ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2009. Том 16, № 5. С. 78–87

УДК 519.714

О СЛОЖНОСТИ ОБОБЩЁННЫХ КОНТАКТНЫХ СХЕМ *)

К. Л. Рычков

Аннотация. Рассматриваются обобщения понятий контактной и параллельно-последовательной контактной схем на случай, когда переменные, приписанные контактам, могут принимать не два, как в булевом случае, а большее число значений. При этом проводимость контакта по-прежнему остаётся двузначной (контакт либо замкнут, либо разомкнут). Получены оценки сложности таких схем, реализующих функцию $f : \{0, 1, \ldots, q-1\}^n \to \{0, 1\}$, которая принимает значение 1 на наборе $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \{0, 1, \ldots, q-1\}^n$, если $\delta_1 + \ldots + \delta_n \neq 0 \pmod q$.

Ключевые слова: булева функция, контактная схема, сложность схем.

По аналогии с обычной (двоичной) контактной схемой [2] *q-ичной контактной схемой* будем называть мультиграф с двумя выделенными вершинами (полюсами), каждое ребро которого помечено символом x_i^δ, где x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — некоторая переменная, δ — некоторое число. При этом ребро вместе с приписанным ему символом x_i^δ называется *контактом*. Как и в двоичном случае, контакт считается *замкнутым*, если значение переменной x_i равно δ, и *разомкнутым* — в противном случае. Отличие от двоичной контактной схемы заключается в том, что переменная x_i определена на множестве $B_q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$, а число δ — это одно из чисел $0, 1, \ldots, q-1$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ проводимости q-ичной контактной схемы определяется так же, как в двоичном случае, и является характеристической функцией некоторого подмножества множества $B_q^n = \{0, 1, \ldots, q-1\}^n$. Будем говорить, что q-ичная контактная схема S *реализует функцию* $f : B_q^n \to \{0, 1\}$, если f совпадает с функцией проводимости схемы S. *Сложностью* q-ичной контактной схемы называется число контактов в этой схеме. Через $L_{\text{КС}}(f)$ обозначим сложность минимальной q-ичной контактной схемы, реализующей функцию $f : B_q^n \to \{0, 1\}$.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08–01–00671 и 09–01–00528-а).

Понятие q-ичной параллельно-последовательной контактной схемы (q-ичной π-схемы) также определяется по аналогии с двоичным случаем. Через $L_\pi(f)$ обозначим сложность реализации функции $f : B_q^n \to \{0, 1\}$ q-ичными π-схемами.

Как было отмечено в [1], сложность булевой функции в классе обычных контактных схем может отличаться от сложности её отрицания почти в два раза. Можно ожидать усиления подобного эффекта для q-ичных контактных схем, поскольку для q-ичных π-схем он тоже имеет место. Это говорит о том, что ситуация нетривиальна и не сводится к двоичному случаю.

На множестве B_q^n определим функцию

$$f_q(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 + \ldots + x_n = 0 \pmod q; \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что в случае $q = 2$ функция $f_q(x_1, \ldots, x_n)$ является линейной булевой функцией

$$f_2(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n \pmod 2.$$

В [8] Кардо показал, что при $n \geqslant 2$ справедливо равенство

$$L_{\text{КС}}(f_2(x_1, \ldots, x_n)) = 4n - 4.$$

В [7] С. В. Яблонский установил, что

$$L_\pi(f_2(x_1, \ldots, x_n)) \leqslant \frac{9}{8} n^2,$$

а при $n = 2^k$

$$L_\pi(f_2(x_1, \ldots, x_n)) \leqslant n^2.$$

В [5] В.М. Храпченко доказал неравенство

$$L_\pi(f_2(x_1, \ldots, x_n)) \geqslant n^2.$$

В [4] это неравенство усилено следующим образом:

$$L_\pi(f_2(x_1, \ldots, x_n)) \geqslant \begin{cases} n^2 + 2, & \text{если } n = 2m \text{ и } n \neq 2^k, \\ n^2 + 3, & \text{если } n = 2m + 1 \text{ и } n \geqslant 5. \end{cases}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Для любых натуральных* q, n, $q \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, *справедливы неравенства*

$$\frac{1}{2}qn\log q \leqslant L_{\text{КС}}(f_q(x_1,\dots,x_n)) \leqslant q^2 n,$$

$$\max\big((1/2)qn\log q,\ (q-1)n^2\big) \leqslant L_\pi(f_q(x_1,\dots,x_n)) \leqslant q^2 n^{1+\log q}.$$

Доказательство. Неравенство

$$\frac{1}{2}qn\log q \leqslant L_{\text{КС}}(f_q(x_1,\dots,x_n))$$

является непосредственным следствием следующего утверждения: *для любых двух переменных* x_i, x_j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, *и любой* q*-ичной контактной схемы* S, *реализующей функцию* $f_q(x_1,\dots,x_n)$, *число контактов в* S, *помеченных символами* x_i^δ *и* x_j^δ, $0 \leqslant \delta \leqslant q-1$, *не меньше* $\frac{1}{2}qn\log q$.

Докажем это утверждение. В схеме S, реализующей функцию $f_q(x_1,\dots,x_n)$, удалим контакты, помеченные символами x_k^δ, $1 \leqslant \delta \leqslant q-1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $k \neq i, j$. Кроме того, замкнём накоротко контакты, помеченные символами x_k^0, $1 \leqslant k \leqslant n$, $k \neq i, j$ (т. е. удалим их, отождествив соответствующие вершины схемы). Схему, полученную из S в результате этих преобразований, обозначим через S'. Ясно, что q-ичная контактная схема S' реализует функцию $f_q(x_i, x_j)$ и сложность S' равна числу контактов в S, помеченных символами x_i^δ и x_j^δ, $0 \leqslant \delta \leqslant q-1$.

Зафиксируем q переменных $y_1,\dots,y_q$, определённых на множестве B_2. Контакты схемы S' переобозначим следующим образом: для каждого δ, $1 \leqslant \delta \leqslant q-1$, контактам, имеющим метки x_i^δ и $x_j^{q-\delta}$, припишем символ y_δ^1; контактам, имеющим метки x_i^0 и x_j^0, припишем символ y_q^1. Схему, полученную из S' в результате этих преобразований, обозначим через S''. Нетрудно понять, что схема S'' это двоичная (обычная) контактная схема, реализующая булеву функцию

$$\varphi(y_1,\dots,y_q) = \bigvee_{1\leqslant k<l\leqslant q} y_k y_l.$$

Отметим, что S'' является монотонной контактной схемой, так как в ней нет размыкающих контактов, т. е. контактов, помеченных y_i^0, $1 \leqslant i \leqslant q$. Как известно [9, 2], сложность монотонной контактной схемы, реализующей булеву функцию $\varphi(y_1,\dots,y_q)$, не меньше $q\log q$. Утверждение доказано.

Докажем неравенство $L_{\text{КС}}(f_q(x_1,\dots,x_n)) \leqslant q^2 n$. Для этого построим q-ичную контактную схему S сложности $q^2 n$, реализующую функцию $f_q(x_1,\dots,x_n)$.

Рассмотрим граф $G(V, E)$, множество вершин V которого разбито на $n+1$ попарно не пересекающихся подмножеств $V_0, V_1, \ldots, V_n$ мощности q каждое. Множество рёбер E этого графа определим следующим образом:

$$E = E_1 \cup \ldots \cup E_n, \quad \text{где} \quad E_i = V_{i-1} \times V_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Метки рёбрам графа G припишем по следующему правилу. Вершины в каждом из множеств $V_0, V_1, \ldots, V_n$ занумеруем целыми числами от 0 до $q-1$. Пусть e — ребро из множества E_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, соединяющее вершину с номером k из множества V_{i-1} с вершиной с номером p из множества V_i; δ — число из множества $\{0, 1, \ldots, q-1\}$, заданное равенством $\delta = p - k \pmod{q}$. Тогда ребру e припишем символ x_i^{δ}.

Вершину с номером 0 из множества V_0 обозначим через A. Вершину с номером j из множества V_n для каждого j, $0 \leqslant j \leqslant q-1$, обозначим через b_j. Рассмотрим q-ичную контактную схему S', которая получается из графа $G(V, E)$ выделением вершин A, $b_0, \ldots, b_{q-1}$ в качестве полюсов.

Заметим, что для любого набора $\delta_1, \ldots, \delta_n$ значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ и для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, справедливо следующее утверждение: множество тех контактов из E_i, которые замкнуты на наборе $\delta_1, \ldots, \delta_n$, является паросочетанием в графе $G(V, E)$, покрывающем множество вершин V_{i-1} и множество вершин V_i. Поэтому в схеме S' существует единственная цепь, которая соединяет полюс A с некоторым полюсом b_j, $0 \leqslant j \leqslant q-1$, все контакты которой замкнуты на наборе $\delta_1, \ldots, \delta_n$. При этом, очевидно, выполнено равенство $j = \delta_1 + \ldots + \delta_n \pmod{q}$.

В качестве q-ичной контактной схемы S возьмём схему, которая получается из S' «склеиванием» вершин $b_1, \ldots, b_{q-1}$ в одну новую вершину B. Полюсами схемы S считаем вершины A и B. Ясно, что схема S реализует функцию $f_q(x_1, \ldots, x_n)$ и имеет сложность $q^2 n$.

Неравенство
$$\frac{1}{2} qn \log q \leqslant L_\pi(f_q(x_1, \ldots, x_n))$$
является непосредственным следствием неравенства

$$\frac{1}{2} qn \log q \leqslant L_{\text{КС}}(f_q(x_1, \ldots, x_n)).$$

Докажем, что
$$(q-1)n^2 \leqslant L_\pi(f_q(x_1, \ldots, x_n)).$$

Доказательство этого неравенства опирается на метод В. М. Храпченко получения нижних оценок сложности π-схем [5, 6, 3]. Пусть G — двудольный граф с множествами вершин V и рёбер E. Ниже записи

$G(X,Y,E)$ и $G = G(X,Y,E)$ будут означать, что G — полный двудольный граф с долями X, Y и множеством рёбер $E = X \times Y$. Для графов $G = G(X,Y,E)$ и $G = G'(X',Y',E')$ запись $G \subseteq G'$ будет означать, что $X \subseteq X'$, $Y \subseteq Y'$.

Набор графов $G_1 = G(X_1,Y_1,E_1),\ldots,G_l = G(X_l,Y_l,E_l)$ будем называть *покрытием графа* $G = G(X,Y,E)$, если выполнены следующие условия:

$$G_i \subseteq G,\ \ i = 1,\ldots,l;$$

$$E_1 \cup \ldots \cup E_l = E.$$

Покрытие $G_1,\ldots,G_l$ графа $G = G(X,Y,E)$ будем называть *разбиением*, если $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Пусть $G_1,\ldots,G_l$ — разбиение, $G'_1,\ldots,G'_k$ — покрытие графа $G = G(X,Y,E)$. Будем говорить, что разбиение $G_1,\ldots$, G_l вписано в покрытие $G'_1,\ldots,G'_k$, если для каждого графа G_i из набора $G_1,\ldots$, G_l найдётся такой граф G'_j из набора $G'_1,\ldots,G'_k$, что $G_i \subseteq G'_j$.

Пусть f — произвольная функция, заданная на множестве B_q^n, значения которой принадлежат множеству $\{0,1\}$. Через $N_0(f)$ $(N_1(f))$ обозначим множество таких наборов $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \subseteq B_q^n$, на которых f принимает значение 0 (1). Обозначим граф $G(N_0(f),N_1(f),N_0(f)\times N_1(f))$ через $G(f)$ и назовём графом функции f.

Функции $f : B_q^n \to \{0,1\}$ сопоставим набор из nq графов

$$\widehat{G}_i^\delta(f) = \widehat{G}_i^\delta\bigl(X_i^\delta, Y_i^\delta, E_i^\delta\bigr),\quad i = 1,\ldots,n,\quad \delta = 0,1,\ldots,q-1,$$

по следующему правилу:

$$X_i^\delta = N_0(f) \cap N_0\bigl(x_i^\delta\bigr),\quad Y_i^\delta = N_1(f) \cap N_1\bigl(x_i^\delta\bigr),$$

где $x_i^\delta : B_q^n \to \{0,1\}$ — функция, которая принимает значение 1 на наборе $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in B_q^n$, если $\alpha_i = \delta$.

Ясно, что набор графов $\widehat{G}_i^\delta(f)$, $i = 1,\ldots,n$, $\delta = 0,1,\ldots,q-1$ является покрытием графа $G(f)$. Это покрытие будем называть *каноническим покрытием графа* $G(f)$.

Разбиение $G_1,\ldots,G_l$ графа $G(f)$ будем называть *правильным*, если оно вписано в каноническое покрытие этого графа. Через $\tau(f)$ обозначим такое минимальное число l, для которого существует правильное разбиение $G_1,\ldots,G_l$ графа $G(f)$.

Лемма. *Для любых целых q,n, где $q \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, и произвольной функции $f : B_q^n \to \{0,1\}$ справедливо неравенство*

$$\tau(f) \leqslant L_\pi(f).$$

Доказательство. Пусть S — произвольная q-ичная π-схема, реализующая функцию f, и пусть l — число контактов в S. Для доказательства леммы достаточно построить правильное разбиение графа $G(f)$, содержащее l графов. Правильное разбиение $G_1(X_1, Y_1, E_1), \ldots, G_l(X_l, Y_l, E_l)$ построим следующим образом.

Цепью π-схемы S называется такая простая цепь в S, которая соединяет полюса схемы. Каждому набору $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in N_1(f)$ поставим в соответствие некоторую цепь π-схемы S, все контакты которой замкнуты на наборе $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Нетрудно понять, что для каждого набора $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in N_1(f)$ такая цепь найдётся.

Тупиковым сечением π-схемы S называется такое минимальное по включению множество контактов этой схемы, которое имеет непустое пересечение с каждой цепью схемы. Каждому набору $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_0(f)$ поставим в соответствие некоторое тупиковое сечение π-схемы S, все контакты которого разомкнуты на наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ясно, что для каждого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_0(f)$ такое тупиковое сечение найдётся.

Контакты π-схемы S занумеруем числами от 1 до l. Граф

$$G_j(X_j, Y_j, E_j), \quad j = 1, \ldots, l,$$

определим так: X_j — множество таких наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_0(f)$, что соответствующие им тупиковые сечения π-схемы S содержат контакт с номером j; Y_j — множество таких наборов $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in N_1(f)$, что соответствующие им цепи π-схемы S содержат контакт с номером j.

Индукцией по сложности π-схемы нетрудно доказать, что каждая цепь и каждое тупиковое сечение π-схемы S имеют ровно один общий контакт [5]. Поэтому набор графов $G_1, \ldots, G_l$ является разбиением графа $G(f)$.

Рассмотрим контакт с номером j, $j = 1, \ldots, l$, π-схемы S. Этот контакт помечен некоторым символом x_i^δ, $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant \delta \leqslant q-1$. Поэтому справедливо соотношение $G_j \subseteq \widehat{G}_i^\delta(f)$. Таким образом, разбиение $G_1, \ldots, G_l$ графа $G(f)$ является правильным. Лемма доказана.

В силу леммы, чтобы доказать неравенство

$$(q-1)n^2 \leqslant L_\pi(f_q(x_1, \ldots, x_n)),$$

достаточно показать, что

$$(q-1)n^2 \leqslant \tau(f_q(x_1, \ldots, x_n)).$$

Рассмотрим произвольное правильное разбиение $G_1(X_1, Y_1, E_1), \ldots, G_l(X_l, Y_l, E_l)$ графа $G(f_q(x_1, \ldots, x_n))$.

Пусть $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_q^n$ и $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B_q^n$. Через $\rho(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ обозначим число таких разрядов, в которых наборы $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ различаются. Через $R(f_q(x_1, \ldots, x_n))$ обозначим множество таких рёбер $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ графа $G(f_q(x_1, \ldots, x_n))$, для которых $\rho(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = 1$.

Покажем, что для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant l$, множество рёбер $E_j \cap R(f_q(x_1, \ldots, x_n))$ является паросочетанием в графе $G(f_q(x_1, \ldots, x_n))$. Зафиксируем некоторое j и рассмотрим произвольное ребро $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \in E_j \cap R(f_q(x_1, \ldots, x_n))$. Поскольку разбиение $G_1, \ldots, G_l$ графа $G(f_q(x_1, \ldots, x_n))$ является правильным, существуют такие i, δ, $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant \delta \leqslant q-1$, что $G_j \subseteq \widehat{G}_i^\delta(f_q(x_1, \ldots, x_n))$. Поэтому

$$\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in N_1(f_q(x_1, \ldots, x_n)) \cap N_1\big(x_i^\delta\big),$$

$$\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_0(f_q(x_1, \ldots, x_n)) \cap N_0\big(x_i^\delta\big).$$

Поскольку $\rho(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = 1$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\beta_i = \delta \neq \alpha_i;\\
&\beta_k = \alpha_k,\ k = 1, \ldots, n,\ k \neq i;\\
&\alpha_i = -\sum_{k=1}^{i-1} \beta_k - \sum_{k=i+1}^{n} \beta_k \pmod q.
\end{aligned}$$

Таким образом, компоненты набора $\overline{\beta}$ однозначно вычисляются через i, δ и компоненты набора $\overline{\alpha}$; также компоненты набора $\overline{\alpha}$ однозначно вычисляются через i и компоненты набора $\overline{\beta}$. Это означает, что любые два ребра из множества $E_j \cap R(f_q(x_1, \ldots, x_n))$ независимы.

Обозначим мощность множества $E_j \cap R(f_q(x_1, \ldots, x_n))$ через r_j, $j = 1, \ldots, l$. Следующие соотношения очевидны:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{l} r_j = |R(f_q(x_1, \ldots, x_n))|,\\
&\sum_{j=1}^{l} r_j^2 \leqslant \sum_{j=1}^{l} |E_j| = |N_0(f_q(x_1, \ldots, x_n))| \cdot |N_1(f_q(x_1, \ldots, x_n))|.
\end{aligned}$$

Неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^{l} r_j\right)^2 \leqslant l \sum_{j=1}^{l} r_j^2$$

является частным случаем неравенства Коши — Буняковского. Как следствие имеем

$$\frac{|R(f_q(x_1,\ldots,x_n))|^2}{|N_0(f_q(x_1,\ldots,x_n))|\cdot|N_1(f_q(x_1,\ldots,x_n))|}\leqslant l\ .$$

Нетрудно посчитать, что

$$|N_0(f_q(x_1,\ldots,x_n))| = q^{n-1},$$
$$|N_1(f_q(x_1,\ldots,x_n))| = (q-1)q^{n-1},$$
$$|R(f_q(x_1,\ldots,x_n))| = n(q-1)q^{n-1}.$$

Поэтому $(q-1)n^2 \leqslant l$, что и требовалось доказать.

Докажем неравенство

$$L_\pi(f_q(x_1,\ldots,x_n)) \leqslant q^2 n^{1+\log q}.$$

Для каждого $i,\ i=0,1,\ldots,q-1$, на множестве B_q^n определим функцию

$$f_q^i(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1+\ldots+x_n = i \pmod q; \\ 1 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Отметим, что определение функции $f_q^0(x_1,\ldots,x_n)$ совпадает с определением функции $f_q(x_1,\ldots,x_n)$.

Пусть k, ρ — такие натуральные числа, что

$$n = 2^k+\rho,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 2^k.$$

Покажем индукцией по n, что для каждой функции $f_q^i(x_1,\ldots,x_n)$, $0\leqslant i\leqslant q-1$, существует реализующая её q-ичная π-схема сложности

$$(q-1)q^k(2^k+(2q-1)\rho) < q^2 n^{1+\log q}.$$

Действительно, q-ичная π-схема, являющаяся параллельным соединением $q-1$ контактов, помеченных соответственно символами x_1^δ, $\delta = 0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,q-1$, реализует функцию $f_q^i(x_1)$ и имеет сложность $q-1 = (q-1)q^0(2^0+(2q-1)\cdot 0)$.

Рассмотрим два таких натуральных числа $n_1,\ n_2$, что

$$n_1+n_2 = n,\ \ n_1 = 2^{k-1}+\rho_1,\ \ n_2 = 2^{k-1}+\rho_2,\ \ 0\leqslant\rho_1\leqslant 2^{k-1},\ \ 0\leqslant\rho_2\leqslant 2^{k-1}.$$

Предположим, что для каждой функции $f_q^l(x_1,\ldots,x_{n_1}),\ 0\leqslant l\leqslant q-1$, построена реализующая её q-ичная π-схема сложности

$$(q-1)q^{k-1}(2^{k-1}+(2q-1)\rho_1);$$

для каждой функции $f_q^p(x_{n_1+1}, \dots, x_n)$, $0 \leqslant p \leqslant q-1$, построена реализующая её q-ичная π-схема сложности

$$(q-1)q^{k-1}(2^{k-1} + (2q-1)\rho_2).$$

Тогда q-ичную π-схему S, реализующую функцию $f_q^i(x_1, \dots, x_n)$, построим в соответствии с формулой

$$f_q^i(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l+p=i \pmod q} \big(f_q^l(x_1, \dots, x_{n_1}) \vee f_q^p(x_{n_1+1}, \dots, x_n)\big).$$

Ясно, что схема S имеет сложность

$$q((q-1)q^{k-1}(2^{k-1} + (2q-1)\rho_1) + (q-1)q^{k-1}(2^{k-1} + (2q-1)\rho_2)) \\ = (q-1)q^k(2^k + (2q-1)\rho) < q^2 n^{1+\log q}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В.** Об одном подходе к получению нижних оценок сложности для булевых функций // Дискрет. анализ. Вып. 35. — Новосибирск: Ин-т математики, 1980. — С. 3–8.
2. **Нигматулин Р. Г.** Сложность булевых функций. — М.: Наука, 1991. — 240 с.
3. **Рычков К. Л.** Модификация метода В. М. Храпченко и применение её к оценкам сложности П-схем для кодовых функций // Дискрет. анализ. Вып. 42. — Новосибирск: Ин-т математики, 1985. — С. 91–98.
4. **Рычков К. Л.** О нижних оценках сложности параллельно-последовательных контактных схем, реализующих линейные булевы функции // Сиб. журн. исслед. операций. — 1994. — Т. 1, № 4. — С. 33–52.
5. **Храпченко В. М.** О сложности реализации линейной функции в классе П-схем // Мат. заметки. — 1971. — Т. 9, № 1. — С. 35–40.
6. **Храпченко В. М.** Об одном методе получения нижних оценок сложности П-схем // Мат. заметки. — 1971. — Т. 10, № 1. — С. 83–92.
7. **Яблонский С. В.** Реализация линейной функции в классе П-схем // Докл. АН СССР. — 1954. — Т. 94, № 5. — С. 805–806.
8. **Cardot C.** Quelques résultats sur l′application de l′algèbre de Boole à la synthèse des circuits à relais // Ann. Telecomm. — 1952. — Vol. 7, N 2. — P. 75–84.

9. **Hansel G.** Nombre minimal de contacts de fermeture nécessaires pour réaliser une fonction booléenne symétrique de n variables // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1964. — Vol. 258, N 25, Gr. 1. — P. 6037–6040.

Рычков Константин Леонидович,
e-mail: rychkov@math.nsc.ru

Статья поступила
5 июня 2009 г.