Препринт 292
ноябрь 2014

В. М. Маракулин

Существование иммиграционно состоятельного деления на страны

НОВОСИБИРСК

УДК 519.865

Дата поступления
10 ноября 2014 г.

Маракулин В. М.
Существование иммиграционно состоятельного деления на страны. — Новосибирск, 2014. – 12 с. – (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 292).

В работе изучается вопрос существования иммиграционно-состоятельного деления на страны в рамках одномерного мира на отрезке [0,1], где распределение населения описывается посредством меры Радона, которая вообще говоря не имеет плотности. Для этого общего случая доказано существование деления на страны в виде обобщенных интервалов, где могут появится страны нулевого размера (длины), но ненулевой массы (населения). Работа обобщает "Rethinking Alesina and Spolaore's "uni-dimensional world": existence of migration proof country structures for arbitrary distributed populations" by Michel Le Breton, Daniil Musatov, Alexei Savvateev and Shlomo Weber, представленную как доклад на конференции ВШЭ 2010 года.

Ключевые слова и фразы: Странообразование, мир Алесины и Сполаоре, миграция, стабильное разбиение, лебеговское разложение меры.

JEL Classification Numbers: D70, H20, H73

Адрес автора:
Маракулин В. М., Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, 630090, Новосибирск, Россия; e-mail: marakul@math.nsc.ru

Существование иммиграционно состоятельного деления на страны

Маракулин В. М.

Введение

В настоящей работе предлагается общее решение проблемы деления отрезка $[0,1]$ на страны интервального вида. Данный вопрос впервые появляется в основополагающей работе *Alesina, Spolaore* (1997) и затем также изучается в ряде последующих работ. Наибольшие продвижения в части разрешения проблемы существования нужного разбиения были получены в *Le Breton et al.* (2010), где с применением леммы Гейла — Никайдо — Дебре было доказано существование иммиграционно состоятельного разбиения отрезка на страны-интервалы, т. е. такого, что ни у кого нет стимулов к изменению страны проживания. В настоящей работе я намерен существенно усилить математическую часть и ослабить условия на распределение населения. Действительно, в *Le Breton et al.* (2010) было доказано, что

(i) Разбиение на страны является иммиграционно состоятельным если и только если функция индивидуальных затрат (налоговые издержки) является непрерывной; при этом (упрощённо) издержки подсчитываются как сумма расстояния от местопроживания данного индивида до центра страны (столица) плюс доля общих расходов на содержание правительства.

(ii) Предположим, что распределение жителей на отрезке задаётся непрерывной плотностью $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, равномерно отделённой от нуля: $f(x) \geq \alpha > 0, \forall x \in [0,1]$. Тогда для каждого натурального $n \in \mathbb{N}$ существует деление отрезка на n стран-отрезков $K_i = \langle w_{i-1}, w_i \rangle$, $w_{i-1} < w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Предположение о наличии непрерывной плотности, да еще отделённой от нуля здесь вызывает явное недоумение: неужели наличие незаселённых участков может как-то препятствовать делению на страны? А что происходит с городским населением? — в цитируемой работе городов нет вообще... В то же время понятно, что первопричина обоих указанных недостатков имеет сугубо математическую природу и решение будет найдено если удастся подобрать соответствующую математическую технику. Именно на это нацелена настоящая работа, в которой распределение жителей на отрезке описывается с помощью меры Радона μ — это счётно-аддитивная вероятностная мера, заданная на борелевской σ-алгебре. В силу известной в математическом анализе теоремы, так называемом разложении Лебега, меру μ можно разложить в сумму чисто дискретной меры ν и абсолютно непрерывной относительно меры Лебега ϑ, т. е. имеем $\mu = \nu + \vartheta$. Абсолютно непрерывной составляющей меры μ соответствует *непрерывное распределение* $F(x) = \vartheta([0,x])$, $x \in [0,1]$, что можно интерпретировать как распределение сельского населения. В то же время чисто дискретное слагаемое ν соответствует городскому населению, ибо тогда мера имеет счётный носитель и представляется как сумма мер, сконцентрированных в точке (меры Дирака), вида $\delta(\{a\}) = \alpha = \delta(A)$ для всех $A \subseteq [0,1]$, включающих в себя точку a и ноль иначе. Здесь α можно понимать как население (масса) города, сконцентрированного (расположенного) в точке $a \in [0,1]$. Конечно, наличие счётного числа городов это чисто математическая абстракция, полученная "задаром" — однако случай конечного числа городов полностью попадает в рамки теории.

Последнее: какого типа разбиение на страны существует и может получится? — это основной предмет настоящей работы. Действительно, в постановке *Le Breton et al.* (2010) этот вопрос не имеет значения — неважно, включаются или нет концы отрезка в "страну" — ибо мера одноточечных множеств равна нулю. В нашем случае это не так, поскольку имеются точки с ненулевой массой. В таком случае точка может разделиться на две неравные по массе части, одна из которых принадлежит одному смежному интервалу-стране, другая — другому. Также может произойти такая любопытная вещь как появление стран-городов нулевой длины.

1 Одномерный мир с разрывным распределением населения: модель и основной результат

Следуя построениям *Le Breton et al.* (2010), имеем: отрезок $[0,1]$, который нужно разбить на страны-интервалы. Разбиение задаётся вектором $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $w_0 = 0$, $w_n = 1$, которому соответствуют страны $K_i = \langle w_{i-1}, w_i \rangle$[1], как промежутки интервала. Кроме того, имеется мера μ на $[0,1]$, отражающая распределение жителей. Далее вектору w поставим в соответствие два вектора:

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i = w_i - w_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

и

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad a_i = \mu(\langle w_{i-1}, w_i \rangle), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Оба вектора принадлежат стандартному симплексу $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^n$, где x_i длина i-го отрезка-страны (по мере Лебега) и a_i это размер i-й популяции (по мере μ). Ясно, что $\mathbf{x}$ однозначно задаёт w.

Затраты гражданина, живущего в точке $x \in [0,1]$, и желающего быть резидентом страны $K(w_{i-1}, w_i)$ с правительством, размещённом в точке $m(w_{i-1}, w_i) \in \langle w_{i-1}, w_i \rangle$, вычисляется по формуле

$$c(x, w_{i-1}, w_i) = \frac{g}{\mu(\langle w_{i-1}, w_i \rangle)} + |m(w_{i-1}, w_i) - x|.$$

Здесь g это затраты на содержание правительства и $|m(w_{i-1}, w_i) - x|$ расстояние до столицы. Функции $m(w_{i-1}, w_i)$ предполагаются непрерывными. В *Le Breton et al.* (2010) было обоснованно, что миграционно состоятельному разбиению на страны должна соответствовать непрерывная функция индивидуальных затрат (склейка $c(x, w_{i-1}, w_i)$ по интервалам разбиения).

О мере μ. Вне всякого сомнения в общем случае это должна быть мера Радона — вероятностная мера, заданная на борелевской σ-алгебре. В частном случае этой меры (изучается первоначально) предполагается наличие у неё непрерывной плотности, т. е. существует $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\mu(B) = \int_B f(x) d\mu(x), \quad B \in \mathcal{B},$$

[1]Промежуток $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ это один из возможных вариантов: $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b).

где $\mathcal{B}$ борелевская σ-алгебра на $[0,1]$.[2] Для непрерывной f нужный результат получен в *Le Breton et al.* (2010), но как его распространить на общий случай? Рассмотрим далее пример распределения жителей на отрезке с разрывной плотностью.

Пример 1 Предположим на $[0,\frac{1}{2}) = A$ и $(\frac{1}{2},1] = B$ население распределено как-то непрерывно, но мера точки $\frac{1}{2}$ ненулевая. Предположим также, что *столицы* располагаются *в центе* стран-интервалов. Пусть $\mu(A) = x > 0$, $\mu(B) = y > 0$, $\mu(\{\frac{1}{2}\}) = z > 0$, причём эти величины удовлетворяют

$$|x-y| < z \implies \frac{1}{x+z} < \frac{1}{y} \ \& \ \frac{1}{y+z} < \frac{1}{x}.$$

Тогда можно показать, что деление на (две) страны вида $[0,\frac{1}{2}\rangle$, $\langle\frac{1}{2},1]$ невозможно. Однако возможно *часть* $0 < \alpha < 1$ населения города $\{\frac{1}{2}\}$ отнести к левой стране, а другую часть $0 < 1-\alpha < 1$ — к правой. Действительно, из условия равенства издержек у жителей города, принадлежащих разным юрисдикциям, имеем:

$$\frac{1}{x+\alpha z} = \frac{1}{y+(1-\alpha)z} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha z = y - x + z > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{y-x+z}{2z} < 1. \qquad (1)$$

Значит, если доля α жителей города имеет «левую» юрисдикцию, а прочие — «правую», то ни у кого из них не будет стимула менять гражданство.

Более того, если, например, население *равномерно* распределено на интервалах $[0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},1]$ (плотность тождественно равная $2x$ в первом случае и $2y$ — во втором), то нетрудно указать условия, при которых другого миграционно устойчивого деления отрезка на две страны не существует. С этой целью рассмотрим динамику изменения затрат у граничного индивидуума. Для $0 < t < \frac{1}{2}$ имеем «страны» $[0,t\rangle$, $\langle t,1]$ и издержки:

$$c_1(t,0,t) = \frac{g}{2xt} + \frac{t}{2}, \quad c_2(t,t,1) = \frac{g}{y+z+2x(\frac{1}{2}-t)} + \frac{1-t}{2} < \frac{g}{y+z} + \frac{1-t}{2} \implies$$

$$c_1(t,0,t) - c_2(t,t,1) > \frac{g}{2xt} + t - \frac{1}{2} - \frac{g}{y+z} = f(t).$$

Здесь $f(\frac{1}{2}) > 0$ и $\lim_{t\to+0} f(t) = +\infty$. Имеем также $f'(t) = 1 - \frac{g}{2xt^2} < 0$ при $x < 2g$, откуда можно заключить $f(t) > 0$, $t \in (0,\frac{1}{2}]$. Значит, в интервале $(0,\frac{1}{2})$ разделяющая страны граница появиться не может. Подобным образом при $y < 2g$ не может быть межстрановой границы в интервале $(\frac{1}{2},1)$.

На этом же примере можно увидеть, что при определённых обстоятельствах могут появиться страны нулевого размера при *ненулевой* массе. Действительно, пусть стоит задача деления на *три* страны. Теперь 1-я и 3-я страны включают в себя отрезки $[0,\frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2},1]$ соответственно и части населения города $\{\frac{1}{2}\}$, оставшееся население которого образует 2-ю страну. Найти такого рода деление можно таким образом.

Если из рассмотрения временно исключить 2-ю страну вместе со всем её населением, то мы получим уже известное нам деление (1), где будем считать, что население «редуцированного» города составляет величину z'. Имеем: в первую страну

[2] Напомню, что борелевская σ-алгебра задаётся топологией, т. е. структурой открытых (или замкнутых) подмножеств. Далее с ними проделываем теоретико-множественные операции (объединение, пересечение, переход к дополнению), причём в счётном числе раз, получая разные (и только такие) элементы алгебры. Каждая непрерывная функция измерима (т. е. интегрируемая) относительно борелевской алгебры.

включено население $\mu([0,\frac{1}{2}))+\alpha z'=x+\alpha z'$ и аналогично для третьей страны — $y+(1-\alpha)z'$, где $\alpha=\frac{y-x+z'}{2z'}$. Далее численность (массу) населения 2-й страны z'' можно найти из условия равенства издержек у городского жителя *не включённого* в страны 1, 3 (они составляют население 2-й страны) и издержек у горожанина из (например) первой страны. Имеем:

$$\frac{g}{x+\alpha z'}+\frac{1}{4}=\frac{g}{z''} \quad\Longrightarrow\quad \frac{2}{x+y+z'}+\frac{1}{4g}=\frac{1}{z''},$$

откуда находим общее число z жителей города $\{\frac{1}{2}\}$, это $z=z'+z''$. Например при $g=\frac{1}{2}$, $x=y=1$, $z'=2$ должно быть $z''=1$ и, следовательно, $z=3$. Таким образом, в этом случае треть жителей города находится в юрисдикции первой страны, треть в третьей и оставшаяся треть образует самостоятельную свободную страну.

Аналогично случаю двух стран можно найти условия при которых для трёхстранового деления *всегда* образуется страна-город. Например проанализируем такой вариант деления на страны: $[0,t'\rangle$, $\langle t',t\rangle$ и $\langle t',1]$, где $t<\frac{1}{2}$, т. е. город полностью включается в третью страну. Так как столицы в центре, то издержки граничного жителя в точке t равны издержкам потребителя в точке t', которые можно вычислить как полусумму издержек первой и второй страны[3]:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{g}{2xt'}+\frac{t'}{2}+\frac{g}{2x(t-t')}+\frac{t-t'}{2}\right]\geq\frac{g}{xt}+\frac{t}{4}.$$

Найдём условия, при которых издержки жителя 3-й страны в точке t меньше величины из правой части неравенства. После несложных преобразований заключаем, что достаточно получить

$$f(t)=\frac{g}{xt}+\frac{3t}{4}>\frac{g}{x+z+y-2tx}+\frac{1}{2}.$$

Здесь правая функция возрастает по t и, если левая будет убывать $(f'(t)<0)$, то достаточно будет иметь нужное неравенство в точке $t=\frac{1}{2}$; условия сводятся к

$$\frac{2g}{x}>\frac{3}{8}\quad\&\quad\frac{2g}{x}+\frac{3}{8}>\frac{g}{z+y}+\frac{1}{2}\quad\Leftarrow\quad\frac{g}{x}>\frac{3}{16}\quad\&\quad z+y\geq 4g.$$

Например, условия правой части последнего соотношения выполняются при $z=3$, $x=y=g=1$.

Подобным образом анализируются и остальные случаи. Содержательный ответ такой: страна нулевой длины появится с необходимостью, если город достаточно большой массы. ■

Для того чтобы возможно было анализировать общий случай нужно сначала разобраться с имеющимися в этой постановке функциональными пространствами и топологиями. Сделаем это.

Меры Радона образуют стандартный симплекс в пространстве $ca([0,1])$ — пространство всех счётно аддитивных (***c***ountably ***a***dditive) мер, заданных на борелевской σ-алгебре на $[0,1]$. В свою очередь $ca([0,1])$ изоморфно пространству всех линейных непрерывных функционалов над пространством непрерывных функций

[3]Применяем $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ $\forall a>0$, $b>0$.

$C([0,1])$, рассмотренных с топологией нормы максимум (равномерная сходимость). Значение функционала φ_μ, ассоциированного с мерой μ, задаётся формулой

$$\varphi_\mu(f) = \int f(x) d\mu(x), \quad f \in C([0,1]).$$

Таким образом, мы вправе написать $[C([0,1])]' = ca([0,1])$ и рассмотреть двойственность (duality or pairing) $\langle C([0,1]), ca([0,1])\rangle$, в которой билинейное отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (скалярное произведение) задаётся формулой

$$\langle f, \mu \rangle = \int f(x) d\mu(x), \quad f \in C([0,1]), \quad \mu \in ca([0,1]).$$

Для двойственности принято рассматривать и изучать разные индуцированные двойственностью топологии; важнейшими в их числе являются слабые топологии. Слабая топология может быть задана на исходном пространстве (здесь это $C([0,1])$) или сопряжённом (сейчас $ca([0,1])$), — в таком случае часто говорят, что это *слабая со звездой*[4]. По определению слабая топология это такая слабейшая локально выпуклая топология, при которой непрерывны только функционалы из второго элемента дуальности. В нашем случае $\sigma(C([0,1]), ca([0,1]))$ — слабая топология (по традиции обозначается σ) на $C([0,1])$, заданная пространством $ca([0,1])$. Слабая со звездой $\sigma^*(ca([0,1]), C([0,1]))$[5] задаётся на $ca([0,1])$ и определяется через $C([0,1])$. Слабым топологиям можно дать разные характеризации, полезные в разных случаях — например в терминах элементов фильтра окрестностей нуля или его базы. Весьма полезной является характеризация в терминах сходимости (направленного семейства или сети). Приведём далее такую характеризацию для $\sigma^*(ca([0,1]), C([0,1]))$:

$$\mu_\xi \underset{\xi \in \Xi}{\longrightarrow} \mu \quad \iff \quad \forall g \in C([0,1]), \quad \int g(x) d\mu_\xi(x) \underset{\xi \in \Xi}{\longrightarrow} \int g(x) d\mu(x). \tag{2}$$

Из данного определения (и других ему подобных) становится понятно почему слабые топологии зачастую называют топологиями поточечной сходимости.

Зачем я всё это писал? — про двойственность и проч. К общему случаю распределения популяции на отрезке я буду подбираться через предельный переход для уже доказанного случая с непрерывной плотностью, т. е. я хочу, чтобы нашлось семейство $f_\xi \in C([0,1])$ такое, что для меры $\mu_\xi(f) = \mu_\xi$, заданной по формуле

$$\mu_\xi(B) = \int_B f_\xi(x) dx, \quad B \in \mathcal{B} \tag{3}$$

мы бы имели $\mu_\xi \underset{\xi \in \Xi}{\longrightarrow} \mu$. Главное здесь это понять в каком смысле сходится семейство и установить его существование. Я утверждаю, что нужно взять слабую со звездой топологию $\sigma^*(ca([0,1]), C([0,1]))$, тогда пространство $C([0,1])$ будет плотно в $ca([0,1])$, т. е. его замыкание в σ^* даёт все $ca([0,1])$, а значит любую наперёд заданную меру можно будет реализовать как предел мер с непрерывной плотностью.[6] Ниже я приведу (собственное) короткое доказательство — тем более, что на

[4]Происходит от англоязычной традиции обозначать двойственное пространство непрерывных линейных функционалов добавлением $*$, например, L^* для L. Во франкофонской традиции здесь пишут штрих — L', например см. Бурбаки.

[5]Имеет значение порядок вхождения аргумента — сначала то, на чём топология определяется, а потом то, что её определяет.

[6]Кажется это должен быть какой-то известный классический факт. Искать нужно где-то в районе Данфорд — Шварц, том 1.

самом деле требуется немного другое: нам нужно чтобы каждую *неотрицательную* меру можно было реализовать как предел мер с *положительными* непрерывными плотностями.

Лемма 1 *В слабой со звездой топологии* $\sigma^*(ca([0,1]), C([0,1]))$ *множество* $K \subset ca([0,1])$ *всех мер с* ***положительными*** *непрерывными плотностями плотно в* $ca_+([0,1])$ *— в конусе неотрицательных элементов пространства* $ca([0,1])$.

Доказательство. Рассмотрим замыкание K в $\sigma^*(ca([0,1]), C([0,1]))$, которое обозначим $\mathrm{cl}^*(K)$. Ясно, что $\mathrm{cl}^*(K) \subseteq ca_+([0,1])$ и при этом является выпуклым, слабо-звёздно замкнутым конусом. Предположим утверждение леммы неверно. Возьмём $\nu \in ca_+([0,1]) \setminus \mathrm{cl}^*(K)$. Мы находимся в условиях 2-й классической теоремы отделимости (строгая разделимость замкнутых выпуклых множеств, одно из которых компактно) и можем найти линейный функционал G, непрерывный в топологии слабой со звездой, строго отделяющий ν от $\mathrm{cl}^*(K)$, т. е.

$$\exists\, \gamma \in \mathbb{R}: \quad G(\mathrm{cl}^*(K)) \geq \gamma > G(\nu). \tag{4}$$

Далее в отношении разделяющего функционала можно сделать следующие выводы:

(i) Так как функционал непрерывен в слабой со звездой топологии, то он должен задаваться некоторой непрерывной функцией $g \in C([0,1])$ по формуле

$$G(\mu) = \int g(x) d\mu(x), \quad \mu \in ca([0,1]).$$

(ii) Так как $G(\mathrm{cl}^*(K)) \geq \gamma$, то (от противного, K — конус) стандартно заключаем

$$G(\mathrm{cl}^*(K)) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int g(x)h(x)dx \geq 0 \ \forall h \in C_+([0,1]) \quad \Rightarrow \quad g(x) \geq 0 \ \forall x \in [0,1].$$

(iii) Из (ii) и $\nu \geq 0$ заключаем $\int g(x)d\nu(x) \geq 0$, откуда из правой части (4) следует $\gamma \geq 0$.

Наконец, так как $0 \in \mathrm{cl}^*(K)$, то левое неравенство в (4) позволяет заключить $\gamma \leq 0$, что совместно с (iii) даёт $\gamma = 0$. Однако при $\nu \geq 0$ и $\gamma \geq \int g(x)d\nu(x) \geq 0$ отсюда следует $0 = \gamma = G(\nu)$, что противоречит (4). ■

Итак, доказано существование семейства мер μ_ξ с положительной непрерывной плотностью f_ξ, $\xi \in \Xi$ слабо-звёздно сходящиеся к μ, т. е. удовлетворяют (3) и (2). Этому семейству соответствует два семейства точек из стандартного симплекса, это $x_\xi = (x_{\xi 1}, x_{\xi 2}, \ldots, x_{\xi n}) \in \Sigma^n$ и $a_\xi = (a_{\xi 1}, a_{\xi 2}, \ldots, a_{\xi n}) \in \Sigma^n$. В силу компактности симплекса мы можем считать эти семейства сходящимися, т. е. имеем

$$(\mu_\xi, x_\xi, a_\xi) \underset{\xi \in \Xi}{\longrightarrow} (\mu, \mathbf{x}, a) \in ca_+([0,1]) \times \Sigma^n \times \Sigma^n.$$

Здесь нужно указать, что, в отличии от плотности, равномерно отделённой от нуля, здесь векторы $\mathbf{x}$ и a могут иметь нулевые компоненты, что означает существование стран с нулевым населением или нулевого размера (страна-город, как полисы в древней Греции).

Далее, конечно, нужно доказать, что тройка (μ, x, a) определяет искомое разбиение на страны. Я отмечу сразу, что изначально не предполагалась наличие у меры

μ производной по мере Лебега, т. е. наша мера не обязана быть абсолютно непрерывной относительно меры Лебега (см. теорему Радона — Никодима). Однако при этом всегда имеет место *разложение Лебега* борелевской меры в сумму непрерывной и точечной, т. е. $\mu = \vartheta + \nu$, где для некоторой измеримой по Лебегу функции $h : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ выполнено

$$\vartheta(B) = \int_B h(x)dx, \quad B \in \mathcal{B},$$

и для счётного семейства попарно различных точек $y_k \in [0, 1]$ имеет место

$$\nu(\{y_k\}) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \nu(B) = \sum_{k: y_k \in B} \nu(\{y_k\}), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Таким образом, все население отрезка делится на две части — деревенскую, как-то примерно равномерно-непрерывно распределенную на отрезке — и городское население, распределённое по не более чем счётному числу точек — население k-го города составляет величину $\mu(\{y_k\}) > 0$, $k = 1, 2, \dots$

Как формально разобраться со всеми этими делами? Рассмотрим предельную тройку (μ, x, a), которой соответствует вектор $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $w_0 = 0$, $w_n = 1$ разбивающий отрезок $[0, 1]$ на сегменты по правилу:

$$[0, w_1\rangle, w_1 = x_1; \ \langle w_1, w_2\rangle, w_2 = x_1 + x_2; \ \dots \langle w_{n-1}, w_n\rangle, \ w_{n-1} = x_1 + \dots + x_{n-1}, \ \ w_n = 1.$$

При этом затраты жителя $y \in \langle w_{i-1}, w_i\rangle$ i-й страны в непрерывном случае составляют величину

$$c(y, w_{i-1}, w_i) = \frac{1}{\upsilon(\langle w_{i-1}, w_i\rangle)} + |y - m(w_{i-1}, w_i)|.$$

Конечно, здесь важно только то, что эти затраты делятся на две составляющие, первая из которых общая для всех членов страны и зависит только от числа её жителей, в то время как вторая определяется местом проживания и, главное, удалённостью от центра. Здесь в формуле υ это некоторая мера, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега — поэтому это неважно какие из концов промежутка $\langle w_{i-1}, w_i\rangle$ включены в страну, а какие нет — в общем случае это, конечно, не так. Параметр $m(w_{i-1}, w_i) \in \langle w_{i-1}, w_i\rangle$ в формуле это что-то типа медианы рассматриваемого промежутка, не обязательно в точном смысле этого слова. Затраты жителя страны могут быть представлены и в существенно более общем виде, однако это неважно на данный момент. В точках, по которым осуществлялся предельный переход, были выполнены следующие свойства:

$$\frac{1}{a_{\xi i}} + |w_i^\xi - m(w_{i-1}^\xi, w_i^\xi)| = c(w_i^\xi, w_{i-1}^\xi, w_i^\xi) = c(w_i^\xi, w_i^\xi, w_{i+1}^\xi) = \frac{1}{a_{\xi(i+1)}} + |w_i^\xi - m(w_i^\xi, w_{i+1}^\xi)|$$

где $a_{\xi i} = \mu_\xi(\langle w_{i-1}^\xi, w_i^\xi\rangle)$. В равенствах можно перейти к пределу если заметить, что никакой из знаменателей стремиться к нулю не может. Но это действительно имеет место: предполагая противное возьмём две соседние страны такие, что мера одной из них стремится к нулю, а мера другой в пределе отлична от нуля. Такая пара найдётся, ибо меры всех стран стремиться к нулю не могут, т. к. их сумма равна единице. Но теперь для достаточно больших ξ в данной паре стран нарушается условие миграционной состоятельности — затраты одной из стран в пограничной точке стремятся к бесконечности, а у другой — к конечному значению. Таким образом доказано, что все компоненты вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ строго больше нуля и имеют место равенства

$$\frac{1}{a_i} + |w_i - m(w_{i-1}, w_i)| = \frac{1}{a_{i+1}} + |w_i - m(w_i, w_{i+1})|, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Далее нужно провести корректное разбиение отрезка на страны-промежутки. Здесь будет полезна следующая лемма.

Лемма 2 *Предельная тройка $(\mu, \mathbf{x}, a)$ удовлетворяет неравенствам*[7]:

$$\mu([0, w_i]) \geq a_1 + \cdots + a_i \geq \mu([0, w_i)), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно малая действительная величина. Фиксируем i и рассмотрим две функции, заданные по формулам:

$$\alpha_\varepsilon(y) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad 0 \leq y \leq w_i - 2\varepsilon, \\ 1 - \frac{y - w_i + 2\varepsilon}{\varepsilon}, & \text{при} \quad w_i - 2\varepsilon \leq y \leq w_i - \varepsilon, \\ 0, & \text{при} \quad y \geq w_i - \varepsilon, \end{cases}$$

$$\beta_\varepsilon(y) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad 0 \leq y \leq w_i + \varepsilon, \\ 1 - \frac{y - w_i - \varepsilon}{\varepsilon}, & \text{при} \quad w_i + \varepsilon \leq y \leq w_i + 2\varepsilon, \\ 0, & \text{при} \quad y \geq w_i + 2\varepsilon. \end{cases}$$

По построению для достаточно больших ξ имеем

$$\alpha_\varepsilon(\cdot) \leq \chi([0, w_i^\xi))(\cdot) \leq \chi([0, w_i^\xi])(\cdot) \leq \beta_\varepsilon(\cdot),$$

где $\chi([0, w_i^\xi])$ характеристическая (индикаторная) функция множества $[0, w_i^\xi]$. Отсюда получаем

$$\int \alpha_\varepsilon(\cdot) d\mu_\xi \leq \mu_\xi([0, w_i^\xi)) = \sum_{j=1}^{i} a_{\xi j} \leq \int \beta_\varepsilon(\cdot) d\mu_\xi,$$

откуда, переходя к пределу по ξ в силу слабо-звёздной сходимости мер имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int \alpha_\varepsilon(\cdot) d\mu \leq \sum_{j=1}^{i} a_j \leq \lim_{\varepsilon \to 0+} \int \beta_\varepsilon(\cdot) d\mu.$$

Кроме того, имеем

$$\sup_{\varepsilon > 0} \alpha_\varepsilon(\cdot) = \chi([0, w_i))(\cdot) \leq \chi([0, w_i])(\cdot) = \inf_{\varepsilon > 0} \beta_\varepsilon(\cdot),$$

откуда заключаем[8]

$$\mu([0, w_i)) = \sup_{\varepsilon > 0} \int \alpha_\varepsilon(\cdot) d\mu \leq \sum_{j=1}^{i} a_j \leq \inf_{\varepsilon > 0} \int \beta_\varepsilon(\cdot) d\mu = \mu([0, w_i]).$$

■

В силу леммы 2 можно реализовать следующую процедуру построения по-странового разбиения отрезка $[0, 1]$:

[7] В неравенстве справа стоит мера полуоткрытого интервала, а слева — замкнутого, т. е. разница между множествами в одну точку w_i.

[8] Здесь используется такое свойство интеграла как порядковая непрерывность: если семейство функций сходится к функции по отношению порядка (монотонно возрастает или убывает), то и значения интегралов будут сходится.

(i) Имеем: $\mu([0, w_1)) \leq a_1 \leq \mu([0, w_1]) = \mu([0, w_1)) + \mu(\{w_1\})$. Значит, найдётся $0 \leq \beta_1 \leq 1$ такой, что

$$a_1 = \mu([0, w_1)) + \beta_1 \cdot \mu(\{w_1\}).$$

(ii) Имеем: $\mu([0, w_2)) \leq a_1 + a_2 \leq \mu([0, w_2]) = \mu([0, w_2)) + \mu(\{w_2\})$. Значит, для $0 \leq \alpha_2 = 1 - \beta_1 \leq 1$ найдётся $0 \leq \beta_2 \leq 1$ такой, что

$$a_2 = \alpha_2 \cdot \mu(\{w_1\}) + \mu((w_1, w_2)) + \beta_2 \cdot \mu(\{w_2\}),$$

и т. д. Таким образом, i-я страна является государством, включающем в себя всех жителей из (w_{i-1}, w_i), а также долю α_i жителей из города $\{w_{i-1}\}$ и долю β_i жителей города $\{w_i\}$, где $\alpha_1 = \beta_n = 1$.

Что всё это означает применительно к нашей теме? Дело в том, что в мире, соответствующем тройке $(\mu, \mathbf{x}, a)$, могут появится страны нулевого размера при ненулевой массе, причём эти страны (частично или все) могут концентироваться в одной точке — например, это случай, когда в векторе $\mathbf{x}$ появляются смежные нули, а в векторе a эти компоненты строго больше нуля. Что это означает? Во-первых, мера данной точки w может быть положительная ($y_k = w_i = w$ для некоторых k, i), а это означает, что живущий в этой точке народ мог распределится, как минимум, по 4-м государствам: двум это те, номера которых соответствуют нулям, и также их соседи... Формальный численный пример был приведён выше, а примеры из жизни перед глазами — разделённый Берлин, всякие там Ватиканы, Сан-Марино и другие карликовые государства.

Итак, резюмируем: в по-страновом разбиении интервалы могут быть нулевой длины и с дробными концами — если конец интервала попал в носитель ν. Доля в крайней точке интервала указывает на часть живущего в этой точке населения, попадающую под юрисдикцию данной страны. Далее естественным образом осуществляется надлежащая модернизация понятия иммиграционно-состоятельного деления на страны с учётом дробных концов, нулевого размера и проч. Эту рутинную работу я оставляю читателю.

Заключение

Итак, выше была обоснована возможность по-странового разбиения отрезка на страны-интервалы в случае распределения жителей описанного мерой Радона. А дальше я хочу предложить еще одну идею — почему бы не освободить параметр числа стран? Возможно, в затраты индивидов надо внести также расходы на всемирное правительство (ООН?), или что-то типа дипломатических издержек. Наверное здесь можно разобраться путём предельного перехода — пока и точно как не знаю...

Список литературы

Alesina, A. and E. Spolaore (1997). On the number and size of nations// *Quarterly Journal of Economics* 113, 1027-1056.

Le Breton, M., Musatov, M., Savvateev, A. and S. Weber (2010). Rethinking Alesina and Spolaore's "uni-dimensional world": existence of migration proof country structures for arbitrary distributed populations// *in*: Proceedings of XI International Academic Conference on Economic and Social Development. Moscow, 6 – 8 April 2010: University — Higher School of Economics

Маракулин Валерий Михайлович

Существование иммиграционно состоятельного деления на страны

Препринт № 292

Ответственный за выпуск С. М. Анцыз

Подписано в печать 11.11.14. Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 1,4. Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 75 экз.

Заказ № 186

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
пр. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090