ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2012. Том 19, № 4. С. 60–65

УДК 519.174

КРАТНЫЕ СОВЕРШЕННЫЕ КОДЫ В ГИПЕРКУБЕ *)

К. В. Воробьёв

Аннотация. Подмножество вершин графа называется *k-кратным совершенным кодом радиуса r*, если для каждой вершины шар радиуса r с центром в этой вершине содержит в точности k кодовых вершин. Получен критерий, который по параметрам совершенной 2-раскраски двоичного n-куба определяет, является ли она кратным совершенным кодом заданного радиуса $r \geqslant 1$ некоторой кратности.

Ключевые слова: гиперкуб, совершенная раскраска, совершенный код, кратный совершенный код.

Введение

Понятие кратного совершенного кода является естественным обобщением совершенного кода, одного из центральных объектов теории кодирования. Подмножество вершин графа называется *k-кратным совершенным кодом радиуса r*, если для каждой вершины шар радиуса r с центром в этой вершине содержит в точности k кодовых вершин. В общем виде задача формулируется следующим образом: *определить параметры k, r, n и q такие, что существуют k-кратные совершенные коды радиуса r в n-кубе над $GF(q)$*. На сегодняшний день эта задача решена только для $k = 1$: В. А. Зиновьев, В. К. Леонтьев [2] и Тиетвайнен [12] показали, что все возможные параметры исчерпываются списком $n = 2^k - 1,\ r = 1$ и $n = 23,\ r = 3$ над $GF(2)$, $n = 11,\ r = 2$ над $GF(3)$. Раскраска вершин графа называется *совершенной*, если для каждой вершины цветовой набор её соседей зависит только от её цвета.

В работе исследуется связь совершенных 2-раскрасок и k-кратных совершенных кодов двоичного гиперкуба. Цель данного исследования — дать описание кратных совершенных кодов, одновременно являющихся совершенными раскрасками в 2 цвета. Основным результатом является критерий, который по параметрам совершенной 2-раскраски определяет, является ли она k-кратным совершенным кодом.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых ученых (МК–1700.2011.1), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0362).

1. Необходимые определения

Пусть H_n — гиперкуб размерности n. Вершины куба — двоичные наборы длины n, они смежны, если их наборы отличаются ровно в одной координате. *Весом* $\mathrm{wt}(y)$ вершины $y \in H_n$ называется число единиц в её наборе. *Расстояние Хэммингa* $d(x, y)$ между вершинами $x, y \in H_n$ — число позиций, в которых x и y различны. Будем называть *сферой радиуса* r *с центром в точке* x множество

$$S(x, r) = \{y \in H_n \mid d(x, y) = r\},$$

а *шаром радиуса* r *с центром в точке* x — множество

$$B(x, r) = \{y \in H_n \mid d(x, y) \leqslant r\}.$$

Полиномом Кравчука степени r называется полином

$$P_r(x, n) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{x}{i} \binom{n-x}{r-i}.$$

О полиномах Кравчука и их целочисленных корнях см. в [9, 10].

Отображение $T : H_n \to \{1, 2, \ldots, k\}$ называется *совершенной раскраской вершин куба в* k *цветов с матрицей параметров* $(s_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,k\}}$, если оно сюрьективно и для каждых i, j у любой вершины цвета i число соседей цвета j равно s_{ij}.

Раскраска вершин куба в 2 цвета называется *совершенной с матрицей параметров* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, если каждая вершина первого цвета имеет a соседей первого цвета и b соседей второго цвета, а каждая вершина второго цвета имеет c соседей первого цвета и d соседей второго. Не теряя общности, будем считать, что $b \geqslant c$.

Известны необходимые условия существования такой совершенной раскраски:

$$a + b = c + d = n, \tag{1}$$

$$\exists m \in \mathbb{N} : \frac{b + c}{(b, c)} = 2^m, \tag{2}$$

где (b, c) — наибольший общий делитель b, c. (Общее определение совершенной раскраски и основные свойства см. в [6].) Кроме того, известно [6], что условие (2) на b, c является и достаточным условием существования в следующем смысле.

Утверждение 1. *Для каждой пары b, c натуральных чисел, удовлетворяющих (2), существует число $a_0 = a_0\,(b, c)$ такое, что $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b-c \end{pmatrix}$ — матрица совершенной раскраски гиперкуба, тогда и только тогда, когда $a \geqslant a_0$.*

В [6] также показано, что $a_0 \leqslant c - (b, c)$. Наилучшей нижней оценкой для a_0 является так называемая граница корреляционной иммунности (она имеет место при $b \neq c$): $a_0 \geqslant \frac{3c-b}{4}$. Если $a = \frac{3c-b}{4}$, то говорят, что *совершенная раскраска достигает границы корреляционной иммунности* (подробнее см. в [3, 5, 8]).

Из определения k-кратного совершенного кода радиуса r вытекает необходимое условие существования: $\frac{2^n \cdot k}{\sum\limits_{i=0}^{r} \binom{n}{i}}$ должно быть целым. В случае $k = 1$ получаем классическое определение совершенного кода. Как уже упоминалось выше, задача перечисления всех параметров n, r, при которых такие коды существуют, решена в [2, 12]. При произвольном k эта проблема ещё далека от решения. Подробнее о k-кратных совершенных кодах см. [7, 13].

В соответствии с введёнными определениями ставится задача: *найти все n, b, c такие, что соответствующая совершенная раскраска будет совершенным кодом некоторой кратности k*. В данной работе приводится критерий для параметров n, b, c, который решает эту задачу.

2. Связь совершенных 2-раскрасок и k-кратных совершенных кодов

Пусть задана совершенная раскраска с параметрами $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. При каких b, c и n она будет совершенным кодом некоторой кратности? Ответ на этот вопрос даёт

Теорема 1. *Совершенная раскраска с параметрами $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является кратным совершенным кодом радиуса r тогда и только тогда, когда $P_r\big(\frac{b+c}{2} - 1, n-1\big) = 0$, при этом кратность кода равна*

$$k = \frac{c}{b+c} \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i}.$$

Доказательство. По аналогии с [9] обозначим через χ'_r, χ_r и χ_C характеристические функции $B(0, r)$, $S(0, r)$ и совершенной раскраски соответственно. Нам понадобится операция свёртки:

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in H_n} f(y)g(x-y).$$

Тогда критерий того, что совершенная раскраска — совершенный код кратности k, записывается следующим образом: $\chi'_r * \chi_C(x) = k\chi_H(x)$. Применим к обеим частям уравнения преобразование Фурье:

$$\widehat{\chi}'_r \cdot \widehat{\chi}_C(x) = k2^n \chi_{\{0\}}(x). \tag{3}$$

По свойствам преобразования Фурье получаем

$$\widehat{\chi}'_r \cdot \widehat{\chi}_C = P_r(\mathrm{wt}(x)-1, n-1)2^n w_x, \tag{4}$$

где w_x — соответствующий коэффициент Уолша — Адамара совершенной раскраски. Приравняем правые части (3) и (4). При $\mathrm{wt}(x) = 0$ получаем

$$k = \frac{c}{b+c}\sum_{i=0}^{r} P_i(0,n) = \frac{c}{b+c}\sum_{i=0}^{r}\binom{n}{i}.$$

При любом ненулевом x правая часть (3) равна 0. С другой стороны, из свойств совершенной раскраски $w_x = 0\ \forall x \in H_n : \mathrm{wt}(x) \neq 0$, $\mathrm{wt}(x) \neq \frac{b+c}{2}$, при этом $\exists y \in H_n : \mathrm{wt}(y) = \frac{b+c}{2}$, $w_y \neq 0$. Следовательно, для выполнения тождества необходимо, чтобы $P_r(\frac{b+c}{2} - 1, n-1) = 0$. В силу обратимости преобразования Фурье приведённые выше рассуждения доказывают теорему в обе стороны. Теорема 1 доказана.

3. Некоторые частные случаи

Рассмотрим некоторые частные случаи.

При $r = 1$ критерий выглядит следующим образом: $c = a + 1$. Таким образом, параметрами совершенных раскрасок, являющихся также соврешенными кратными кодами, будут $\begin{pmatrix} c-1 & b \\ c & b-1 \end{pmatrix}$ с кратностью $k = c$. Известно, что такие совершенные раскраски существуют для любых допустимых b и c. Заметим, что эти совершенные раскраски будут кратными совершенными кодами любого нечётного радиуса, так как в силу определения полиномов Кравчука $P_r\big(\frac{n-1}{2}, n-1\big) = 0$ при нечётных r. Таким образом, используя (2), заключаем, что для любых $m, l, r \in \mathbb{N}$, $r \equiv 1 \pmod 2$, существуют кратные совершенные коды радиуса 1 при $n = 2^m l + 1$ кратности $k = i \cdot l$ для всех $i \in \{1, \ldots, 2^m\}$, $i \equiv 1 \pmod 2$.

Эти же коды будут кратными совершенными кодами любого нечётного радиуса.

При $r = 2$ критерий примет вид: $n^2 + n(1-4x) + 4x^2 - 4x + 2 = 0$, где $x = \frac{b+c}{2}$ и

$$n = \frac{2(b+c) - 1 \pm \sqrt{4(b+c) - 7}}{2}.$$

При $\sqrt{4(b+c)-7} \in \mathbb{Z}$ это выражение целочисленно. Известно, что $(b+c)/(b,c) = 2^m$, или если $(b,c) = l$, то $b + c = 2^m l$. Таким образом, нужно найти все натуральные m, l такие, что $2^{m+2}l - 7 = x^2$ является квадратом натурального числа. При $l = 1$ известны [11] все решения этого уравнения: $x = 1, 3, 5, 11, 181$ и $m = 1, 2, 3, 5, 13$ соответственно. Этим решениям соответствуют матрицы параметров совершенных раскрасок в гиперкубах размерностей $1, 2, 5, 10, 26, 37, 8101, 8282$. Следует заметить, что существование некоторых из них ($n = 26, 8101$) требует отдельного исследования, так как при этих параметрах $a < c - (b,c)$.

В заключение приведём случай $r = 3$. Критерий примет вид:

$$(a^2 - a(1+2c) + c^2 - 2c - 3b + 6) = 0 \quad \text{или} \quad c - a + 1 = 0.$$

Из этого уравнения ещё раз убеждаемся, что раскраски, разобранные в случае $r = 1$, также являются кратными совершенными кодами радиуса 3. Второе уравнение можно преобразовать следующим образом:

$$n = \frac{2(b+c) - 1 \pm \sqrt{12(b+c) - 23}}{2},$$

и поиск кратных совершенных кодов радиуса 3 сводится к поиску решений этого уравнения в натуральных числах, удовлетворяющих (2).

В заключение приведём все совершенные раскраски, являющиеся в 10-мерном кубе кратными совершенными кодами радиуса 2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Им соответствуют кратности $7, 14, 21, 28$.

Заключение

На сегодняшний день существуют конструкции, позволяющие строить большое число совершенных раскрасок с различными параметрами [1, 4]. Приведённые выше результаты позволяют искать среди них неизвестные ранее кратные совершенные коды. Описанные в статье определения и задачи легко переносятся и на другие классы графов такие, как кубические транзитивные, циркулярные и графы Джонсона.

Автор выражает свою признательность В. Н. Потапову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воробьев К. В., Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** О совершенных 2-раскрасках гиперкуба // Сиб. электрон. мат. изв. — 2010. — Т. 7. — С. 67–75.
2. **Зиновьев В. А., Леонтьев В. К.** О совершенных кодах // Препринт / ИППИ АН СССР. — 1972. — Т. 1. — С. 26–35.
3. **Кротов Д.С.** О совершенных раскрасках половинного 24-куба // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 5. — С. 35–46.
4. **Потапов В. Н.** О совершенных раскрасках булева n-куба и корреляционно-иммунных функциях малой плотности // Сиб. электрон. мат. изв. — 2010. — Т. 7. — С. 372–382.
5. **Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** Совершенные 2-раскраски 12-мерного куба, достигающие границы корреляционной иммунности // Сиб. электрон. мат. изв. — 2007. — Т. 4. — С. 292–295.
6. **Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 4. — С. 923–930.
7. **Cohen G. D., Honkala I. S., Litsyn S. N., Lobstein A. C.** Covering codes. — Amsterdam: Elsevier, 1997. — 542 p.
8. **Fon-Der-Flaass D. G.** A bound on correlation immunity // Sib. Electron. Math. Reports. — 2007. — Т. 4. — С. 133–135.
9. **Habsieger L.** Integer zeros of q-Krawtchouk polynomials in classical combinatorics // J. Adv. Appl. Math. — 2001. — Vol. 27, N 2–3. — P. 427–437.
10. **Krasikov I., Litsyn S.** On integral zeros of Krawtchouk polynomials // J. Comb. Theory, Ser. A. — 1996. — Vol. 74, N 1. — P. 71–99.
11. **Nagell T.** The Diophantine equation $x^2 + 7 = 2^n$ // Ark. Mat. — 1960. — Vol. 4, N 2–3. — P. 185–187.
12. **Tietavainen A.** On the nonexistence of perfect codes over the finite fields // SIAM J. Appl. Math. — 1973. — Vol. 24. — P. 88–96.
13. **Van Wee G. J. M., Cohen G. D., Litsyn S. N.** A note on perfect multiple coverings of the Hamming space // IEEE Trans. Inf. Theory. — 1991. — Vol. 37, N 3. — P. 678–682.

Воробьёв Константин Васильевич,
e-mail: konstantin.vorobev@gmail.com

Статья поступила
29 августа 2011 г.