. Разумно в данном контексте рассматривать и модель с перекрывающимися поколениями, развёрнутую в будущее до бесконечности, предполагая, что в каждый момент времени имеется бесконечномерное пространство продуктов.

Неполные рынки появляются в экономической теории как обобщение модели Эрроу–Дебре с целью более адекватно отразить на модельном уровне функционирование финансового сектора реальных экономик. Классическая теория не описывает всей специфики финансовых рынков, что и потребовало создание адекватной теории. В современной версии теории неполных рынков формулируется понятие финансового равновесия (GEI-равновесия), характерной чертой которого является множественность бюджетных ограничений, отвечающих разным событиям, связь между которыми осуществляется только через торговлю активами. Таким образом, здесь нет полной свободы в “перетоке” стоимости из одного события в другое. Математическая особенность финансовых равновесий состоит в том, что, вообще говоря, они могут не существовать уже при самых “обычных” модельных предположениях и в конечномерной постановке, см. [5]. Причина этого состоит в том, что матрица финансовых отдач может иметь переменный ранг при изменении определяющих её параметров (цен). Поэтому в теории сначала устанавливают существование особого объекта — псевдоравновесий, а уже затем, их совпадение “почти всегда” с GEI-равновесиями. Таким образом, теорема существования получает “генерическую” формулировку — GEI-равновесия существуют почти всегда, причём при весьма жестких прочих условиях. Возможное *несуществование* GEI-равновесий мотивирует поиск экономически состоятельного преобразования этой концепции с целью достичь удовлетворительной теоремы существования. Идея этого преобразования основывается на том наблюдении, что при ограничениях на объём торговли на рынке активов финансовые равновесия существуют при обычных предположениях. В дальнейшем нужно описать пределы полученных равновесий при ослаблении ограничений на торговлю до бесконечности. Полученную таким образом концепцию равновесия можно интерпретировать как результат вмешательства государства, с целью стабилизировать рынок, но с последующим уменьшением регулирующего воздействия. Данный подход можно использовать как для базовой двустадийной модели (настоящее-будущее), так и в более реалистичной модели с перекрывающимися поколениями экономических агентов, допускающей "развёртку" будущего до бесконечности.

Цель работы. Анализ условий, гарантирующих существование как собственно равновесий в моделях экономики типа Эрроу–Дебре, так и объектов формально отличных, но содержательно близких к равновесным, разного рода обобщённым концепциям, которые могут служить заменителем равновесия в случае его отсутствия в модели. Анализируются как классические модели экономики, так и современные модели. В том числе предложены и исследуются две новые модели — абстрактной экономики, в рамках которой развита теория равновесия с нестандартными ценами, и модель динамического неполного рынка, представляющая из себя синтез модели с перекрывающими поколениями и модели неполного рынка, включающей в себя рынок финансовых инструментов (активов).

Научная новизна. Построена теория равновесия с нестандартными ценами, избавленная от ряда жестких предположений для существования равновесий. В числе "опущенных" предположений условие выживаемости агентов и ненасыщаемость предпочтений. Причём в модели допускается наличие внешних влияний и балансовые соотношения произвольного вида. Важно, что при наличии этих предположений в контексте классической модели равновесия с нестандартными ценами совпадают с обычными равновесиями и, тем самым, являются их прямым обобщением. Доказаны теорема существования, конечность числа нестандартных равновесий, аналог второй теоремы благосостояния, а также подробно изучена структура бюджетных множеств.

Введены новые понятия правильности предпочтений и производственных множеств, что позволило доказать серию новых теорем существования равновесия в моделях экономики с бесконечным числом продуктов. Пространство продуктов в этих моделях описывается как линейная векторная решётка, в которой решёточные операции могут не быть непрерывными. Изучены модели чистого обмена, с производством, а также с перекрывающимися поколениями, где в каждый момент времени пространство продуктов бесконечномерно.

Для модели с перекрывающимися поколениями введено особое понятие равновесия с нестандартными ценами и установлена его теорема существования. В данном случае последовательности нестандартных ценовых функционалов можно поставить в соответствие последовательность стандартных линейных непрерывных функционалов и набор стоимостных оценок начальных ресурсов экономических агентов. Эти оценки вычисляются по явной формуле, где как слагаемое появляется стандартная часть суммы ряда нестандартных оценок, вычисленных для временных периодов, начиная с некоторого “бесконечного”. Таким образом описываются оценки уходящих на бесконечность начальных запасов, отвечающие компенсирующим стоимостям в известной концепции скомпенсированного равновесия. В данном случае они линейны по запасам по определению и обращаются в нуль при дополнительных классических предположениях, что позволяет заключить существование обычного равновесия.

Для модели неполного рынка введено понятие равновесия с компенсирующими активами. Торговля этими активами может происходить при ограничениях на объёмы покупок и продаж. Эти активы компенсируют коллапс финансового рынка, вызванный вырождением матрицы стоимостных отдач, что возможно при некоторых потенциально равновесных ценах. Число компенсирующих активов не превышает дефекта матрицы стоимостных отдач в состояниях природы из будущего. В целом эти равновесия получаются как пределы равновесий Раднера, полученных при ограничениях на объёмы торговли на финансовом рынке, при условии, что ограничения ослабляются до бесконечности. Доказана теорема существования при предположениях близких к классическим.

Построена модель динамического неполного рынка с перекрывающимися поколениями экономических агентов, представленная на неограниченно уходящем в будущее дереве событий. Концепция равновесия с компенсирующими активами переносится на эту модель и доказывается его теорема существования. Данный подход позволяет разрешить парадокс, который появляется в модели с перекрывающимися поколениями, где агенты могут получать финансовые ресурсы из бесконечного будущего.

Методы исследования. Использовались методы математического и функционального анализа, теория полуупорядоченных пространств. Для анализа конечности числа равновесий привлекались элементы дифференциальной топологии (теоремы Тома об открытости и плотности трансверсальных сечений). Особенностью работы является широкое использование методов нестандартного анализа.

Теоретическая и практическая ценность работы. Полученные в исследовании результаты имеют теоретический характер и развивают теорию экономического равновесия. Результаты могут использоваться в преподавательской деятельности при подготовке специализированных курсов по микроэкономическому анализу и общему равновесию.

Апробация работы. Результаты докладывались и обсуждались на научных семинарах отдела математической экономики Института математики им. С. Л. Соболева и множестве Российских и международных конференций. На международной конференции в Праге "Micromodels-89" и 6-м Всемирном Конгрессе Эконометрического Общества (Барселона 1990) были представлены результаты по теории равновесия с нестандартными ценами. Исследования моделей с бесконечным числом продуктов были представлены на Европейском Конгрессе Эконометрического Общества (Маастрихт 1994), на 8-м Всемирном Конгрессе Эконометрического Общества (Сиэтл 2000), а также на Европейской Школе-семинаре по Общему Равновесию (Париж 2000), Международной конференции по математической экономике и финансовой математике (Тунис 1994) и Сибирских Конгрессах по Прикладной и Индустриальной Математике — ИНПРИМ 1994, ИНПРИМ 2000, Новосибирск. Результаты по теории неполных рынков представлялись на Европейских Конгрессах Эконометрического Общества (Брюссель 1992, Упсалла 1993), а также 7-м Всемирном Конгрессе Эконометрического Общества (Токио 1995).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах (4 в соавторстве), общим объёмом около 25 п. л.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения (сводка основных положений и фактов нестандартного анализа) и списка литературы. Диссертация изложена на 345 страницах, содержит 13 иллюстраций и 8 примеров. Список литературы включает 85 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования и его цели, дается характеристика научной новизны и места исследования в современной математической экономике, приводится краткий обзор литературы по тематике и описывается содержание диссертации по главам.

ПЕРВАЯ ГЛАВА посвящена построению теории равновесия с нестандартными ценами и изучению математических свойств введенной концепции равновесия. Основной мотив исследования состоит в том, чтобы избавить теорию равновесия от ограничений типа условия выживаемости — survival assumption, — формулируемое иногда как "ресурсная связность" или "нередуцируемость" экономической модели, а фактически играющее роль "условия Слейтера" в задаче потребителя. Эта проблема не может быть разрешена в традиционных модельных рамках, ибо при отсутствии какого-либо аналога условию Слейтера и при прочих обычных посылках равновесия могут не существовать. Чтобы преодолеть эту трудность, ревизуется собственно понятие цены. А именно, вместо "стандартных" цен используются "нестандартные" (в смысле нестандартного анализа) — цены на продукты могут быть не только обычными (действительными) числами, но и нестандартными, т. е. выбранными из нестандартного расширения числовой прямой ${}^*\mathbb{R}$ (о нестандартном анализе см., напр. [6], [7], [8]). С математической точки зрения классическое понятие "решения" заменяется на обобщенное, которое существует уже при более слабых предпосылках, — типичный приём, эффективно работающий в ряде других областей математики. С экономической точки зрения этот подход означает, что *шкала измерений* для *цен* на разного рода продукты должна быть *мельче* (в достаточной мере) шкалы, используемой для исчисления физических благ. При этом методологически концепция равновесия не изменяется.

Теория равновесия с нестандартными ценами излагается в контексте абстрактной модели экономики, в которой балансовые ограничения определяются линейным оператором общего вида и допускаются внешние влияния. Использованные здесь предположения имеют общематематический характер и даны в слабейшей из известных в литературе форме. Исследованы теоремы благосостояния — в терминах нестандартных индивидуальных цен, причем как для общих, так и при ограниченных внешних влияниях. Доказаны теоремы существования аппроксимирующего равновесия с индивидуальными стандартными ценами. Они влекут существование равновесий разного вида с нестандартными ценами в рассмотренных конкретизациях абстрактной модели, в их числе классические: модель чистого обмена, модель Эрроу–Дебре и модель с общественными благами. Подробно исследована структура бюджетных множеств с нестандартными ценами и изучен вопрос о конечности числа нестандартных равновесий в модели обмена.

В **разделе 1.1** формулируется и исследуется абстрактная модель экономики, в краткой форме эта модель имеет вид

$$\mathcal{E} = \langle\ \mathcal{N},\ \mathcal{X},\ \mathcal{Q},\ F(.),\ \omega,\ \{\mathcal{P}_i(.), \alpha_i(.)\}_{i\in\mathcal{N}}\ \rangle.$$

Здесь $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ — *экономические агенты*, $\mathcal{X}$ — совокупность *допустимых состояний*, по предположению это подмножество некоторого конечномерного пространства L (*пространство состояний*). Состояния $x \in \mathcal{X}$, удовлетворяющие $F(x) = F(\omega)$ называются *достижимыми*. Здесь $F : L \to E$ — заданный линейный оператор, а $\omega \in \mathcal{X}$ — "исходное" состояние экономики. Оператор F определяет в наиболее общей форме свойство сбалансированности текущего состояния экономики. Экзогенно задано $\mathcal{Q} \subset (L')^{\mathcal{N}}$ — множество допустимых наборов *индивидуальных* цен, $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathcal{Q}$. Агент $i \in \mathcal{N}$ описывается следующим образом:

$\mathcal{P}_i : \mathcal{X} \times \mathcal{Q} \rightrightarrows \mathcal{X}$ — отношение предпочтения, где $\mathcal{P}_i(x, q)$ это состояния экономики, *строго* предпочитаемые агентом i состоянию x при ценах q. Таким образом, предпочтения могут иметь очень общий вид. Полагаем $y \succ_i^q x \iff y \in \mathcal{P}_i(x, q)$.

$\alpha_i : \mathcal{X} \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ — *функции распределения дохода*, определяющие, совместно с ценовыми параметрами, механизм стоимостного регулирования.

В **разделе 1.1.1** анализируется понятие оптимальности по Парето и даётся его характеризация в терминах набора индивидуализированных нестандартных цен.

Определение 1.1.1 *Говорят, что допустимое состояние экономики $x \in \mathcal{X}$ оптимально (слабо) по Парето относительно $q \in \mathcal{Q}$, если оно достижимо, т. е. $F(x) = F(\omega)$ и при этом выполняется*

$$\bigcap_{i\in\mathcal{N}} \mathcal{P}_i(x, q) \bigcap \mathcal{A}(\mathcal{X}) = \emptyset.$$

Здесь и далее
$$\mathcal{A}(\mathcal{X}) = \{x \in \mathcal{X} \mid F(x) = F(\omega)\}$$
— совокупность всех достижимых состояний. Одну из возможных версий второй теоремы благосостояния даёт следующая

Теорема 1.1.1 *Пусть* $x \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$, *множества* $\mathcal{P}_i(x,q) \cup \{x\}$ & $\mathcal{P}_i(x,q)$ ***выпуклы*** *и* $x \notin \mathcal{P}_i(x,q)$ *для всех* $i \in \mathcal{N}$. *Состояние* x *оптимально по Парето относительно* q *тогда и только тогда, когда найдется набор* ***ненулевых*** *нестандартных векторов* $\pi_1, \ldots, \pi_n$ *из* ${}^*L'$, *такой, что*
$$\langle \mathcal{P}_i(x,q), \pi_i \rangle > \langle x, \pi_i \rangle$$
для каждого $i \in \mathcal{N}$, *удовлетворяющего* $\mathcal{P}_i(x,q) \neq \emptyset$, *и при этом* $\ker F(.) \subset \ker \sum_{\mathcal{N}} \pi_i(.) \iff$
$$[\, y \in L,\ F(y) = F(\omega) \Rightarrow \sum_{\mathcal{N}} \pi_i(y) = \sum_{\mathcal{N}} \pi_i(\omega)\,]. \tag{1}$$

Комментируя содержание теоремы отметим, что аналогичный результат при условии замены нестандартных цен на стандартные является **неверным** — здесь уже проявилась специфика нестандартных цен. В силу этой теоремы, требование (1) к совокупности индивидуальных цен совместно с условием их (строгой) опорности в точке x к множеству предпочитаемых состояний является необходимым и достаточным условием оптимальности по Парето достижимого состояния x. Тем самым условие (1) для набора индивидуальных цен можно понимать как своеобразное требование достижимости эффективных состояний.

О структуре индивидуальных цен, отвечающих оптимальным состояниям, можно получить больше информации, если внешние влияния имеют ограниченный вид. Это важный в приложениях случай, ибо тогда результаты, полученные для абстрактной модели, можно эффективно применять в привычных моделях. Точная формализация понятия ограниченных внешних влияний довольно громоздкая и здесь мы ее опускаем (см. текст диссертации). Укажем лишь кратко, что так описываются ситуации, в которых состояние экономики можно разбить на фрагменты (подвектора), и для каждого агента указать, в каких фрагментах состояния он заинтересован (по предпочтению). Например, в модели рынка роль этих фрагментов играют индивидуальные потребительские планы; естественные “разбиения” состояния экономики появляются и в других (более сложных) моделях. Доказано, что в случае ограниченных внешних влияний компонента вектора индивидуальных цен, отвечающая "безразличному" для данного агента фрагменту текущего состояния, обращается в нуль. Точнее, найдется такой набор индивидуальных цен, который удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1.1[2].

Применение условия (1) в контексте модели с ограниченными внешними влияниями способно в значительной мере эллиминировать индивидуализацию цен. Например, в модели рынка, где балансовый оператор имеет вид $F(x_1, \ldots, x_n) = \sum x_i$, а предпочтения агентов (без внешних влияний) определены на индивидуальных потребительских наборах $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^l$, где X_i — потребительское множество. Тогда вектора индивидуальных цен из теоремы 1.1.3 будут иметь вид $\pi_i = (\pi_i^j)_{j \in \mathcal{N}}$, где $\pi_i^j = 0$ при всех $j \neq i$, что в силу (1) влечет $\pi_i^i = \pi_j^j = p$ для всех i, j, т. е. существует вектор нестандартных рыночных цен p, опорный (строго) к множеству предпочитаемых наборов в точке x_i для каждого i. Таким образом, для модели рынка (аналогично — в других известных моделях) мы получаем нестандартный аналог классической версии второй теоремы благосостояния. Доказательства этих теорем основываются на полученном автором нестандартном обобщении теоремы Дубовицкого–Милютина о разделимости выпуклых множеств нестандартными линейными функционалами (см. текст диссертации).

В **разделе 1.1.2** вводится понятие аппроксимирующего равновесия со *стандартными* индивидуальными ценами и доказывается его теорема существования.

Полученные в предыдущем разделе результаты показывают, что в модели с внешними влияниями концепция *эффективного* равновесия должна основываться на индивидуальных ценах $q = (q_i)_{\mathcal{N}} \in \mathcal{Q}$, которые образуют *достижимую* совокупность, т. е. удовлетворяют условию $\ker \sum_{\mathcal{N}} q_i(.) \supset \ker F(.)$. Пусть

$$\mathcal{A}(\mathcal{Q}) = \{q \in \mathcal{Q} \mid \ker \sum_{\mathcal{N}} q_i(.) \supset \ker F(.)\}.$$

[2]На самом деле, в общем случае, нужно еще слегка модифицировать само понятие оптимальности, допуская возможность коалициям "улучшить" текущее состояние экономики, не затрагивая при этом интересы дополняющей коалиции, см. определение 1.1.3 и теорему 1.1.3. диссертации.

В определении равновесия фигурирует *бюджетное множество* агента i в состоянии $x \in \mathcal{X}$ при ценах $q = (q_i)_{\mathcal{N}} \in \mathcal{Q}$, это

$$B_i(x, q) = \{y \in \mathcal{X} \mid \langle q_i, y\rangle \le \alpha_i(x, q)\}.$$

Определение 1.1.4 *Состояние $x \in \mathcal{X}$ называется абстрактным равновесием при ценах $q \in \mathcal{Q}$, если выполнены условия*

(i) $\quad x \in B_i(x, q) \;\; \forall\, i \in \mathcal{N}$;

(ii) $\quad \mathcal{P}_i(x, q) \cap B_i(x, q) = \emptyset \;\; \forall\, i \in \mathcal{N}$;

(iii) $\quad F(x) = F(\omega)$;

(iv) $\quad q \in \mathcal{A}(\mathcal{Q})$.

Далее анализируется вопрос существования равновесий в смысле близком к определению 1.1.4. Анализ концентрируется на следующем вспомогательном понятии аппроксимирующего ε-равновесия — это объект, существование которого доказывается.

Определение 1.1.5 *Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \gg 0$.*[3] *Состояние $x \in L$ называется ε-равновесием при ценах $q \in \mathcal{Q}$, если найдется $0 \le \tau \le 1$ и допустимые $z_i \in \mathcal{X}$, $i = 0, \ldots, n$ такие, что $||z_i - x||_2 \le \sum_{\mathcal{N}} \varepsilon_j$ для всех $i \in \mathcal{N} \cup \{0\}$ и выполнены условия:*

(i) $\quad \langle q_i, z_i\rangle \le \alpha_i(z_0, q) + \tau\varepsilon_i \;\; \forall\, i \in \mathcal{N}$;

(ii) $\quad \mathcal{P}_i(z_i, q) \cap \{y \in \mathcal{X} \mid \langle q_i, y\rangle \le \alpha_i(z_0, q) + \tau\varepsilon_i\} = \emptyset \; \forall\, i \in \mathcal{N}$;

(iii) $\quad F(x) = F(\omega)$;

(iv) $\quad q \in \mathcal{A}(\mathcal{Q})$.

В отношении модели экономики делаются следующие ***предположения***.

A1 (выпуклость и замкнутость) Множество *допустимых* состояний $\mathcal{X}$ *выпукло и замкнуто.*

A2 (ограниченность) Множество *достижимых* состояний $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ *ограничено.*

A3 (слабая непрерывность) Для каждого $i \in \mathcal{N}$ отображение $\mathcal{P}_i(.) : \mathcal{X} \times \mathcal{Q} \rightrightarrows \mathcal{X}$ удовлетворяет условиям

[3] Здесь и далее для $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \gg 0 \iff x_j > 0 \;\forall\, j = 1, \ldots, n$.

(i) полунепрерывность сверху: для всех $(x, q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}$ множество

$$\mathcal{P}_i(x, q) \text{ открыто в } \mathcal{X};$$

(ii) полунепрерывность снизу: для всех $y \in \mathcal{X}$ множество

$$\mathcal{P}_i^{-1}(y) = \{(x, q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q} \mid y \in \mathcal{P}_i(x, q)\} \text{ открыто в } \mathcal{X} \times \mathcal{Q}.$$

A3′ (сильная непрерывность) Для каждого $i \in \mathcal{N}$ отображение $\mathcal{P}_i(.) : \mathcal{X} \times \mathcal{Q} \rightrightarrows \mathcal{X}$ имеет *открытый график* $Gr\mathcal{P}_i(.)$ в $\mathcal{X} \times \mathcal{Q} \times \mathcal{X}$,

$$Gr\mathcal{P}_i(.) = \{(x, q, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q} \times \mathcal{X} \mid y \in \mathcal{P}_i(x, q)\}.$$

Для полиэдрального $\mathcal{X}$ предположения **A3** и **A3′** эквивалентны, однако в общем случае **A3′** более квалифицированное требование.

A4 (выпуклость и иррефлексивность) Для каждого $i \in \mathcal{N}$ и для всех $(x, q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}$ выполняется $x \notin \operatorname{co} \mathcal{P}_i(x, q)$.

A5 (непрерывность доходов) Для каждого $i \in \mathcal{N}$ функция $\alpha_i(.) : \mathcal{X} \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

Далее в работе формулируется закон Вальраса в контексте модели с ограниченными внешними влияниями, корректная постановка которого достаточно громоздкая. Упростив ситуацию, рассмотрим модель **экономики чистого обмена**, для которой этот закон имеет привычный вид финансового потребительского баланса.[4] Напомним, что экономика чистого обмена задается совокупностью следующих данных

$$\mathcal{E}^m = \langle\ \mathcal{I},\ \mathbb{R}^l,\ \{X_i,\ \mathcal{P}_i(.), \alpha_i(.)\}_{i \in \mathcal{I}},\ \omega,\ Q\ \rangle.$$

Здесь $\mathcal{I} = \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество потребителей; $X_i \subset \mathbb{R}^l$ — *потребительское множество* агента $i \in \mathcal{I}$, где $\mathcal{X} = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i \subset \mathbb{R}^{ln}$ — *допустимые состояния*, а $\mathbb{R}^{ln} = L$ — *пространство состояний*. Начальное состояние это $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathcal{X}$, где $\omega_i \in \mathbb{R}^l$ — исходные запасы потребителя $i \in \mathcal{I}$. Предпочтения потребителей задаются

[4] В диссертации анализу модели обмена посвящен **раздел 1.2.1** — параграф **раздела 1.2**, в котором общая теория равновесия с нестандартными ценами прилагается для изучения известных классических моделей.

отображениями $\mathcal{P}_i : \mathcal{X} \Rightarrow X_i$ (ограниченные внешние влияния). Кроме того, определены множество *допустимых рыночных* цен $Q \subset \mathbb{R}^l$ и $\alpha_i : Q \to \mathbb{R}$ — функции распределения дохода, $i \in \mathcal{I}$.

Состояние $x \in \mathcal{X}$ и $p \in Q$ называется *конкурентным или вальрасовским равновесием*, если $\sum_{\mathcal{I}} x_i = \sum_{\mathcal{I}} \omega_i$ и при этом $\mathcal{P}_i(x) \cap B_i(p) = \emptyset$ & $x_i \in B_i(p)$ для всех $i \in \mathcal{I}$. Здесь $B_i(p)$ — бюджетное множество потребителя i:

$$B_i(p) = \{y \in X_i \mid py \le \alpha_i(p)\}.$$

A6$^{\mathbf{m}}$ (закон Вальраса) $\quad \sum \alpha_i(p) = \langle p, \sum \omega_i \rangle \quad$ при любом $p \in Q$.

A7 (непустота бюджетных множеств) Для каждого $i \in \mathcal{I}$ существует компакт $M \subset X_i$ такой, что при любом $p \in Q$

$$B_i(p) \cap M \ne \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, y \in X_i \cap M \ : \ \langle p, y \rangle \le \alpha_i(p).$$

Последнее предположение аккумулирует основной смысл подхода. Оно существенно слабее требования “условия Слейтера”, которое в данном случае имело бы вид: $\forall\, p \in Q$, $p \ne 0$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$ существует такой $y \in X_i$, что $py < \alpha_i(p)$. Например, если $\alpha_i(p) = p\omega_i$, то **A7** будет выполнено при $\omega_i \in X_i$, а “условие Слейтера” — только если $\omega_i \in \mathrm{int} X_i$ для всех $i \in \mathcal{I}$ (при $0 \in \mathrm{int} Q$). Отметим, что и прочие предположения **A1**–**A6** также являются слабейшими из известных в литературе. Многие примеры показывают (см. основной текст и [9], [10]), что предположения **A7** недостаточно, чтобы существовало равновесие в привычном смысле (тем более сформулированное выше для абстрактной модели).

Понятие аппроксимирующего равновесия в контексте модели обмена получает следующую переформулировку.

Определение 1.1.5 *Пусть* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \gg 0$. *Состояние* $x \in \mathcal{X}$ *называется* ε*-равновесием при ценах* $p \in Q$, *если найдется* $0 \le \tau \le 1$ *такое, что*

(i) $\quad \langle p, x_i \rangle \le \alpha_i(p) + \tau\varepsilon_i \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$;

(ii) $\quad \mathcal{P}_i(x_i) \cap \{y \in X_i \mid \langle p, y \rangle \le \alpha_i(p) + \tau\varepsilon_i\} = \emptyset \ \forall\, i \in \mathcal{I}$;

(iii) $\quad || \sum_{\mathcal{I}} x_j - \sum_{\mathcal{I}} \omega_j ||_2 \le \sum_{\mathcal{I}} \varepsilon_j$.

Как видно из этого определения, здесь допускается возможность ослабления бюджетного ограничения. Однако при этом одновременно ослабляется и балансовое ограничение — спрос равен предложению с точностью до $\sum_{\mathcal{I}} \varepsilon_j$. Неотрицательный параметр τ здесь играет роль ценовой оценки финансовых ресурсов (денег). Ниже приводится адаптированная версия теоремы существования аппроксимирующих равновесий (переформулировка **теоремы 1.1.6** диссертации, доказанной для абстрактной модели и равновесия по определению 1.1.5).

Теорема *Пусть* $\mathcal{E}^m$ *удовлетворяет* **A1**–**A7** *и* $0 \in \mathrm{int}Q$. *Тогда* ε*-равновесие существует для каждого* $\varepsilon \gg 0$.

Раздел 1.1.3 посвящён введению понятия равновесия с *нестандартными* (и индивидуальными) ценами и доказательству его теоремы существования.

С математической точки зрения равновесие с нестандартными ценами, грубо говоря, представляет из себя предел аппроксимирующих ε-равновесий при $\varepsilon \to 0$. Это равновесное состояние отличается от привычного только тем, что для измерения стоимостных величин используется более тонкая шкала нестандартных чисел. Само же состояние является стандартным объектом (вектором), удовлетворяющим обычным "равновесным" требованиям. Однако, полученная на этом пути концепция "предельного" равновесия требует тщательного изучения. Ниже, как и ранее, мы рассматриваем простейший вариант экономики чистого обмена (в диссертации изучен общий случай абстрактной модели).

Для любого *внутреннего* подмножества $A \subset {}^*L$ определим его *стандартную* часть и *стандартную внутренность* по формулам:

$$\mathrm{st}A = \{y \in L \mid \mu(y) \cap A \neq \emptyset\}, \quad \mathrm{si}A = \{y \in L \mid \mu(y) \subset A \neq \emptyset\},$$

где $\mu(y)$ — монада элемента y, т. е. $\mu(y) = \{y' \in {}^*L \mid y' \approx y\}$. Пусть $\delta_i \in {}^*\mathbb{R}$, $\delta_i \geq 0$ и $i \in \mathcal{I}$ фиксированы. Для каждого $p \in {}^*Q$ определим нестандартное бюджетное множество

$${}^*B_i^{\delta}(p) = \{x' \in {}^*X_i \mid px' \leq \alpha_i(p) + \delta_i\}, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Вектор $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \geq 0$ называется *схемой перераспределения избыточных стоимостей*, а его компоненты — трансферабельными стоимостями.

Определение 1.2.1 *Допустимое состояние $x \in \mathcal{X}$ называется равновесием с нестандартными ценами $p \in {}^*Q$ и фиксированной схемой перераспределения избыточных стоимостей $\delta \in {}^*\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, $\delta \geq 0$ (кратко — δ-равновесие), если выполнены условия*

(i) $x_i \in \mathrm{st}^*B_i^\delta(p) \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$;

(ii) $\mathcal{P}_i(x) \cap \mathrm{st}^*B_i^\delta(p) = \emptyset \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$;

(iii) $\sum_{\mathcal{I}} x_i = \sum_{\mathcal{I}} \omega_i$.

С использованием теоремы существования квазиравновесий с нестандартными ценами в абстрактной модели (теорема 1.1.7 диссертации), формулировку которой мы здесь опускаем, доказана (раздел 1.2.1 диссертации) следующая

Теорема 1.2.1 *Пусть $\mathcal{E}^m$ удовлетворяет предположениям* **A1**, **A2**, **A3$'$**, **A4**, **A5**, **A6$^{\mathbf{m}}$**, **A7** *и $0 \in \mathrm{int}\, Q$. Тогда для каждого $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ такого, что $\beta \gg 0$, существуют δ-равновесия, такие, что $\delta = \tau \cdot \beta$ при некотором нестандартном $\tau \geq 0$.*

В **разделе 1.1.3** изучается структура бюджетных множеств с нестандартными ценами. Ниже приводятся основные результаты.

Связь между стандартной и нестандартной теориями экономического равновесия устанавливает

Утверждение 1.1.5 *Пусть $X \subset L$ — выпуклое замкнутое подмножество, а $p \in {}^*L$ и $\gamma \in {}^*\mathbb{R}$ таковы, что существуют $\bar{p} = \mathrm{st}(p)$ и $\bar{\gamma} = \mathrm{st}(\gamma)$, и при этом выполнено "условие Слейтера": существует $\tilde{x} \in X$ такой, что $\bar{p}\tilde{x} < \bar{\gamma}$. Тогда имеет место*

$$\mathrm{st}\{x' \in {}^*X \mid px' \leq \gamma\} = \{x \in X \mid \bar{p}x \leq \bar{\gamma}\}.$$

Таким образом, "условие Слейтера" в задаче экономического агента играет ключевую роль для того, чтобы множество $\mathrm{st}^*B_i^\delta(p)$ совпало с обычным бюджетным множеством, заданным ценами $\bar{p} = \mathrm{st}(p)$ и ограничением $\bar{p}x' \leq \alpha_i(\bar{p}) + \bar{\delta}_i = \bar{\gamma}$, где черта это стандартная часть. Здесь, конечно, также важна непрерывность функций распределения дохода.

В случае отсутствия "условия Слейтера" ситуация становится нетривиальной. Последующие результаты дают ответ в наиболее интересных случаях. Важную роль играет следующее наблюдение (**лемма 1.1.2** диссертации).

Пусть $p \in {}^*\mathbb{R}^l$, $p \neq 0$. Тогда найдется такая (единственная) система ортонормальных стандартных векторов $\{e_1, \dots, e_k\}$ из $\mathbb{R}^l$, что

$$p = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k, \quad \lambda_j \in {}^*\mathbb{R}, \;\; j = 1, 2, \dots, k.$$

При этом коэффициенты $\lambda_j > 0$ имеют убывающую "степень малости", т. е. удовлетворяют

$$\lambda_{j+1}/\lambda_j \approx 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1.$$

Доказанная в работе **теорема 1.1.8** утверждает, что для полиэдрального[5] (потребительского) множества $X \subset \mathbb{R}^l$ бюджетное множество с нестандартными ценами *без* трансферабельных стоимостей но при некотором *стандартном* векторе начальных запасов $\mathrm{w} \in \mathbb{R}^l$ имеет следующую структуру. Пусть t — минимальный номер функционала (вектора) e_j, $j = 1, \dots, k$ такой, что все вектора e_j с номерами $j < t$ являются опорными к X (в точке спроса, либо в точке начальных запасов w, если $\mathrm{w} \in X$), а e_t таковым не является. По свойству опорности вектора $e_1, \dots, e_{t-1}$ выделяют некоторую грань множества X (условием $e_j x = e_j \mathrm{w}$, $j < t$), в пределах этой грани используется "бюджетное" ограничение $e_t x \leq e_t \mathrm{w}$ — это и есть описание бюджетного множества с нестандартными ценами. При этом допустим и случай, когда *все* функционалы e_j являются опорными к потребительскому множеству.

Далее, ясно, что у разных индивидов структура бюджетного множества может определятся разными номерами t, что проявляется в различии индивидуальных потребительских множеств и, главное, уже в наличии разных исходных запасов[6]. Описанная структуризация бюджетных множеств порождает иерархическое расслоение индивидов по признаку "общий номер t бюджетного ограничения". Такого рода ситуацию можно, как это было сделано в [10], интерпретировать как распадение общего рынка на подрынки, где ходит собственная (мягкая) валюта, а обмен "товаров" с рынка более высокого уровня на более низкий осуществляется в пропорции $0/\infty$.

В контексте концепции равновесия с нестандартными ценами важно прояснить структуру бюджетного множества с нестандарт-

[5]Представляется как пересечение конечного числа замкнутых полупространств.

[6]Это особенно характерно в случае, когда все потребительские множества совпадают с положительным ортантом пространства продуктов.

ными ценами и *трансферабельными стоимостями*. Ответ на этот вопрос дает, доказанная в диссертации, **теорема 1.1.9**.

Итак, рассмотрим строение бюджетного множества с *нестандартной* трансферабельной стоимостью $\gamma \geq 0$:

$$\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,\gamma) = \mathrm{st}\{x \in {}^*X \mid px \leq p\mathrm{w} + \gamma\},$$

где $X \subset \mathbb{R}^l$ некоторое полиэдральное множество, а w — *стандартный* вектор из X. Структура этого множества зависит от того, в каком соотношении находится величина γ с коэффициентами $\{\lambda_j\}$ разложения $p = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$. При этом реализуется одна из следующих возможностей.

(i) при $\gamma/\lambda_1 \approx +\infty$ истинно $\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,\gamma) = X = \mathcal{B}^{\mathrm{w}}(0,\gamma)$, т. е. это вариант, эквивалентный случаю *нулевой цены*;

(ii) при $\gamma/\lambda_k \approx 0$ имеет место $\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,\gamma) = \mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,0)$, т. е. это вариант, эквивалентный случаю *нулевой* трансферабельной стоимости (был рассмотрен выше);

(iii) при $\gamma \in (\lambda_j, \lambda_{j+1})$, причём $\gamma/\lambda_j \approx 0$ и $\gamma/\lambda_{j+1} \approx +\infty$ для некоторого $j = 1,\ldots,k-1$ имеет место $\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,\gamma) = \mathcal{B}^{\mathrm{w}}(\tilde{p},0)$, где $\tilde{p} = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_j e_j$, т. е. это вариант, эквивалентный случаю *нулевой* трансферабельной стоимости и *нового* вектора цен, заданного как сумма первых j слагаемых в разложении вектора p — несущественные слагаемые отбрасываются (структура эквивалентна рассмотренной выше);

(iv) при $\gamma/\lambda_j \not\approx 0$ и $\gamma/\lambda_j \not\approx +\infty$, т. е. когда существует $\mu = \mathrm{st}(\gamma/\lambda_j) > 0$ для некоторого $j = 1,\ldots,k$, имеет место

$$\mathcal{B}^{\mathrm{w}}(p,\gamma) = \{x \in X \mid e_r y = e_r \mathrm{w},\ r < j,\ e_j y \leq e_j \mathrm{w} + \mu\},$$

где все e_r, $r < j$, являются опорными к X либо, альтернативно, бюджетное множество описывается как в случае нулевой трансферабельной стоимости, где первый из *неопорных* функционалов e_t имеет номер *строго* меньший j.

Суммируя сказанное отметим, что нетривиальные трансферабельные стоимости могут появиться только на последнем иерархическом уровне “расслоения агентов на подрынки”, определяемому через нестандартные цены и распределение исходных запасов[7] — так будет всегда, если избыточные стоимости распределяются равномерно среди всех агентов или как-либо иначе, но в стандартных (ненулевых!) пропорциях. Во всех прочих ситуациях — для рынков более высокого уровня — бюджетные множества формируются без каких-либо трансферабельных стоимостей.

В **разделе 1.2** общая теория равновесия с нестандартными ценами применяется для изучения известных классических моделей — это модель рынка (рассмотрена выше), модель Эрроу–Дебре и модель с общественными благами. Здесь мы опустим описание полученных результатов (они достаточно громоздкие), см. основной текст диссертации.

В **разделе 1.3** анализируется вопрос о конечности равновесий с нестандартными ценами в контексте модели рынка. Здесь рассматривается пространство экономик, совпадающее с пространством дважды непрерывно дифференцируемых функций

$$U = C^2(\widetilde{X}, \mathbb{R}^n),$$

определённых на $\widetilde{X}$ — это некоторая открытая окрестность множества $X = \prod_{\mathcal{I}} X_i$. В данном классе экономик потребительские множества X_i и начальные запасы ω_i *фиксированы* для всех $i \in \mathcal{I}$, но варьируются полезности $u = (u_1, \ldots, u_n) \in U$. Анализируется вопрос о числе равновесий с нестандартными ценами, в которых схема перераспределения избыточных стоимостей определяется некоторым фиксированным стандартным вектором $\beta \gg 0$, т. е. избыточные стоимости распределяются в ненулевых стандартных пропорциях. Для краткости такого рода равновесия с нестандартными ценами называются *β-равновесиями*.

С использованием теорем Тома о плотности и открытости трансверсальных сечений доказана теорема о конечности числа равновесий, отвечающих дополнительному требованию невырожденности: найдется такой $i_0 \in \mathcal{I}$, что $x_{i_0} \in \operatorname{int} X_{i_0}$.

Теорема 1.3.1 *Пусть каждое потребительское множество полиэдрально (многогранник) и ограничено снизу. Тогда существует массивное (второй категории, следовательно, всюду плотное) мно-*

[7] Таким образом, если расслоение происходит, то все рынки кроме “самого бедного” (рынка для нищеты!) функционируют без “внеэкономической передачи стоимости” от одних агентов другим.

жество $G \subset U$ такое, что для всякого $u \in G$ множество невырожденных состояний β-равновесия конечно.

Во ***ВТОРОЙ ГЛАВЕ*** проблема существования равновесия анализируется в рамках *бесконечномерной* модели экономики. Именно, предполагается, что пространство продуктов E может быть бесконечномерным и описывается как линейная векторная решётка. На этом пространстве определена некоторая линейная топология τ, а в качестве цен принимается непрерывный линейный функционал. Таким образом, задана дуальная пара *товары–цены* $\langle (E,\tau),(E,\tau)' \rangle$. Дополнительно предполагается:

SA (структурные предположения):

(i) E — линейная векторная решётка (пространство Рисса), оснащённая локально выпуклой хаусдорфовой топологией τ;

(ii) E^+ — замкнутый конус в τ-топологии пространства E;

(iii) $(E,\tau)'$ — подрешётка порядково двойственного к E.

Напомним, что порядково двойственное[8] $(E,\tau)^\sim$ упорядочено по формуле

$$f \geq g \iff f(x) \geq g(x) \quad \forall\, x \in E^+.$$

Для порядково ограниченных функционалов[9] выполнены формулы Рисса–Канторовича:

$$\forall\ x \geq 0,\ x \in E \ \text{ и } \ \forall\, f, g \in (E,\tau)^\sim$$

$$(f \vee g)(x) = \sup\{f(y) + g(z) \mid y + z = x,\ y, z \in E^+\},$$
$$(f \wedge g)(x) = \inf\{f(y) + g(z) \mid y + z = x,\ y, z \in E^+\}.$$

В части согласования порядковой и топологической структур предположение **SA** существенно *слабее* классического требования к топологии быть локально-выпукло-солидной. При **SA**, в частности, решёточные операции $\vee$, $\wedge$ могут не быть непрерывными, что проявляется в ряде содержательных моделей.

[8] Совокупность порядково ограниченных (переводящих порядковые отрезки в ограниченные множества числовой прямой) линейных функционалов над E.

[9] Тем самым, в силу **SA**(*iii*), для непрерывных, что требуется в нашем анализе.

Изучаются модель обмена и модель Эрроу–Дебре

$$\mathcal{E}^{AD} = \langle\ \mathcal{I}, \mathcal{J},\ \langle (E,\tau),(E,\tau)'\rangle, \{X_i, \mathcal{P}_i, \omega_i, \theta_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{Y_j\}_{j\in\mathcal{J}},\ \rangle,$$

где все параметры имеют привычный смысл. Особенности: $\forall\, i \in \mathcal{I}$, $\mathcal{P}_i : \mathcal{X} \Rightarrow X_i$ и классические доходы у потребителей:

$$\alpha_i(p,y) = \langle p, \omega_i\rangle + \sum_{j\in\mathcal{J}} \theta_i^j \langle p, y_j\rangle, \quad p \in (E,\tau)', \quad (x,y) \in \mathcal{X}.$$

Здесь $\theta_i^j \geq 0$ это доля потребителя i в j-м производстве, где Y_j — производственные множества, $j \in \mathcal{J}$.

Определение 2.2.1 *Состояние* $(x,y) \in \mathcal{X}$ *и ценовой функционал* $\pi \in (E,\tau)'$, $\pi \neq 0$ *называется* ***квазиравновесием****, если:*

(i) $\langle \pi, \mathcal{P}_i(x_i)\rangle \geq \pi(x_i) = \pi(\omega_i + \sum_{j\in J} \theta_i^j y_j) \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$*;*

(ii) $\langle \pi, y_j\rangle \geq \langle \pi, Y_j\rangle \quad \forall\, j \in \mathcal{J}$*;*

(iii) $(x,y) \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$*.*

Квазиравновесие ***нетривиальное****, если* $\inf\langle \pi, X_{i_0}\rangle < \pi x_{i_0}$ *для некоторого* $i_0 \in \mathcal{I}$*.*

Квазиравновесие является ***равновесием*** *(вальрасовским или конкурентным), если неравенство в* (i) ***строгое****.*

В **разделе 2.1** обсуждается двойственность товаров и цен, даётся обзор литературы и общая группа модельных предположений:

PA (выпуклость, замкнутость и достижимость)

Множество допустимых состояний $\mathcal{X} = \prod_{\mathcal{I}} X_i \times \prod_{\mathcal{J}} Y_j$ *выпукло, замкнуто* и удовлетворяет $(\omega_1, \ldots, \omega_n, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{X}$.

BA (ограниченность) Множество достижимых состояний

$$\mathcal{A}(\mathcal{X}) = \{(x,y) \in \mathcal{X} \mid \sum x_i = \sum y_j + \sum \omega_i\}$$

компактно в слабой топологии $\sigma(L, L')$.

CA (слабая непрерывность и иррефлексивность)

Для каждого $i \in \mathcal{I}$ отображение $\mathcal{P}_i(.) : \mathcal{X} \Rightarrow X_i$ удовлетворяет *(i)* *полунепрерывность сверху:* для всех $x \in \mathcal{X}$ множество

$$\mathcal{P}_i(x) \ - \ \tau\text{-открыто} \ \text{ в } X_i;$$

(ii) *полунепрерывность снизу:* для всех $y \in X_i$ множество

$$\mathcal{P}_i^{-1}(y) = \{x \in \mathcal{X} \mid y \in \mathcal{P}_i(x)\} \ - \ \sigma(L, L')\text{-открыто} \ \text{ в } \mathcal{X};$$

(iii) *слабая выпуклость и иррефлексивность:* $\forall\, x \in \mathcal{X}$

$$x_i \notin \operatorname{co} \mathcal{P}_i(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+r}).$$

В общем случае этих предположений недостаточно для существования квазиравновесий. Основная причина — потенциальная *пустота внутренности* конуса E^+ положительных элементов. Чтобы разрешить эту проблему, в теории рассматриваются разного рода специфические предположения "правильности" предпочтений и производственных множеств.

Модель экономики называется *линейно-решёточной*, если выполнены все вышеприведённые предположения — **SA**, **PA**, **BA**, **CA**.

Раздел 2.2 посвящён анализу и доказательству теоремы существования в модели рынка в частном случае $X_i = E^+ \ \forall\, i$. Здесь используется следующее понятие правильности.

Определение 2.2.1 *Отношение предпочтения $\mathcal{P}_i(.)$ называется M-правильным в точке $x \in \operatorname{dom}\mathcal{P}_i(.)$, $x = (x_i)_{\mathcal{I}}$ относительно вектора $v_x \in E$, если существует такая τ-окрестность нуля V_x в E, что при любом $\alpha > 0$ имеет место*

$$x_i - \alpha v_x + z \in \operatorname{co} \mathcal{P}_i(x) \quad \Longrightarrow \quad z \notin \alpha V_x.$$

Если вектор v_x и окрестность V_x существуют для каждого $x \in \operatorname{dom}\mathcal{P}_i(.) \cap \mathcal{A}(\mathcal{X})$ и могут быть выбраны независимо от x, то $\mathcal{P}_i(.)$ называется равномерно M-правильным (относительно $v = v_x$).

Правильность предпочтений влечёт существование *непрерывного* линейного функционала, опорного в точке x_i к множеству $\mathcal{P}_i(x)$ (для разных агентов эти функционалы могут быть разными). Равномерная правильность по сути близка к требованию липшицируемости функции полезности[10]. Содержательно понятие правильности

[10]Для дифференцируемой функции градиент меняется в ограниченных пределах, в общем случае — существует непрерывный линейный функционал в пределах некоторого слабо со звездой компактного множества, заданного в двойственном пространстве окрестностью правильности (по теореме Алаоглу).

можно интерпретировать в терминах маргинальных норм замещения и трактовать как наличие *экстремально желательного набора* продуктов, отвечающего вектору v_x, желательного в том смысле, что потеря в количестве αv_x не может быть скомпенсирована дополнительным количеством αz любого другого продуктового набора, в том случае, если z достаточно мало (требование принадлежности z окрестности V_x).

Применяются также дополнительные предположения:

NA (локальная ненасыщаемость) $\forall\, i \in \mathcal{I}$

$$x_i \in \mathrm{cl}(\mathrm{co}\,\mathcal{P}_i(x)), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \quad \forall\, x \in \mathcal{A}(\mathcal{X}).$$

MA (монотонность предпочтений) $\forall\, i \in \mathcal{I}$

$$\mathcal{P}_i(x) + E^+ \subset \mathrm{cl}(\mathrm{co}\,\mathcal{P}_i(x)) \quad \forall\, x \in \mathcal{A}(\mathcal{X}).$$

M-правильной называется модель обмена, удовлетворяющая предположениям **SA**, **PA**, **BA**, **CA**, **NA** и **MA**, и, дополнительно, условию *M-равномерной правильности* относительно вектора совокупных запасов $\omega' = \sum \omega_i$.

Основным результатом раздела является

Теорема 2.2.1 *В M-правильной экономике обмена существуют нетривиальные квазиравновесия.*

Доказательство теоремы обобщает известный в теории подход Негииши на случай непорядковых предпочтений.

Раздел 2.3 посвящён исследованию модели Эрроу–Дебре. В отличии от предыдущего раздела здесь используются более слабые требования поточечной правильности, причём при отсутствии монотонности предпочтений и условия свободного расходования. Точные определения правильности предпочтений и производственных множеств были введены автором в [12] и имеют довольно громоздкий вид. Поэтому ниже мы рассмотрим упрощённую ситуацию.

В работе рассматриваются два типа правильности. Первый из них, так называемая **F-правильность**, грубо говоря означает, что локально множество предпочитаемых потребительских наборов содержит в себе пересечение некоторого *открытого выпуклого* множества V с некоторой подрешёткой пространства продуктов Z, обладающей свойством насыщенности вверх: $Z + E^+ \subset Z$. Для производственных множеств это аналогичное понятие, но при этом подрешётка насыщенна вниз: $Z - E^+ \subset Z$. Во втором типе правильности, названной как **E-правильность**, требуется несколько большего — *локально* должно быть выполнено и обратное включение[11], т. е. фактически требуется, чтобы множество предпочтительных планов (производственное множество) совпадало (допускало представление) с пересечением $Z \cap V$. Множество V и подрешётка Z могут быть различными у разных агентов и, более того, могут различаться в зависимости от текущего состояния экономики, т. е. это всегда *поточечная* правильность.

В диссертации описанные выше понятия правильности применяются в отношении некоторого (порядкового) идеала K пространства продуктов, что требует формального уточнения собственно понятия правильности (см. определения 2.3.1, 2.3.2 диссертации, требуется $Z \subset K$ и насыщенность (вверх или вниз) в пределах K, но при этом для E-правильности используются $Z + E^+$ или $Z - E^+$, соответственно). В доказанных теоремах выбор идеала K (подпространства, содержащего в себе все порядковые отрезки с концами из этого пространства) определяется не только математическими, но и содержательными причинами — именно в пределах этого идеала осуществляется вся “экономическая жизнь”. Например, в модели обмена в качестве этого идеала следует взять идеал, генерированный совокупными начальными запасами — ибо только потребительские наборы между нулем и точкой начальных запасов могут реализоваться в равновесии. Математические свойства “идеала правильности” (он может образовывать замкнутое (редко) или τ-плотное подпространство E, может не быть ни тем ни другим) определяют тот тип правильности, который используется в соответствующей теореме.

Линейно-решёточная модель называется ***F-правильной*** (***E-правильной***) относительно K ***в точке*** (допустимом состоянии) $(x, y) \in \mathcal{X}$, если каждое отношение предпочтения и каждое производственное множество F-правильное (E-правильное) ***относительно*** K в точках x_i, y_j, соответственно, причём дополнительно требуется, чтобы вектора индивидуальных начальных запасов ω_i или нуль (для производства) принадлежали соответствующим решёткам, отвечающим определению правильности. Модель называется ***поточечно правильной***, если она правильная в каждом *достижимом*

[11]Формально нужно взять ещё замыкания.

состоянии (в *каждой* точке $(x, y) \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$).

Для существования *нетривиальных* квазиравновесий — а это основная цель данного фрагмента теории — требование правильности модели нужно несколько усилить. Именно, в текущем допустимом состоянии (x, y) для каждого агента постулируется существование таких "векторов правильности" $v_i, v_j \in K$, что

(i) $x_i + v_i \in V^i \cap Z^i$ & $y_j - v_j \in V^j \cap Z^j$;

(ii) $\omega' - v_i \in \sum_{\mathcal{I}} X_t - \sum_{\mathcal{J}} Y_j$ & $\omega' - v_j \in \sum_{\mathcal{I}} X_i - \sum_{\mathcal{J}} Y_t$;

(iii) множество $\sum_{\mathcal{I}} Z^i \cap E(u^v) - \sum_{\mathcal{J}} Z^j \cap E(u^v)$ ***радиально*** в точке $\omega' = \sum_{\mathcal{I}} \omega_i$ в $E(u^v) \subset K$ — подъидеале идеала K, генерированном точкой[12]

$$u^v = \sum_{\mathcal{I}} |\omega_i| + \sum_{\mathcal{I}} |x_i| + \sum_{\mathcal{I}} |v_i| + \sum_{\mathcal{J}} |y_j| + \sum_{\mathcal{J}} |v_j|.$$

Здесь все множества V_t, Z_t, $t \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ выбраны из определения правильности.

Требования (i), (ii) имеют очевидный экономический смысл допустимости "желательных" продуктовых наборов v_i и v_j — для каждого потребителя (производителя) найдётся в экономике такой продуктовый набор v_i из идеала K (технологический план v_j), который этот потребитель способен и хотел бы дополнительно потребить (мог бы дополнительно затратить в производстве). При этом, например, левое соотношение в (ii) говорит о том, что экономика потенциально допускает "изъятие" вектора v_i из совокупных ресурсов, т. е. существуют сбалансированные производственная и потребительская программы, совместимые с ресурсами $\sum_{t \in \mathcal{I}} \omega_t - v_i$. Аналогично для производственного сектора (правая часть в (ii)).

Предположение (iii) труднее интерпретировать. Здесь идеал $E(u^v)$ это то "минимальное" подпространство пространства продуктов, в рамках которого возможно совместное функционирование указанных объектов — начальных запасов, текущих производственных и потребительских планов, а также векторов правильности. Требуется, чтобы вектор начальных запасов ω', который уже по свойству правильности принадлежит множеству $\sum_{\mathcal{I}} Z^i \cap E(u^v) - \sum_{\mathcal{J}} Z^j \cap E(u^v)$, не покидал пределов этого множества при малом смещении точки ω' вдоль любого луча из $E(u^v)$. В каком-то смысле это означает, что, при сужении потребительских и производственных множеств

[12]Это минимальный по включению идеал, включающий в себя эту точку.

до решеток правильности и на идеал $E(u^v)$, не отбрасывается ничего экономически существенного. В диссертации показано (лемма 2.3.4), что требование (iii) будет выполнено, если $\omega' > 0$ и, например, ω' это *общий* вектор правильности для *всех* агентов.

Перейдём к описанию собственно полученных результатов. Следующая теорема утверждает, что любое достижимое состояние, будучи поддержано (децентрализовано) на идеале K некоторым *линейным* над K функционалом, также может быть поддержано в E *непрерывным* на (E, τ) функционалом (ценами), если модель $\mathcal{E}^{AD}$ является E-правильной относительно K.

Теорема 2.3.1 *Пусть $K \subseteq E$ — порядковый идеал и пусть (x, y, p) — квазиравновесие в модели $\mathcal{E}^{AD}_{|_K}$ с ценами $p \in K^*$ — алгебраически двойственного к K. Пусть $\mathcal{E}^{AD}$ является E-правильной относительно K и, дополнительно, либо*

(i) существует такой $i_0 \in \mathcal{I}$, что $px'_{i_0} < px_{i_0}$ при некотором $x'_{i_0} \in X_{i_0} \cap Z^{i_0}$ либо, альтернативно,

(ii) $\mathcal{E}^{AD}$ — нетривиально-E-правильная относительно K в точке (x, y), причём $p_{|_{E(u^v)}} \neq 0$, где $E(u^v)$ — подъидеал идеала K, генерированный точкой u^v.

Тогда существует $\pi \in (E, \tau)'$ такой, что (x, y, π) — нетривиальное квазиравновесие.

В контексте модели экономики наиболее интересными являются идеалы, генерированные в E элементами

$$u = \sum_{i \in \mathcal{I}} |\omega_i| + \sum_{i \in \mathcal{I}} |x_i| + \sum_{i \in \mathcal{J}} |y_j| \quad \& \quad \bar{\omega} = \sum_{i \in \mathcal{I}} |\omega_i|.$$

Пусть $K = E(u) = \{x \in E \mid \exists \lambda > 0, |x| \leq \lambda u\}$[13].

Переходом к анализу распределений из ядра в репликах модели (равновесия по Эджворту) доказана

Теорема 2.3.4 *Каждая* ***поточечно*** *нетривиально-E-правильная экономика относительно $E(u)$ имеет нетривиальное квазиравновесие с τ-непрерывными ценами.*

Заметьте, что свойство поточечной нетривиальной-E-правильности $\mathcal{E}^{AD}$ относительно $K = E$ является слабейшим

[13] Заметьте, что в таком случае из определений $E(u) = E(u^v)$.

видом нетривиальной-E-правильности. Поэтому результат предыдущей теоремы существенно усиливает следующая

Теорема 2.3.5 *Каждая* ***поточечно*** *нетривиально-E-правильная экономика относительно порядкового идеала $K \subseteq E$ имеет нетривиальное квазиравновесие с τ-непрерывными ценами.*

Далее обратимся к случаю τ-плотного идеала правильности K для F-правильной модели. Использовать плотность K можно при наличии эффективных условий, обеспечивающих плотность множеств $K \cap X_i$ и $K \cap Y_j$ в X_i и Y_j, соответственно. Описанные в следующей теореме множества обладают этим свойством, что следует из плотности $K \cap E^+$ в E^+. В качестве идеала в теореме выбирается идеал $E(\bar{\omega})$, генерированный точкой $\bar{\omega} \in E$.

Теорема 2.3.7 *Пусть*

(i) $X_i = (\{a_i\} + E^+) \cap U_i$, *при* $a_i \in E(\bar{\omega})$ *и выпуклых, τ-замкнутых* U_i, *таких, что* $\mathrm{int} U_i \cap (\{a_i\} + E^+) \neq \emptyset \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$,

(ii) $Y_j = (\{b_j\} - E^+) \cap U_j$, *при* $b_j \in E(\bar{\omega})$ *и выпуклых, τ-замкнутых* U_j, *таких, что* $\mathrm{int} U_j \cap (\{b_j\} + E^+) \neq \emptyset \quad \forall\, j \in \mathcal{J}$.

Тогда $\mathcal{A}(\mathcal{X}) = \mathcal{A}(\mathcal{X}_{|_{E(\bar{\omega})}})$ *и, если* $\mathcal{E}^{AD}$ *является F-правильной относительно* $E(\bar{\omega})$, *а идеал* $E(\bar{\omega})$ *является τ-**плотным** в E, то* $\mathcal{E}^{AD}$ *обладает квазиравновесием* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\pi})$ *с ценами* $\bar{\pi} \in (E, \tau)'$.

Более того, если $\mathcal{E}^{AD}$ *дополнительно является нетривиально-F-правильной относительно* $E(\bar{\omega})$, *то она обладает нетривиальным квазиравновесием с τ-непрерывными ценами.*

В **разделе 2.4** исследуется модель экономики с перекрывающимися поколениями экономических агентов — OLG-экономика, заданная параметрами

$$\mathcal{E}^{OLG} = \langle\, \mathcal{I},\ T,\ \{\langle E_t, E_t' \rangle\}_{t \in T},\ \{\mathcal{P}_i, \omega_i, T_i\}_{i \in \mathcal{I}}\, \rangle.$$

Содержательно, это модель экономики обмена бесконечно живущей популяции агентов. Здесь $\mathcal{I} = \{1, 2, ..., i, ...\}$ — экономические агенты, $T = \{1, 2, ..., t, ...\}$ — периоды жизни экономики, $\langle E_t, E_t' \rangle$ — дуальная пара товары-цены. Цены для каждого временного периода выбираются из *топологически двойственного* $E_t' = (E_t, \tau_t)'$ к E_t. Кроме того, для каждого $i \in \mathcal{I}$ определены: $T_i \subset T$ — периоды жизни агента i, $|T_i| < +\infty$, потребительское множество $X_i = \prod_{T_i} E_t^+ \subset L_i = \prod_{T_i} E_t$, предпочтения $\mathcal{P}_i : X_i \Rightarrow X_i$ и $\omega_i = (\omega_i^t)_{t\in T}$, $\omega_i^t \in E_t^+$ — исходные запасы.

OLG-модель рассматривается в рамках структурных предположений **SA**, выполненных для $\langle E_t, E_t'\rangle$ и $\forall\, t \in T$. Дополнительно накладываются специфические модельные предположения, отвечающие содержательной стороне вопроса и позволяющие корректно определить прочие параметры модели.

SF (структурная OLG-конечность):

(i) для каждого $t \in T$ множество живущих в этом периоде агентов конечно и непусто,

(ii) для каждого $t \in T$ множество агентов-собственников в этом периоде конечно и непусто.

Распределение (достижимое состояние) это последовательность $(x_i)_{\mathcal{I}}$, $x_i \in X_i$, $i \in \mathcal{I}$, такая, что $\sum_{i:t\in T_i} x_i^t = \sum_{\mathcal{I}} \omega_i^t = \bar{\omega}^t$. Как и ранее $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ это совокупность всех распределений и $\bar{\omega} = (\bar{\omega}^t)_T = \sum \omega_i$.

OLG-ценой называется последовательность $p = (p^t)_{t\in T}$ *положительных линейных непрерывных* функционалов $p^t \in (E_t, \tau_t)'$. Пусть

$$\langle p, x\rangle = \sup_{S\subset T,\ |S|<+\infty} \sum_{t\in S} p^t x^t,\ x = (x^t)_T \geq 0, \quad \langle p, x_i\rangle = \sum_{t\in T_i} p^t x_i^t.$$

Определение 2.4.1 *Пара (x, p) называется **компенсированным** равновесием, если $p = (p^t)_{t\in T}$ — OLG-ценовой функционал, $x \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$ и имеет место*

$$\langle \mathcal{P}_i(x_i), p\rangle > \langle p, x_i\rangle \geq \langle p, \omega_i\rangle$$

для каждого $i \in \mathcal{I}$.

*Компенсированное равновесие называется **равновесием**, если неравенства $\langle p, x_i\rangle \geq \langle p, \omega_i\rangle$ обращаются в равенства для всех $i \in \mathcal{I}$.*

Далее перейдём к определению понятия равновесия с нестандартными ценами. Для этого прежде всего нужно уточнить собственно понятие нестандартной OLG-цены. Пусть $p = (p^t)_{t\in {}^*T}$ — *внутренняя* последовательность *положительных* нестандартных $p^t \in {}^*(E_t')$, $t \in {}^*T$. Назовём p *нестандартными ценами*, если дополнительно

$$\forall\, t \in T \ \ \exists\, f^t \in E_t', f^t \neq 0 : p^t(y) \approx f^t(y) \ \ \forall\, y \in E_t, \ \ \&$$

$$p\omega_i < +\infty \quad \forall\, i \in \mathcal{I}.$$

Отметим, что первое из этих условий эквивалентно существованию стандартной части функционала p_t в *слабой со звездой* топологии, определяемой двойственностью $\langle E_t, E'_t \rangle$ товаров и цен. Для заданной нестандартной OLG-цены π положим $\bar{\pi} = (\mathrm{st}(\pi^t))_{t\in T}$.

Определение 2.4.2 *Пара (x,π) называется равновесием с нестандартными ценами, если $\pi \geq 0$ —* ***нестандартная*** *OLG-цена, $x \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$ и существуют бесконечные $t_i \in {}^*T \setminus T$, $i \in \mathcal{I}$ такие, что*

$$\langle \bar{\pi}, \mathcal{P}_i(x_i) \rangle > \langle \bar{\pi}, x_i \rangle = \langle \bar{\pi}, \omega_i \rangle + \mathrm{st}(\sum_{t \geq t_i} \pi^t \omega_i^t)$$

для каждого $i \in \mathcal{I}$. Более того, для каждого $k \in {}^*T \setminus T$ и $i \in \mathcal{I}$, если $k < t_i$, то $\mathrm{st}(\sum_{t=k}^{t=t_i} \pi^t \omega_i^t) = 0$.

Легко видеть, что OLG-равновесие с нестандартными ценами является равновесием в обычном смысле, если запасы потребителей имеют конечный носитель. Кроме того, альтернативно, это будет так (доказано), если найдётся такая *конечная* группа агентов $S \subset \mathcal{I}$, что $\sum_S \omega_i \geq \alpha \bar{\omega}$ при некотором действительном $\alpha > 0$.

Рассмотрим далее другие предположения. Модель $\mathcal{E}^{OLG}$ называется *линейно-решёточной*, если выполнены предположения **SA**, **SF**, **BA** и **CA**. При этом **BA** $\iff \forall\, t \in T, \quad [0, \bar{\omega}_t]$ — компакт в *слабой* топологии $\sigma(E_t, E'_t)$. Дополнительно требуется:

OGr (открытость графика) Для каждого $i \in \mathcal{I}$ предпочтение $\mathcal{P}_i : X_i \rightrightarrows X_i$ имеет $\sigma(L_i, L'_i)$-открытый график в $X_i \times X_i$.

Используется предположение **MA** (монотонность) и также:

SM (OLG-монотонность) Для каждого $i \in \mathcal{I}$ и любых $x, y \in L_i$ если $x \geq y$, то $\mathcal{P}_i(x) \subseteq \mathcal{P}_i(y)$.

Для существования равновесий с нестандартными ценами требуются дополнительные предположения. В первую очередь постулируем нередуцируемость модели:

IR (нередуцируемость) Если $x = (x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ достижимое распределение и $I \subset \mathcal{I}$ некоторое *собственное* непустое подмножество в $\mathcal{I}$, то найдутся такие $i \in I$ и $y \in \prod_{t\in T_i} E_t^+$, что $y \leq \sum_{j\in\mathcal{I}\setminus I} \omega_j$ и при этом $x_i + y \in \mathcal{P}_i(x_i)$.

Дополнительно несколько усилим требование локальной ненасыщаемости предпочтений (в обычном смысле, в силу **MA**, она уже имеется). Именно, требуется локальная ненасыщаемость в каждом из временных периодов, в котором пространство продуктов бесконечномерно[14].

PN (по-периодная ненасыщаемость) Если для некоторого $i \in \mathcal{I}$ и $t \in T_i$ пространство E_t бесконечномерно, то $\mathcal{P}_i$ является τ_t-локально ненасыщаемым на $[0, \bar{\omega}^t] \subset E_t^+$.

Основной результат установлен при условии *равномерной* M-$\bar{\omega}$-*правильности*, определение которой было дано выше. Нужно только помнить, все объекты (вектора и окрестность) должны выбираться из пространства L_i, на котором собственно и определены предпочтения i-го потребителя. Таким образом, предполагается, что совокупные запасы $\bar{\omega} = \sum \omega_i$ *экстремально желательны* на $[0, \bar{\omega}_{|L_i}]$ для каждого i.

Линейно-решеточную $\mathcal{E}^{OLG}$ назовём M-*правильной*, если она удовлетворяет данному свойству, а также прочим: **NA**, **MA**, **SM**, **OGr**, **PN** и **IR**, (& **SA**, **SF**, **BA**, **CA**).

Основным результатом раздела является

Теорема 2.4.1 *Если $\mathcal{E}^{OLG}$ является M-$\bar{\omega}$-правильной моделью, то равновесия с нестандартными ценами существуют.*

ТРЕТЬЯ ГЛАВА посвящена исследованию неполных рынков. Модели этого типа являются обобщением классической модели обмена. В их рамках моделируется в специфической форме финансовый сектор реальной экономики, функционирующий при неопределённости будущего и множественности бюджетных ограничений.

В **разделе 3.1** исследуется базовая двустадийная модель неполного рынка, в которой $t = 0$ — "сегодня" и $t = 1$ — "завтра". Будущее реализуется в s состояниях природы. Положим $\sigma = 0, 1, \ldots, s$ — все возможные состояния, где $\sigma = 0 = t$ — настоящее. Пусть $\mathbb{R}^l = E$ — пространство продуктов, $l = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=s} l_\sigma$, где l_σ — число продуктов в состоянии σ. Кроме рынков обычных продуктов, моделируемых стан-

[14] Рассмотрение только периодов с бесконечномерным пространством продуктов связано со свойствами скалярного (внутреннего) произведения, которое в этом случае является непрерывным только по одному аргументу и разрывно по обоим. Заметьте, что по-периодная ненасыщаемость вообще говоря не следует из (просто) локальной ненасыщаемости.

дартным образом, для $\sigma = 0$ существует рынок финансовых "активов" (assets), всего их k штук. Пусть q_j — цена на актив j, тогда $q = (q_1, q_2, \dots, q_k)$ — полный вектор цен на активы. Определим

$$\Pi = \{\pi = (p, q) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k \mid \forall \sigma \quad \|p_\sigma\| \le 1, \ \|q\| \le 1\}$$

— совокупность цен на обычные продукты и активы. Задано

$$\mathcal{A}(\cdot) = [a_j(\cdot)]_{j=1,\dots,k}, \quad a_j : \Pi \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^s,$$

где $a_j(\pi, x)$ — *вектор* выплат ($+$ или $-$) актива j в будущих состояниях при *покупке* актива в *единичном* объеме. Пусть $z = (z^1, \dots, z^k)$ — торговая программа (портфель) активов. Тогда изменение стоимости среди состояний мира определяется оператором:

$$\Lambda \cdot z = z^1 \begin{bmatrix} -q_1 \\ a_1 \end{bmatrix} + \dots + z^k \begin{bmatrix} -q_k \\ a_k \end{bmatrix}, \ \Lambda = [\lambda_j]_{j=1}^{j=k} = \begin{pmatrix} -q \\ \mathcal{A}(\pi, x) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ — множество всех агентов. Для $i \in \mathcal{I}$ пусть $Z_i \subset \mathbb{R}^k$ — допустимые торговые портфели на активы, и $X_i = \prod_{\sigma=0}^{\sigma=s} X_i^\sigma$ — потребительское множество, где $X_i^\sigma \subset \mathbb{R}^{l_\sigma}$. Положим $\mathcal{X} = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ — это допустимые состояния экономики. Потребитель i также описывается отношением предпочтения $\mathcal{P}_i : \mathcal{X} \Rightarrow X_i$ и вектор-функцией доходов $\alpha_i(\cdot) = (\alpha_i^\sigma(\cdot))_{\sigma=0}^{\sigma=s}, \quad \alpha_i^\sigma : \Pi \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Бюджетные ограничения задаются *векторными* неравенствами:

$$\mathrm{P} x_i \le \alpha_i(\bar{x}, \pi) + \Lambda z_i, \quad x_i \in X_i, \quad z_i \in Z_i,$$

где

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} p_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_s \end{bmatrix}.$$

В теории принято обозначение $p \,\square\, x' = (p_\sigma x'_\sigma)_{\sigma=0}^{\sigma=s} = \mathrm{P} x', \ x' \in \mathbb{R}^l$. В модели также задан вектор совокупных исходных запасов $\bar{\omega} \in E$. Таким образом, в краткой форме неполный рынок это

$$\mathcal{E}^{in} = \langle \mathcal{I}, E, \{Z_i, X_i, \mathcal{P}_i, \alpha_i(.)\}_{i \in \mathcal{I}}, \bar{\omega}, \mathcal{A}(.) \rangle.$$

Бюджетное множество агента i:

$$B_i^Z(p, q, x) = \{\, x'_i \in X_i \mid \exists\, z_i \in Z_i : \quad p \,\square\, x'_i \le \alpha_i(p, x) + \Lambda(p, q, x) z_i \,\}.$$

Определение 3.1.1 *Финансовое Z-равновесие это пара допустимых действий и цен $\big((\bar{x}_i, \bar{z}_i)_{i\in\mathcal{I}}, (\bar{p}, \bar{q})\big) \in \mathcal{X} \times Z \times \Pi$, удовлетворяющая условиям*

(i) $\bar{p} \,\Box\, \bar{x}_i \leq \alpha_i(\bar{p}, \bar{x}) + \Lambda(\bar{p}, \bar{q}, \bar{x})\bar{z}_i \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$*;*

(ii) $\mathcal{P}_i(\bar{x}_i) \bigcap B_i^Z(\bar{p}, \bar{q}, \bar{x}) = \emptyset \quad \forall\, i \in \mathcal{I}$*;*

(iii) $\sum_{i\in\mathcal{I}} \bar{x}_i = \bar{\omega}$ & $\sum_{i\in\mathcal{I}} \bar{z}_i = 0$.

GEI-равновесием называется Z-равновесие при $Z_i = \mathbb{R}^k$ для каждого $i \in \mathcal{I}$.

Для экономической теории наиболее интересны *GEI*-равновесия, однако при обычных предположениях и условии Слейтера они могут не существовать. Основная причина состоит в возможном *вырождении* матрицы финансовых отдач, которая может иметь переменный ранг при разных ценах, что влечёт разрывность спроса. Чтобы разрешить проблему отсутствия равновесия, автором диссертации вводится новое понятие **C**-равновесия.

В концепции **C**-равновесия бюджетное ограничение трансформируется к виду

$$\mathrm{P}x \leq \alpha_i(\pi, x) + u_i, \quad u_i \in L_\pi + \mathbf{C}, \quad L_\pi = \Lambda(x, \pi)[\mathbb{R}^k],$$

где $\mathbf{C} \subset \mathbb{R}^{s+1}$ (некоторое) выпуклое замкнутое множество. Выпуклое замкнутое множество $\mathbf{C}$ называется *эффективным* относительно пары (x, π), если

$$\dim(L_\pi + \mathbf{C}) \leq k.$$

Новое бюджетное множество агента i это:

$$B_i^{\mathbf{C}}(x, p) := \{x'_i \in X_i \mid \exists\, u'_i \in L_\pi + \mathbf{C} \,:\, \mathrm{P}x'_i \leq \alpha_i(\pi, x) + u'_i\}.$$

Определение 3.1.3 *Четверка $(x, z, \pi, \mathbf{C})$, где $x \in \mathcal{X}$, $z \in (\mathbb{R}^k)^{\mathcal{I}}$, $\pi \in \Pi$, называется $\mathbf{C}$-равновесием, если $\mathbf{C}$ — **эффективное** множество и найдутся такие $d_i \in \mathbf{C}$, $i \in \mathcal{I}$, что выполнены условия*

(i) финанс. достижимости, — $\mathrm{P}x_i \leq \alpha_i(\pi, x) + \Lambda(\pi, x)z_i + d_i$, $i \in \mathcal{I}$,

(ii) рациональности, — $\mathcal{P}_i(x) \bigcap B_i^{\mathbf{C}}(\pi, x) = \emptyset, \quad i \in \mathcal{I}$

(iii) и баланса, — $\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i = \bar{\omega}, \quad \sum_{i\in\mathcal{I}} z_i = 0, \quad \sum_{i\in\mathcal{I}} d_i = 0.$

В исследовании вводится также понятие *обобщенного* равновесия, которое отличается от **C**-равновесия только тем, что множество **C** имеет специфический полиэдральный вид, его элементы можно интерпретировать как отдачи от *компенсирующих активов*. Их число равно $k - \mathrm{dim} L_\pi$ и торговля по ним допускает возможность ограничений на объемы продаж. При отсутствии ограничений на торговлю обобщенное равновесие совпадает с *псевдоравновесием* — использованная ранее в теории концепция. Математически обобщённое равновесие появляется как предел равновесий Раднера, в которых торговля активами ограничена, при условии ослабления ограничений до бесконечности. Последнее интерпретируется как результат регулирующего воздействия государства на финансовый рынок.

Для неполного рынка принимаются данные в первой главе предположения **A1**, **A2** — компактность достижимых распределений, **A3′** — открытость графика предпочтений, **A4** — выпуклая иррефлексивность предпочтений, **A5** — непрерывность доходов ($\alpha_i(.)$ и $\mathcal{A}(\cdot)$). Дополнительно:

A6$^{\mathbf{in}}$ (закон Вальраса) Для $\forall\, x \in \mathcal{X}$, $\forall\, \pi = (p, q) \in \Pi$ выполняется $\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i(x, p, q) = p \,\Box\, \bar{\omega}$.

A7$^{\mathbf{s}}$ (условие Слейтера) Для $\forall\, \sigma = 0, \ldots, s$ существуют компактные $M_\sigma \subset \mathbb{R}^{l_\sigma}$ такие, что $\forall\, \pi = (p_0, \ldots, p_s, q) \in \Pi$, $\forall\, x \in \mathcal{X}$ & $\forall\, i \in \mathcal{I}$, если $p_\sigma \neq 0$ для некоторого σ, то

$$\inf \langle p_\sigma, X_i^\sigma \cap M_\sigma \rangle \; < \alpha_i^\sigma(x, \pi).$$

Рынок $\mathcal{E}^{in}$ называется *локально ненасыщаемым на (спотовом) рынке* $\sigma = 0, \ldots, s$, если снижения всех предпочтений на подпространство (полного) пространства (контингентных) продуктов, отвечающее данному рынку (рынкам) локально ненасыщаемы (относительно любых достижимых фиксированных потребительских наборов на всех остальных рынках).

Основным результатом раздела является

Теорема 3.1.1 *Если* $\mathcal{E}^{in}$ *удовлетворяет* **A1**–**A7$^{\mathbf{s}}$** *и, дополнительно, каждый из спотовых рынков* $\sigma = 0, \ldots, s$ *ненасыщаемый, то* ***обобщенное*** *равновесие существует.*

В **разделе 3.2** исследуется предложенная автором модель динамического неполного рынка, заданного на бесконечном, уходящем в будущее, дереве событий со счётно-бесконечным множеством агентов, представляющем перекрывающиеся поколения.

Структура модели включает в себя *дерево событий*: это любой бесконечный граф $G = (N, \varphi)$, заданный отображением $\varphi : N \to N$ (сопоставляет вершине предшествующую вершину), которое удовлетворяет условиям:

(i) существует единственная "начальная" вершина σ^0 такая, что $\varphi(\sigma^0) = \sigma^0$;

(ii) для каждого $\sigma \in N$ найдется натуральное t такое, что $\varphi^t(\sigma) = \sigma^0$;

(iii) $|\varphi^{-1}(\sigma)| < +\infty$ для каждого $\sigma \in N$.

Каждому событию $\sigma \in N$ сопоставляются: $\mathbb{R}^{l_\sigma}$ — пространство продуктов, $p_\sigma = (p_\sigma^1, \ldots, p_\sigma^{l_\sigma}) \geq 0$ — вектор рыночных цен, $p = (p_\sigma)_{\sigma \in N}$.

Счетно-бесконечное множество $\mathcal{I}$ задаёт совокупность агентов, причём каждому $i \in \mathcal{I}$ сопоставляется *конечное* поддерево дерева событий $G_i = (N_i, \varphi_i)$. Дереву G_i соответствует единственная начальная вершина (корень) $\sigma_i \in N$, называемая "моментом рождения" агента i. Здесь отображение $\varphi_i : N_i \to N_i$ совпадает с φ для всех $\sigma \in N_i \setminus \{\sigma_i\}$. Предполагается, что в каждом событии кто-то живёт. Каждый агент также описывается отношением (строгого) предпочтения $\mathcal{P}_i$, заданном на некотором "прямоугольном" (по событиям из N_i) потребительском множестве X_i — подмножество соответствующего произведения пространств продуктов (по событиям из N_i). Кроме того, как обычно, имеются начальные запасы — это семейство неотрицательных векторов $\omega_i = (\omega_i^\sigma)_{\sigma \in N}$ таких, что

$$\operatorname{supp}(\omega_i) \subset N(\sigma_i) = \{m \in N \mid \exists\, t \geq 0 : \ \varphi^t(m) = \sigma_i\}.$$

Последнее означает, что агенты могут обладать ресурсами только в пределах поддерева событий с начальной вершиной в момент рождения агента (после его рождения).

В модели имеется не более чем счетное множество K активов, причём каждому k сопоставляется $\sigma_k \in N$ — момент появления (торговли) актива k на рынке ("момент рождения").

Пусть $\mathcal{I}_\sigma = \{i \in \mathcal{I} \mid \sigma \in N_i\}$ — множество живущих в событии σ агентов и $K_\sigma = \{k \in K \mid \sigma_k = \sigma\}$ — множество активов, торгуемых в момент σ. Предполагается, что $|\mathcal{I}_\sigma| < +\infty$, $|K_\sigma| < +\infty \ \forall\, \sigma \in N$.

Актив k обещает отдачи $a_k^\sigma \geq 0$ в виде *материальных благ* в будущих, по отношению к моменту рождения σ_k, событиях, т. е. это *реальный* актив k, отождествляемый с набором $a_k = (a_k^\sigma)_{\sigma \in N(\sigma_k)}$, $a_k^\sigma \in \mathbb{R}_+^{l_\sigma}$, $\sigma \in N(\sigma_k)$, причём

$$a_k^\sigma \neq 0 \Rightarrow \exists\, t: \ \varphi^t(\sigma) = \sigma_k \iff \mathrm{supp}(a_k) = \{\sigma \in N \mid a_k^\sigma \neq 0\} \subset N(\sigma_k).$$

Активы продаются в момент рождения по ценам $q_k \geq 0$, $q = (q_k)_{k \in K}$. Агент i торгует актив k в объемах z_i^k, формируя *портфель заказов*:

$$z_i = (z_i^k)_{k \in A_i},\ A_i = \{\, k \in K \mid \sigma_k \in N_i \,\}.$$

Доходы агента i в событии $\sigma \in N(\sigma_i)$ формируются из трёх источников.

(1) *Из торговли активами*; это активы, торгуемые в *предшествующих* σ событиях, они дают доход $\sum_{k \in A_i^\sigma} z_i^k \langle p_\sigma, a_k^\sigma \rangle$, где $A_i^\sigma = \{k \in A_i \mid \exists\, t > 0 : \ \varphi^t(\sigma) = \sigma_k\}$ и активы, торгуемые в *данном* событии, они дают: $-\sum_{k:\sigma_k = \sigma,\, \sigma \in A_i} q_k \cdot z_i^k$.

В итоге от торговли активами агент получает

$$d_i^\sigma = d_i^\sigma(\pi, z_i) = \sum_{k \in A_i^\sigma} z_i^k \cdot \langle p_\sigma, a_k^\sigma \rangle - \sum_{k:\sigma_k = \sigma, \sigma \in A_i} q_k \cdot z_i^k.$$

(2) *От запасов*; доход составляет $\langle p_\sigma, \omega_i^\sigma \rangle$.

(3) *По наследству* от агентов, умерших по отношению к текущему событию σ, в соответствии с заданным правилом наследования.

Механизм наследования стоимостей. Цепь ребер (вершин) дерева событий G, соединяющая (однозначно!) событие σ с начальной вершиной σ_0, по определению это

$$\varphi^\infty(\sigma) = \{\sigma' \in N \ \mid \ \exists\, t \geq 0 \ : \ \varphi^t(\sigma) = \sigma'\},$$

называется *предысторией события* σ. Для каждого агента i в предыстории события можно определить (конечное) множество агентов-*предшественников*. Данный агент может *наследовать* неизрасходованные предшественниками стоимости. Пусть $r_j^\sigma \geq 0$ — остаточная стоимость агента j в событии σ. Пусть $\mathcal{I}_i^\sigma = \{j \in \mathcal{I} \mid i \text{ наследник } j\}$. Положим

$$\mathcal{R}_i^\sigma = (r_j^\sigma)_{j \in \mathcal{I}_i^\sigma}$$

— совокупность *остаточных стоимостей* агентов-предшественников агента i. Агент i *унаследует* стоимость $h_i^\sigma(p, \mathcal{R}_i)$, определяемую рекурсивным образом, которая удовлетворяет требованию

$$0 \le h_i^\sigma(p, \mathcal{R}_i) \le \sum_{j \in \mathcal{I}_i^\sigma} r_j^\sigma.$$

Эта стоимость может быть им израсходована для собственного потребления, покупки активов или передана наследникам.

Итак, *доход агента* i в событии σ это:

$$\alpha_i^\sigma = \langle p_\sigma, \omega_i^\sigma \rangle + h_i^\sigma(p, \mathcal{R}_i) + d_i^\sigma(\pi, z_i).$$

Агент i определяет свой потребительский план $x_i^\sigma \in X_i^\sigma$, для $\sigma \in N_i$ (при жизни) при ограничении

$$\langle p_\sigma, x_i^\sigma \rangle \le \langle p_\sigma, \omega_i^\sigma \rangle + h_i^\sigma(p, \mathcal{R}_i) + d_i^\sigma(\pi, z_i).$$

Если событие происходит *после* его *смерти*, то он *ничего не может потребить*, однако *не может и делать долги* (т. е. “качать ресурсы из будущего”). Поэтому его стратегический выбор должен удовлетворять

$$0 \le \langle p_\sigma, \omega_i^\sigma \rangle + h_i^\sigma(p, \mathcal{R}_i) + d_i^\sigma(\pi, z_i) = r_i^\sigma \quad \forall \sigma \notin N_i.$$

Заметьте, что в правой части неравенства стоит, по определению, остаточная стоимость агента в состоянии σ.

Множество всех пар (x_i, z_i), $x_i \in X_i$, удовлетворяющих этим условиям, образует множество $B_i^z(\pi, z_{-i})$, $z_{-i} = (z_j)_{j \in \mathcal{I}, j \ne i}$, проекция которого на X_i, это

$$B_i(\pi) = \{\, x_i \in X_i \mid \ \exists\, z_i \in \mathbb{R}^{K_i} \ : \ (x_i, z_i) \in B_i^z(\pi, z_i) \,\},$$

и является бюджетным множеством агента i.

Определение 3.2.1 *Четверка* $x = (x_i)_{\mathcal{I}}$, $z = (z_i)_{\mathcal{I}}$, $p = (p_\sigma)_N$, $q = (q_k)_K$ *называется состоянием равновесия, если выполняются условия:*

(i) *достижимость,* — $(x_i, z_i) \in B_i^z\ (\pi, z_{-i})$, $\quad i \in \mathcal{I}$,

(ii) *рациональность,* — $\mathcal{P}_i(x_i) \bigcap B_i(\pi) = \emptyset$, $\quad i \in \mathcal{I}$,

(iii) *баланс планов и торговых программ,* —

$$\sum_{i: \sigma \in N_i} x_i^\sigma = \sum_{j \in \mathcal{I}} \omega_j^\sigma, \quad \sigma \in N, \quad \sum_{i: k \in A_i} z_i^k = 0, \quad k \in K.$$

Равновесия этого вида могут не существовать при обычных модельных предположениях по тем же причинам, что и равновесия в базовой модели неполного рынка. Рассмотрим далее концепцию **C**-равновесия.

Пусть $S \subset N$ — *конечное поддерево* дерева G, и пусть $K_S = \{k \in K \mid \sigma_k \in S\}$ — активы, торгуемые в событиях из S. Пусть $T_S \subset N$ — события, в которых активы из K_S имеют ненулевые отдачи, а также события, в которых они торгуются: $T_S = S \cup \{\sigma \in N \mid \sigma \in \mathrm{supp}(a_k),\ \sigma_k \in S\}$. Обозначим $\lambda_k(\pi) = (\lambda_k^\sigma(\pi))_{\sigma \in T_S}$ вектор стоимостных отдач, генерируемых активом $k \in K_S$, где

$$\lambda_k^{\sigma_k}(\pi) = -q_k, \quad \lambda_k^\sigma(\pi) = \langle a_k^\sigma, p_\sigma \rangle, \quad \sigma \neq \sigma_k.$$

Пусть $L_S \subset \mathbb{R}^{T_S}$ — подпространство, определённое как *линейная оболочка векторов стоимостных отдач* для активов из S.

Семейству Ω всех *конечных поддеревьев* дерева событий ставится в соответствие семейство $\mathbf{C} = \{C_S\}_{S \in \Omega}$ *выпуклых замкнутых подмножеств* $C_S \subset \mathbb{R}^N$, удовлетворяющее условиям:

$$L_S \subset C_S, \quad \dim C_S \leq |K_S|, \tag{2}$$

$$d_S = (d_S^\sigma)_{\sigma \in N} \in C_S \implies d_S^\sigma = 0 \ \ \forall\, \sigma \notin \cup_{k \in K_S} \mathrm{supp}_k \cup S, \tag{3}$$

$$S_1 \subset S_2 \implies C_{S_1} \subset C_{S_2}, \tag{4}$$

$$K_{S_1} = K_{S_2} \implies C_{S_1} = C_{S_2}. \tag{5}$$

Положим $\mathrm{P}y = (p_\sigma y^\sigma)_{\sigma \in N}$, $y = (y^\sigma)_N$, $y^\sigma \in \mathbb{R}^{l_\sigma}$.

Определение 3.2.2 *Пятерка* $x = (x_i)_\mathcal{I}$, $d = (d_i)_\mathcal{I}$, $p = (p_\sigma)_N$, $q = (q_k)_K$, $\mathbf{C} = (C_S)_{S \in \Omega}$ *называется* **C**-*равновесием, если* **C** *удовлетворяет* (2) – (5) *и выполнено*:

(i) *достижимость, —*

$$\mathrm{P}x_i \leq \mathrm{P}\omega_i + h_i(p, \mathcal{R}_i) + d_i,\ x_i \in X_i, \quad d_i \in C_{N_i},\ i \in \mathcal{I},$$

(ii) *рациональность, —* $\mathcal{P}_i(x_i) \bigcap B_i^C(p, d_{-i}) = \emptyset, \quad i \in \mathcal{I}$,

(iii) *баланс планов и стоимостных портфелей, —*

$$\sum_\mathcal{I} x_i = \sum_\mathcal{I} \omega_i, \quad \sum_\mathcal{I} d_i = 0.$$

Формулируемая ниже теорема существования **C**-равновесия установлена при следующих стандартных предположениях.

A1 — выпуклость и замкнутость $\mathcal{X}^\sigma \ \forall\, \sigma$;

A2 — ограниченность *достижимых* состояний $\mathcal{A}(\mathcal{X}^\sigma)\ \forall\, \sigma$;

A3′ — сильная непрерывность предпочтений — открытый график;

A4 — выпуклая иррефлексивность предпочтений;

A5 — непрерывность доходов, т. е. функции $h_i^\sigma(.)$ унаследованных стоимостей *непрерывны* $\forall\, i \in \mathcal{I}$.

A6^inh (закон Вальраса) Для $\forall\, \sigma \in N$, $\forall\, \pi = (p, q) \geq 0$

$$\sum_{i:\sigma\in N_i} h_i^\sigma(p, \mathcal{R}_i) = \sum_{j\in J_\sigma^{cor}} r_j^\sigma,$$

где $r_j^\sigma = d_j^\sigma(\pi, z_j) + h_j^\sigma(p, \mathcal{R}_j) + \langle p_\sigma, \omega_j^\sigma\rangle$ есть остаточная стоимость агента $j \in J_\sigma^{cor}$, $\mathcal{R}_i^\sigma = (r_j^\sigma)_{j\in\mathcal{I}_i^\sigma}$, $\mathcal{R}_i = (\mathcal{R}_i^\sigma)_{\sigma\in N}$, где

$$J_\sigma^{cor} = \{\, j \in \mathcal{I} \mid t_j(\sigma) > 0\,\},\ \ t_j(\sigma) = \inf\{\, t \mid \varphi^t(\sigma) \in \varphi^\infty(\sigma) \cap N_j\,\}, j \in \mathcal{I}$$

— множество агентов, умерших в предыстории $\varphi^\infty(\sigma)$.

A7^ss (условие Слейтера)

$$\omega_i^\sigma \in \ \mathrm{int} X_i^\sigma \ \ \forall\, i \in \mathcal{I}, \ \ \forall\, \sigma \in N_i.$$

С использованием методов нестандартного анализа доказана

Теорема 3.2.1 *Если выполнены* **A1**–**A7^ss** *и предпочтения* ***монотонны****, то существуют* **C***-равновесия со строго положительными ценами на потребительские блага.*

В **приложении** даётся краткое авторское введение в методы нестандартного анализа и приводится сводка некоторых необходимых базисных результатов этой теории.

Список литературы заканчивает текст диссертации.

Список литературы

1. Arrow K. J. and Debreu G. Existence of equilibrium for a competitive economy// Econometrica. — 1954. — V. **22** — pp 265–290.

2. Mas-Colell A. The price equilibrium existence problem in topological vector lattices// Econometrica. — 1986. — V. **54** — pp 1039–1053.

3. Yannelis N. C. and Zame W. R. Equilibria in Banach lattices without ordered preferences// Journal of Mathematical Economics. — 1986. — V. **15** — pp 85–110.

4. Podczeck K. Equilibria in vector lattices without ordered preferences or uniform properness// Journal of Mathematical Economics. — 1996. — V. **25** — pp 465–485.

5. Magill M. and Shafer W. Incomplete markets// Handbook of Mathematical Economics, Vol. IV, edited by Hildenbrand W. and Sonnenschein H. — Amsterdam: North-Holland, 1991. — pp 1523–1614.

6. Robinson A. Non-standard analysis, studies in logic and foundation of mathematics. Amsterdam: North Holland, 1966.

7. Девис М. Прикладной нестандартный анализ, пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 236 с.

8. Loeb P. A. An introduction to non-standard analysis// Nonstandard analysis for the working mathematician, edited by P. A. Loeb and Wolff M. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

9. Makarov V. L. Some results on general assumtion about the existence of economic equilibrium// Journal of Mathematical Economics. — 1981. — V. **8** — pp 87–100.

10. Данилов В. И., Сотсков А. И. Чистый обмен при меновых стоимостях// Проблема равновесия и принятия экономических решений — М., Изд. ЦЭМИ АН СССР, 1985. — С. 3–18.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Маракулин В. М. Равновесие с нестандартными ценами и его свойства в математических моделях экономики./ Препринт № 18. — Новосибирск.: Институт математики СО АН СССР, 1988. — 52 с.

2. Marakulin V. M. Equilibrium with nonstandard prices in exchange economies// Optimal decision in markets and planned economies, edited by Quant R. E. and Triska D. — Westview press, 1990. — pp 268–282.

3. Marakulin V. M. Equilibrium with nonstandard individual prices in economies with externalities./ Препринт № 31. — Новосибирск.: Институт математики СО АН СССР, 1990. — 36 с. (in English)

4. Marakulin V. M. About the notion of generalized equilibrium and its existence theorem in incomplete markets./ Препринт № 23. — Новосибирск.: Институт математики СО АН СССР, 1992. — 29 с. (in English)

5. Маракулин В. М. Равновесные динамические модели неполных финансовых рынков с перекрывающимися поколениями экономических агентов// Исследования закономерностей и процессов в моделях экономических систем: Сб. работ авторов, получивших гранты Московского отделения Российского научного фонда и Фонда Форда, вып.III. — М., 1996. — С. 28–53.

6. Коновалов А. В., Маракулин В. М. О конечности экономических равновесий с нестандартными ценами./ Препринт № 39. — Новосибирск.: Институт математики СО РАН, 1997. — 26 с.

7. Marakulin V. M. An equilibrium in vector lattices: the non-transitive case and overlapping generations models// Сибирская конференция по прикладной и индустриальной математике/ — 1997. Т. 1. — С. 339–352. (in English)

8. Marakulin V. M. Production equilibria in vector lattices with unordered preferences: an approach using finite dimensional approximations./ preprint CEPREMAP № 9821. — Paris.: 1998. — 29 p.

9. Florenzano M., Gourdel P., Marakulin V. M. Implementing financial equilibrium of incomplete markets: bounded portfolios and the limiting case// Decision Analysis Application, edited by F.Javier Giron (Real Academia de Ciencias, Spain). — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. — pp 181–191.

10. Marakulin V. M. Incomplete markets: the concept of generalized equilibrium and its existence theorem// Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. — 1999. — V. **93**, № 4. — pp 489–498.

11. Konovalov A. V., Marakulin V. M. Equilibria without the survival assumption: a non-standard analysis approach./ CentER Discussion Paper № 2001-34. — Tilburg.: 2001. (electronic form)

12. Florenzano M., Marakulin V. M. Production equilibria in vector lattices// Economic Theory. — 2001. — V. **17**, № 3. — pp 577–598.

13. Marakulin V. M. Equilibrium in infinite dimensional commodity spaces revisited// Economic Theory. — 2001. — V. **18**, № 3. — pp 621–633.

14. Marakulin V. M. Equilibria with nonstandard prices in vector lattice overlapping generations economies// Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2003. — V. **282**, № 2. — pp 648–667.

Маракулин Валерий Михайлович

Теоремы существования равновесия в современной экономической теории

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Подписано в печать 03.09.03. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная. Усл.-печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,3. Тираж 100 экз. Заказ № 43.

Издательство Института математики, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090