ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2012. Том 19, № 4. С. 66–72

УДК 519.7

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГРАФОВ МАЛОГО ДИАМЕТРА *)

Д. С. Малышев

Аннотация. Рассматривается конструктивный подход к формированию новых случаев эффективной разрешимости задачи о независимом множестве в семействе наследственных частей множества графов $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$. Именно, доказывается, что если эта задача полиномиально разрешима в классе $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, G\})$, то для любого графа H, который может быть индуктивно получен из G применением к текущему графу сложения с K_1 или умножения на K_1, эта задача имеет тот же вычислительный статус в классе $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$.

Ключевые слова: задача о независимом множестве, вычислительная сложность, эффективный алгоритм.

Введение

Независимым множеством в обыкновенном графе называется множество попарно не смежных вершин. Независимое множество называется *наибольшим*, если оно содержит максимальное количество вершин. Размер наибольшего независимого множества графа G называется *числом независимости* и обозначается через $\alpha(G)$. Задача о независимом множестве для данного графа состоит в нахождении его наибольшего независимого множества. Известно, что эта задача полиномиально эквивалентна задаче вычисления числа независимости. Для краткости задачу о независимом множестве будем называть *задачей* НМ. Хорошо известно, что она NP-полна в классе всех графов, и остаётся таковой даже при значительных сужениях этого класса графов. В то же время

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11–01–00107-а и 12–01–00749-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.» (гос. контракт № 16.740.11.0310) и при поддержке лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ-ВШЭ (грант Правительства РФ, договор 11.G34.31.0057).

© **2012 Малышев Д. С.**

известны и некоторые «области эффективности», т. е. классы графов, для которых задача о независимом множестве имеет полиномиальную сложность.

Класс графов $\mathcal{X}$ называется *наследственным*, если он замкнут относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой наследственный (и только наследственный) класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещённых порождённых подграфов $\mathcal{S}$. В этом случае принята запись $\mathcal{X} = \mathcal{F}ree(\mathcal{S})$.

Наследственный класс графов будем называть НМ-*простым*, если задача НМ для графов из этого класса полиномиально разрешима, и НМ-*сложным* в противном случае. На протяжении всей работы предполагается, что P$\neq$NP, и это условие явно не включается в формулировки утверждений.

Имеется довольно много работ, в которых выявляются новые области эффективной разрешимости задачи НМ, в том числе и в семействе наследственных классов графов. Большинство из этих публикаций направлено на расширение уже известных полиномиальных случаев. Все известные автору обобщения такого рода имеют «локальный характер», т. е. реализованное полиномиальное сведéние использует информацию о конкретике структуры старой, более узкой совокупности графов. Вместе с тем хотелось бы иметь «универсальные» сведéния, пригодные сразу для целых семейств классов графов. Например, для случая наследственных классов указать преобразование $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ (функцию одного или многих аргументов — графов из части $\mathcal{S}$) такое, что $\mathcal{F}ree(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}ree(\mathcal{S}')$ и из НМ-простоты класса $\mathcal{F}ree(\mathcal{S})$ следовала бы НМ-простота класса $\mathcal{F}ree(\mathcal{S}')$. Тем самым если класс $\mathcal{F}ree(\mathcal{S})$ является НМ-простым, то $\mathcal{F}ree(f(\mathcal{S})), \mathcal{F}ree(f(f(\mathcal{S}))), \mathcal{F}ree(f(f(f(\mathcal{S}))))$ — монотонно возрастающая бесконечная цепь (по отношению включения) из НМ-простых классов. Существование таких функций гарантировано: по теореме 1 достаточно взять отображение $\{G\} \to \{G \oplus K_1\}$ (под суммой $G_1 \oplus G_2$ понимается объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин).

В статье рассматривается случай, когда $\mathcal{S}$ равно $\{P_5, C_5, G\}$. Интерес к наследственным подклассам класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$ не случаен. Если $|V(G)| \leqslant 4$, то в классе $Free(\{G\})$ задача НМ полиномиальна тогда и только тогда, когда G — лес. Более того, среди всех связных графов G с пятью вершинами случай простого пути является единственным, для которого статус задачи НМ в классе $Free(\{G\})$ остаётся открытым вопросом [8]. Имеются десятки работ, в которых к графу P_5 добавляется один или несколько других запрещённых порождённых подграфов и доказывается эффективная разрешимость задачи НМ для полученного класса (см., например, [1–4, 6–8,10]). Доказано также, что для любого графа G с не более чем 5 вершинами, отличного от P_5 и C_5, задача НМ полиномиально разрешима в классе графов $\mathcal{F}ree(\{P_5, G\})$ [8]. Вопрос для класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$ пока остаётся открытым. Для рассматриваемого случая в качестве $f(\mathcal{S})$ можно взять $\{P_5, C_5, G \circ K_1\}$ (теорема 2), где $G_1 \circ G_2$ — произведение графов G_1 и G_2, т. е. граф

$$(V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2) \cup V(G_1) \times V(G_2)).$$

Теоремы 1 и 2 помогают конструктивно расширять совокупность НМ-простых подмножеств $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$. Пусть $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, G\})$ — НМ-простой класс. Будем называть граф G-*пороговым*, если он может быть получен из G с использованием операций $\oplus$ и $\circ$. Иными словами, определение G-порогового графа является индуктивным: 1) граф G — G-пороговый, 2) если G' — G-пороговый граф, то $G' \oplus K_1$ и $G' \circ K_1$ — G-пороговые. Отметим, что графы, сформированные по этим правилам для случая $G = K_1$, принято называть *пороговыми* (отсюда и их обобщающее название на случай произвольного G). Имея в виду теоремы 1 и 2, по индукции можно показать, что для любого G-порогового графа H класс $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$ НМ-прост. Это утверждение является основным в настоящей статье.

Введём следующие обозначения:

$(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — простой путь с k вершинами, в котором (x_1, x_2), $(x_2, x_3), \ldots, (x_{k-1}, x_k) \in E(P_k)$;

$G[V']$ — подграф графа G, порождённый подмножеством $V' \subseteq V(G)$;

$N(x)$ — окрестность вершины x;

$N_k(x)$ — множество вершин графа, отстоящих от x в точности на расстояние k.

1. Результаты

1.1. Общий случай.

Теорема 1. *Если для некоторого наследственного класса графов $\mathcal{X}$ и графа G класс $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{G\})$ НМ-прост, то класс $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{G \oplus K_1\})$ также НМ-прост.*

Доказательство. Пусть $H \in \mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{G \oplus K_1\})$ — граф с множеством вершин V', x — произвольная вершина графа H. Пусть $H_1 = H[V' \setminus \{x\}], H_2 = H[V' \setminus N(x)], H_3 = H[V' \setminus (N(x) \cup \{x\})]$. Ясно, что

$\alpha(H) = \max(\alpha(H_1), \alpha(H_2))$, $\alpha(H_2) = \alpha(H_3) + 1$, граф H_3 принадлежит классу $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{G\})$. Значит, вычисление числа независимости графа H рекурсивно сводится к вычислению чисел независимости графов H_1 и H_3. Из формулировки теоремы следует, что время вычисления $\alpha(H_3)$ не превосходит $poly(|V(H_3)|)$, где $poly(n)$ — некоторый полином переменной n. Таким образом, время решения задачи НМ для графа H не превосходит $|V(H)|poly(|V(H)|)$, т. е. ограничено полиномом от числа вершин. Теорема 1 доказана.

К сожалению, теорему 1 не удаётся перенести на случай классов графов вида $\mathcal{F}ree(\{G \oplus K_2\})$. Вместе с тем утверждение теоремы 1 для операции $\circ$ вовсе не верно (это так и для более «слабых» умножений, когда добавляется только часть рёбер, инцидентных $V(K_1)$ и $V(G)$). Действительно, класс $\mathcal{F}ree(\{K_{1,3}\})$ НМ-простой [5], а $\mathcal{F}ree(\{K_{1,3} \circ K_1\})$ содержит все графы без треугольников, которые образуют НМ-сложный класс [9]. В случае подклассов класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$ теорема 1 верна и для умножения.

1.2. Случай подмножеств класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$.

Лемма 1. *В графе $G \in \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$, содержащем порождённый путь $P_3 = (x_1, x_2, x_3)$, либо $N(x_1) \subseteq N(x_2) \cup N(x_3)$, либо $N(x_3) \subseteq N(x_1) \cup N(x_2)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют вершины a и b такие, что

$$a \in N(x_1) \setminus (N(x_2) \cup N(x_3)) \quad \text{и} \quad b \in N(x_3) \setminus (N(x_1) \cup N(x_2)).$$

Тогда a, x_1, x_2, x_3, b порождают в G либо подграф P_5 (если $(a, b) \notin E(G)$), либо подграф C_5 (если $(a, b) \in E(G)$); противоречие. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Радиус любого связного графа из $\mathcal{F}ree(\{P_5\})$ не превосходит 2.*

Доказательство. Пусть x — такая вершина связного графа $G \in \mathcal{F}ree(\{P_5\})$, что величина $|\{x\} \cup N(x) \cup N_2(x)|$ является наибольшей (если таких вершин несколько, то рассматривается любая из них). Поскольку граф G связный и не содержит порождённого подграфа P_5, каждая вершина этого графа отстоит от x на расстояние не больше 3. Покажем, что расстояние от x до каждой из вершин G не превосходит даже 2.

Предположим противное. Тогда существуют вершины $a \in N(x)$, $b \in N_2(x)$, $c \in N_3(x)$ такие, что $(a, b) \in E(G)$ и $(b, c) \in E(G)$. Понятно, что $\{z \in N_2(x) \mid \exists y \in N(x) \cap N(b), (y, z) \in E(G)\} \subseteq N(b) \cup N_2(b)$. Докажем, что $N(x) \setminus N(b) \subseteq N_2(b)$ и

$$\{z \in N_2(x) \mid \exists y \in N(x) \setminus N(b),\ (y,z) \in E(G)\} \subseteq N(b) \cup N_2(b).$$

Действительно, пусть $y \in N(x) \setminus N(b)$. Очевидно, что вершина y не может быть смежна с c, так как иначе расстояние между x и c равно 2. Вместе с тем y должна быть смежна с вершиной a, поскольку иначе граф G содержит порождённый вершинами y, x, a, b, c подграф P_5. Тогда $y \in N_2(b)$. Теперь предположим, что существует вершина z, для которой $z \in N_2(x)$ и $(z, y) \in E(G)$. Граф G содержит хотя бы одно из рёбер $(a, z), (b, z), (c, z)$, иначе вершины z, y, a, b, c порождают в G подграф P_5. Тогда $z \in N(b) \cup N_2(b)$. Следовательно,

$$\{x\} \cup N(x) \cup N_2(x) \subseteq \{b\} \cup N(b) \cup N_2(b).$$

Вместе с тем $c \in N(b)$, но $c \notin \{x\} \cup N(x) \cup N_2(x)$. Поэтому

$$|\{x\} \cup N(x) \cup N_2(x)| < |\{b\} \cup N(b) \cup N_2(b)|.$$

Получаем противоречие с выбором вершины x. Значит, предположение из первого абзаца неверно, и радиус графа G не превосходит 2. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что если x — центральная вершина связного графа G из $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$, то любая вершина G отстоит от x на расстояние не более чем 2. Рассмотрим окрестность вершины x. Заметим, что для любых двух различных несмежных вершин $y_1, y_2 \in N(x)$ в силу леммы 1 $N(y_1) \setminus N(x) \supseteq N(y_2) \setminus N(x)$, либо $N(y_2) \setminus N(x) \supseteq N(y_1) \setminus N(x)$. Поэтому на любой совокупности из попарно не смежных вершин, принадлежащих $N(x)$, отношение $R : uRv \to N(u) \setminus N(x) \subseteq N(v) \setminus N(x)$ является линейным предпорядком (R рефлексивно, транзитивно, но не обязательно антисимметрично). Этот предпорядок обязательно имеет максимальный элемент.

Пусть IS — какое-либо независимое множество графа G, для которого вершина $y \in N(x) \cap IS$ является максимальным элементом относительно введённого выше предпорядка R. Ясно, что необходимым условием принадлежности вершины $z \in N(x)$ множеству IS является выполнение двух условий: (а) $(y, z) \notin E(G)$; (б) $N(z) \setminus N(x) \subseteq N(y) \setminus N(x)$. Это наблюдение может быть положено в основу вычисления числа независимости графа G.

Шаг 1. Для каждой вершины $y \in N(x)$ определить графы

$$G_1(y) = G[\{z \in N(x) \mid (y,z) \notin E(G),\ N(z) \setminus N(x) \subseteq N(y) \setminus N(x)\}],$$

$$G_2(y) = G[N_2(x) \setminus N(y)].$$

Шаг 2. Вычислить число

$$\max(\alpha(G[N_2(x)]) + 1, \max_{y \in N(x)} (\alpha(G_1(y)) + \alpha(G_2(y)) + 1)),$$

равное $\alpha(G)$.

Лемма 3. *Для каждой компоненты связности G' графа $G[N_2(x)]$ существует вершина $y \in N(x)$ такая, что*

(i) $V(G') \cap N(y) \neq \varnothing$,

(ii) *радиус графа $G'' = G[V(G') \cup \{y\}]$ не превосходит 2,*

(iii) *для любых двух смежных вершин z_1 и z_2 графа G'', отстоящих в этом графе от вершины y на расстояние 2, существует такая вершина z, что $(z, z_1) \in E(G''), (z, z_2) \in E(G''), (z, y) \in E(G'')$.*

Доказательство. Пусть y — произвольная вершина из $N(x)$, окрестность которой в графе G имеет непустое пересечение с $V(G')$ (такая вершина обязательно существует ввиду связности графа G). Расстояние от y до любой вершины G'' не превосходит 2 (в противном случае радиус графа G был бы не менее 3). Значит, радиус графа G'' не превосходит 2. Пусть теперь z_1 и z_2 — две смежные вершины графа G'', отстоящие в этом графе от вершины y на расстояние 2, а z — произвольная вершина G'', смежная и с y и с z_1 (такая вершина обязательно существует ввиду связности графа G' и ограничений на его радиус). Если вершины z и z_2 несмежны, то вершины z_1, z_2, z, y, x порождают в графе G путь P_5. Поэтому обязательно $(z, z_2) \in E(G'')$. Лемма 3 доказана.

Пусть $G \in \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H \circ K_1\})$ для некоторого графа H. Легко видеть, что для любого $y \in N(x)$ граф $G_1(y)$ принадлежит классу $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. Из леммы 3(iii) следует, что при применении шагов 1–2 к компоненте G' (путём перебора кандидатов в максимальные элементы относительно предпорядка R среди вершин G', смежных с y) вычисление её числа независимости полиномиально сводится к решению задачи НМ для графов из $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$ (поскольку получаемые на шаге 1 графы принадлежат этому классу). Заметим также, что каждая компонента связности любого графа $G_2(y)$ является порождённым подграфом некоторой компоненты связности $G[N_2(x)]$. Поэтому задача НМ для графов из $\{G_2(y) \mid y \in N(x)\} \cup \{G[N_2(x)]\}$ полиномиально сводится к той же задаче для графов, принадлежащих $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Если класс графов* $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, G\})$ НМ-*прост, то и класс* $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, G \circ K_1\})$ НМ-*прост.*

Теоремы 1 и 2 позволяют конструктивно расширять совокупность НМ-простых подмножеств класса $\mathcal{F}ree(\{P_5, C_5\})$. Именно, имея какой-нибудь НМ-простой случай $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, G\})$, можно рассмотреть G-пороговый граф H и поставить вопрос о вычислительном статусе задачи НМ для графов из $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$. Пользуясь утверждениями теорем 1 и 2 и индукцией, можно легко показать полиномиальность задачи НМ в этом классе. Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Если класс графов* $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, G\})$ НМ-*прост, то для любого* G-*порогового графа* H *класс* $\mathcal{X} \cap \mathcal{F}ree(\{P_5, C_5, H\})$ НМ-*прост.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Arbib C., Mosca R.** On $(P_5, diamond)$-free graphs // Discrete Math. — 2002. — Vol. 250. — P. 1–22.
2. **Brandstadt A., Mosca R.** On the structure and stability number of P_5- and co-chair-free graphs // Discrete Appl. Math. — 2003. — Vol. 132. — P. 47–65.
3. **Brandstadt A., Le H.-O., Mosca R.** Chordal co-gem-free and (P_5, gem)-free graphs have bounded clique-width // Discrete Appl. Math. — 2005. — Vol. 145, N 2. — P. 232.
4. **Lozin V., Mosca R.** Maximum independent sets in subclasses of P_5-free graphs // Inf. Process. Lett. — 2009. — Vol. 109, N 6. — P. 319–324.
5. **Minty G.** On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs // J. Comb. Theory, Ser. B. — 1980. — Vol. 28. — P. 284–304.
6. **Mosca R.** Polynomial algorithms for the maximum stable set problem on particular classes of P_5-free graphs // Inf. Process. Lett. — 1997. — Vol. 61, N 3. — P. 137–143.
7. **Mosca R.** Some results on maximum stable sets in certain P_5-free graphs // Discrete Appl. Math. — 2003. — Vol. 132. — P. 175–183.
8. **Mosca R.** Some observations on maximum weight stable sets in certain P // Eur. J. Oper. Res. — 2008. — Vol. 184, N 3. — P. 849–859.
9. **Murphy O.** Computing independent sets in graphs with large girth // Discrete Appl. Math. — 1992. — Vol. 35. — P. 167–170.
10. **Simone C. D., Mosca R.** Stable set and clique polytopes of (P_5, gem)-free graphs // Discrete Math. — 2007. — Vol. 307, N 22. — P. 2661–2670.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Статья поступила
19 октября 2011 г.