ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2002. Серия 1. Том 9, № 2, 3–20

УДК 519.17

ОЦЕНКИ ДЛЯ ЧИСЛА ВЫРОЖДЕННОСТИ ГРАФОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ БОКСОВ НА ПЛОСКОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ОБХВАТА*)

А. Н. Глебов

Боксом на плоскости с заданной прямоугольной системой координат называется прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям. *B-граф* определяется как граф пересечений произвольного семейства боксов. Доказано, что всякий B-граф с обхватом не менее 5 является 5-вырожденным и предписанно 5-раскрашиваемым. Приводятся примеры B-графов с обхватом 5 и минимальной степенью 4 и с обхватом 7 и минимальной степенью 3. Первый пример говорит о неулучшаемости доказанной верхней оценки для числа вырожденности B-графов с обхватом не менее 5. Оба примера доказывают неулучшаемость известных оценок, согласно которым B-графы с обхватом не менее 6 (соответственно 8) являются 4(3)-вырожденными.

Введение

Если на плоскости задана прямоугольная система координат, то *боксом* называется любой прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям. Если $\mathscr{B}$ — конечное семейство боксов, то через $G(\mathscr{B})$ будем обозначать граф пересечений семейства $\mathscr{B}$. Графы пересечений семейств боксов (далее *B-графы*) рассматривались в [1], где было доказано, что хроматическое число любого B-графа не превосходит $4\omega^2 - 3\omega$, где через ω обозначено кликовое число графа, т. е. число вершин в его наибольшей клике. Для B-графов без 3-циклов в [1] доказано, что все такие графы являются 6-раскрашиваемыми, и приведен пример 6-хроматического B-графа без 3-циклов.

В [4] исследовалась связь между числом вырожденности и обхватом для B-графов с обхватом не менее 6. Напомним, что граф называется *k-вырожденным*, если в любом его подграфе имеется вершина степени менее k. Наименьшее целое число k такое, что граф G является

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00–01–00916) и голландско-российской программы NWO (грант 047–008–006).

k-вырожденным, называется *числом вырожденности* графа G. Относительно вырожденности B-графов в [4] доказана следующая

Теорема 1. *Если B-граф G имеет обхват не менее 8 (соответственно 6), то средняя степень вершин в G строго меньше 3 (соответственно 4).*

Следствие 1. *Любой B-граф с обхватом не менее 8 (6) является 3- (4)-вырожденным и предписанно 3- (4)-раскрашиваемым.*

В настоящей статье дается более простое, чем в [4], доказательство 4- и 3-вырожденности B-графов с обхватом 6 и 8. Аналогичный результат получен для B-графов с обхватом 5, а именно доказана следующая

Теорема 2. *Если B-граф G имеет обхват не менее 8 (соответственно $6, 5$), то граф G является 3-вырожденным (соответственно 4-, 5-вырожденным).*

Следствие 2. *Если B-граф G имеет обхват не менее 8 (соответственно $6, 5$), то G является предписанно 3-(соответственно 4-, 5)$-$раскрашиваемым.*

В последнем разделе статьи приводятся такие примеры семейств боксов $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$, что граф $G(\mathscr{B}_1)$ имеет обхват 5 и минимальную степень 4, а граф $G(\mathscr{B}_1)$ — обхват 7 и минимальную степень 3. Эти примеры показывают, что все верхние оценки для числа вырожденности B-графов из теоремы 2 являются неулучшаемыми. Необходимо добавить, что существуют B-графы с обхватом 4 и сколь угодно большой минимальной степенью, а следовательно, и сколь угодно большим числом вырожденности (например, все полные двудольные графы, реализуемые решетками из боксов).

Далее всюду рассматриваются конечные неориентированные графы и мультиграфы без петель. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаются множества вершин и ребер (мульти)графа G соответственно. Обозначение $d(v)$ используется для степени вершины $v \in V(G)$. Под d-вершиной и m-циклом понимаются вершина степени d и простой цикл длины m соответственно. Через $\delta(G)$ обозначается минимальная степень вершин в G, а через $g(G)$ — обхват графа G, т. е. длина кратчайшего простого цикла в G. Если G — плоский (мульти)граф, то через $F(G)$ обозначается множество всех граней (мульти)графа G. *Рангом* грани f (обозначение $r(f)$) называется длина граничного цикла грани f. Если $r(f) = r$, то грань f будем называть r-гранью. Через G^* обозначается плоский (мульти)граф, геометрически двойственный к G.

Говорят, что на множестве вершин графа G задано предписание L размера k, если определены множество цветов $\mathscr{C}$ и отображение

$L : V(G) \to 2^{\mathscr{C}}$ такие, что $|L(v)| = k$ при каждом $v \in V(G)$. Граф G называется *предписанно k-раскрашиваемым*, если для любого множества $\mathscr{C}$ (где $|\mathscr{C}| \geqslant k$) и любого предписания $L : V(G) \to 2^{\mathscr{C}}$ размера k существует такая правильная раскраска $c : V(G) \to \mathscr{C}$ вершин графа G, что $c(v) \in L(v)$ при каждом $v \in V(G)$ (т. е. цвет каждой вершины принадлежит ее предписанию). Наименьшее целое число k такое, что граф G является предписанно k-раскрашиваемым, называется *списочным хроматическим числом* графа G и обозначается через $\chi_l(G)$.

1. Типы пересечений боксов

Пусть $\mathscr{B}$ — конечное семейство боксов на плоскости. Будем отождествлять бокс $B \in \mathscr{B}$ и соответствующую ему вершину графа $G(\mathscr{B})$. Заметим, что граф $G(\mathscr{B})$, вообще говоря, не является планарным. Не уменьшая общности, можно считать, что все стороны боксов из $\mathscr{B}$ принадлежат различным прямым. Отсюда следует, что если два бокса из $\mathscr{B}$ пересекаются, то их пересечение имеет непустую внутренность.

Введем следующую классификацию пересечений боксов из $\mathscr{B}$ (и ребер из $G(\mathscr{B})$), аналогичную рассмотренной в [4] (рис. 1). Пусть $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ и $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$. Будем говорить, что боксы B_1 и B_2 *x-пересекаются*, если ни одна вершина бокса B_i $(i = 1, 2)$ не принадлежит внутренности бокса B_{3-i}. Будем говорить, что боксы B_1 и B_2 *y-пересекаются*, если при некотором $i \in \{1, 2\}$ в точности две (смежные) вершины бокса B_i принадлежат внутренности бокса B_{3-i}. Будем говорить, что боксы B_1 и B_2 *z-пересекаются*, если каждый бокс B_i $(i = 1, 2)$ содержит в точности одну вершину бокса B_{3-i}. Наконец, будем говорить, что боксы B_1 и B_2 *t-пересекаются*, если при некотором $i \in \{1, 2\}$ бокс B_i целиком содержится во внутренности бокса B_{3-i}.

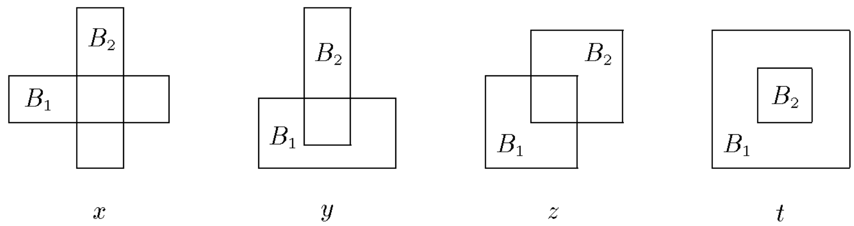


Рис. 1. Типы пересечений боксов

Нетрудно заметить, что этим исчерпываются все возможные пересечения боксов из $\mathscr{B}$. Следовательно, множество ребер графа $G(\mathscr{B})$ можно разбить на четыре подмножества, называемых множествами *x-, y-, z- и t-ребер*, в соответствии с типом пересечения боксов из $\mathscr{B}$. Для каждого $B \in \mathscr{B}$ обозначим через $d_x(B), d_y(B), d_z(B)$ и $d_t(B)$ соответственно число x-, y-, z- и t-ребер, инцидентных вершине B в $G(\mathscr{B})$. Тогда $d(B) = d_x(B) + d_y(B) + d_z(B) + d_t(B)$.

Очевидно, что для каждого B-графа G имеется бесконечно много (континуум) таких семейств боксов $\mathscr{B}$, что $G \simeq G(\mathscr{B})$. Эти семейства будем называть *представлениями* B-графа G. Ясно, что число x-, y-, z- и t-ребер в G зависит от выбора представления. Следующее предложение описывает простые достаточные условия отсутствия t-ребер в G.

Предложение. *Если G является B-графом без 3-циклов и $\delta(G) \geqslant 2$, то в любом представлении графа G отсутствуют t-пересечения боксов.*

Доказательство. Предположим, что боксы B и B' из некоторого представления $\mathscr{B}$ графа G t-пересекаются, т. е. $B' \subset B$. Тогда из условия $\delta(G) \geqslant 2$ следует, что в $\mathscr{B}$ найдется такой бокс $B'' \neq B$, что $B' \cap B'' \neq \varnothing$. Так как $B' \subset B$, то $B \cap B' \cap B'' \neq \varnothing$, что противоречит отсутствию 3-циклов в G. Предложение доказано.

2. Мультиграфы $\Gamma(\mathscr{B}), \Gamma^*(\mathscr{B})$ и $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$, нижние оценки степеней вершин из $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$

Пусть $\mathscr{B}$ — представление B-графа G. Представление $\mathscr{B}$ назовем *стандартным*, если боксы из $\mathscr{B}$ не образуют t-пересечений и образуют минимальное число x-пересечений (т. е. число x-ребер в $G(\mathscr{B})$ минимально).

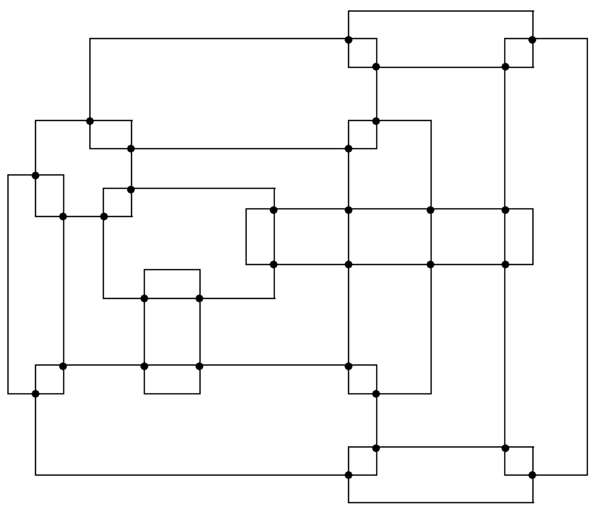


Рис. 2. Семейство $\mathscr{B}$ и графический мультиграф $\Gamma(\mathscr{B})$

Пусть G — связный B-граф без 3-циклов и $\delta(G) \geqslant 2$. Зафиксируем стандартное представление $\mathscr{B}$ графа G. Определим *графический* *мультиграф* $\Gamma(\mathscr{B})$. В качестве множества вершин в $\Gamma(\mathscr{B})$ рассмотрим множество всех точек пересечения сторон боксов из $\mathscr{B}$, а в качестве множества ребер — множество участков границ боксов, заключенных между соседними вершинами из $\Gamma(\mathscr{B})$ (эти участки могут содержать вершины самих боксов, которые по определению не являются вершинами в $\Gamma(\mathscr{B})$) (рис. 2). Очевидно, что $\Gamma(\mathscr{B})$ — это 4-однородный плоский мультиграф, гранями которого являются области на плоскости, образованные границами боксов из $\mathscr{B}$. Данное определение несколько отличается от определения графического графа из [3] и [4], где вершины боксов из $\mathscr{B}$ также входят в $\Gamma(\mathscr{B})$.

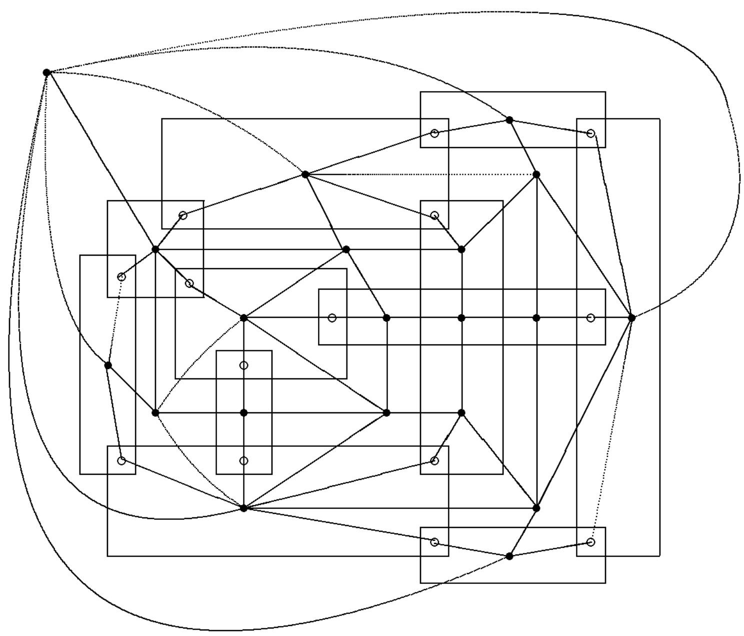


Рис. 3. Двойственный мультиграф $\Gamma^*(\mathscr{B})$

Через $\Gamma^*(\mathscr{B})$ обозначим плоский мультиграф, геометрически двойственный к $\Gamma(\mathscr{B})$ (рис. 3). Будем говорить, что грань $f \in F(\Gamma(\mathscr{B}))$ и соответствующая ей вершина из $\Gamma^*(\mathscr{B})$ имеют *тип* i ($i = 0, 1, 2$), если грань f образована пересечением i боксов из $\mathscr{B}$. Из отсутствия 3-циклов в G следует, что тип любой грани из $F(\Gamma(\mathscr{B}))$ не превосходит 2 и любая грань типа 2 имеет прямоугольную форму. Множество всех граней типа 2 и соответствующих им вершин из $\Gamma^*(\mathscr{B})$ разобьем на *подтипы* x, y и z в зависимости от типа пересечения боксов, образующих грань. Заметим, что степени всех вершин типа x в $\Gamma^*(\mathscr{B})$ равны 4, а степени вершин типов y и z равны 2. На рис. 3 вершины типов y и z изображены в виде незакрашенных кружков, а вершины остальных типов — в виде закрашенных.

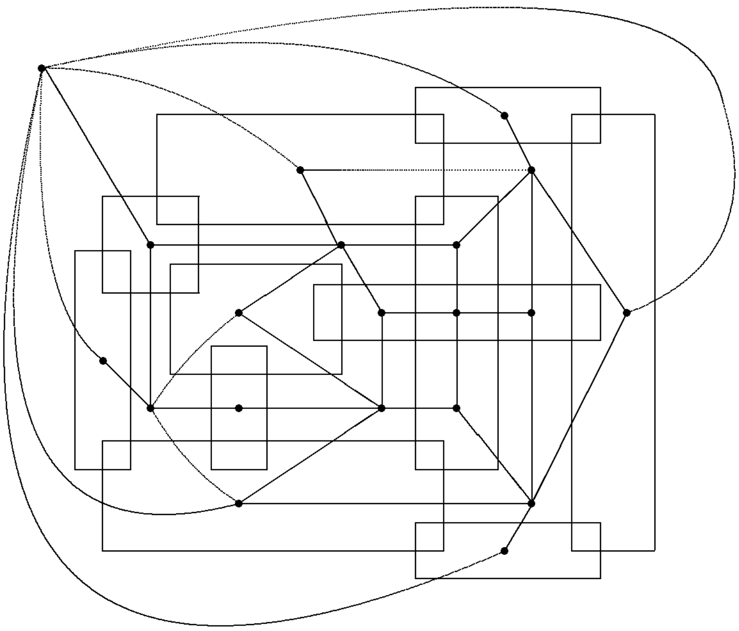


Рис. 4. Мультиграф $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$

Обозначим через $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ подграф в $\Gamma^*(\mathscr{B})$, получаемый удалением всех вершин типа y и z вместе с инцидентными им ребрами (рис. 4). Так как любая вершина типа i в $\Gamma^*(\mathscr{B})$ смежна только с вершинами типов $i-1$ и $i+1$, то $\Gamma^*(\mathscr{B})$ и $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ — плоские двудольные мультиграфы, не содержащие граней ранга 2 (последнее следует из определения мультиграфов $\Gamma^*(\mathscr{B})$ и $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ и условия $\delta(G) \geqslant 2$).

Если v — вершина в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ и f — грань в $\Gamma(\mathscr{B})$, то через $d(v)$ и $r(f)$ будем обозначать степень вершины v в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ и ранг грани f в $\Gamma(\mathscr{B})$. Тогда если вершина v и грань f соответствуют друг другу при двойственности и имеют тип 0 или x, то $d(v) = r(f)$. Если же вершина v и отвечающая ей грань f имеют тип 1, то равенство $d(v) = r(f)$ возможно лишь в случае, когда грань f не смежна с гранями типа y и z в $\Gamma(\mathscr{B})$.

Пусть v — вершина типа 1 в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$, $f \in F(\Gamma(\mathscr{B}))$ — соответствующая ей грань и B — бокс из $\mathscr{B}$, содержащий грань f. Вершину v, грань f и бокс B назовем *простыми*, если $d_x(B) = 0$. Ясно, что каждый простой бокс содержит только одну (простую) грань, а произвольный бокс $B \in \mathscr{B}$ содержит в точности $d_x(B)+1$ граней типа 1 и $d_x(B)$ граней типа x. Пусть $d_x(B) = m > 0$, $f_1, \dots, f_{m+1}$ — грани типа 1, последовательно расположенные внутри бокса B, и $v_1, \dots, v_{m+1}$ — соответствующие им вершины из $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ (рис. 5). Вершины v_1, v_{m+1} и грани f_1, f_{m+1} назовем *торцевыми*, а вершины v_i и грани f_i при $2 \leqslant i \leqslant m$ — *внутренними*. Тогда каждая вершина из $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ является простой, внутренней, торцевой (тип 1) или принадлежит одному из типов 0 или x.

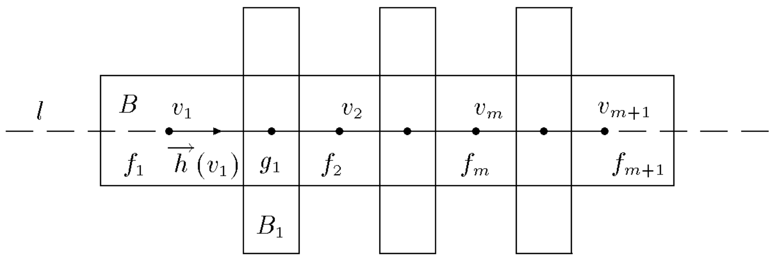


Рис. 5. Ось бокса B, вершины типа 1 и направляющий вектор вершины v_1

Оценим снизу степени вершин различных типов из $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$.

Лемма 1. *Для любой вершины v из $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ выполняются неравенства*

$$d(v) \geqslant \begin{cases} g(G), & \text{если } v \text{ — вершина типа } 0, \\ \delta(G), & \text{если } v \text{ — простая вершина}, \\ 4, & \text{если } v \text{ — внутренняя вершина или вершина типа } x, \\ 3, & \text{если } v \text{ — торцевая вершина.} \end{cases}$$

Доказательство. В силу условия $\delta(G) \geqslant 2$ в графе G имеется хотя бы один простой цикл. Следовательно, обхват $g(G)$ графа G определен и конечен. Докажем, что $d(v) \geqslant g(G)$ для любой вершины v типа 0 из $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$. Рассмотрим грань $f \in F(\Gamma(\mathscr{B}))$, соответствующую вершине v, и последовательность $f_1, \dots, f_m$ граней типа 1 из $F(\Gamma(\mathscr{B}))$, смежных с гранью f в циклическом порядке. Пусть $B_1, \dots B_m$ — боксы из $\mathscr{B}$, в которых содержатся грани $f_1, \dots, f_m$. Ясно, что $B_i \cap B_{i+1} \neq \varnothing$ при $i = 1, \dots, m-1$. Следовательно, граф $G[\{B_1, \dots B_m\}]$ связен. Если $G[\{B_1, \dots B_m\}]$ — ациклический подграф в $G(\mathscr{B})$, то грань f является внешней для $\Gamma(\mathscr{B})$. При этом $\mathscr{B} = \{B_1, \dots B_m\}$, что противоречит наличию простого цикла в G. Следовательно, подграф $G[\{B_1, \dots B_m\}]$ содержит цикл длины не более m. Поэтому $d(v) = r(f) = m \geqslant g(G)$.

Пусть $v \in V(\Gamma_1^*(\mathscr{B}))$ — вершина типа 1 или типа x. Если v — простая вершина, расположенная внутри бокса B, то v смежна с $d(B)$

вершинами типа 0. Следовательно, $d(v) = d(B) \geqslant \delta(G)$. Если v — внутренняя вершина, то v смежна с двумя вершинами типа x и не менее чем с двумя вершинами типа 0. В этом случае $d(v) \geqslant 4$. Если v — вершина типа x, то v смежна с четырьмя вершинами типа 1. Поэтому $d(v) = 4$.

Пусть $v = v_1$ — торцевая вершина и $f_1 \in F(\Gamma(\mathscr{B}))$ — соответствующая ей торцевая грань, расположенные внутри бокса B. Обозначим через g_1 грань типа x, которая смежна с гранью f_1 и расположена внутри B. Пусть грань g_1 образована x-пересечением бокса B с некоторым боксом $B_1 \in \mathscr{B}$ (см. рис. 5). Тогда грань f_1 смежна с гранью g_1 и по крайней мере с одной гранью типа 0. Если f_1 смежна только с одной гранью типа 0, то f_1 — прямоугольная грань, не смежная с теми боксами из $\mathscr{B}$, которые отличны от B и B_1. В этом случае, укорачивая бокс B, получаем такое представление $\mathscr{B}_1$ графа G, что боксы B и B_1 y-пересекаются. Так как число x-пересечений в $\mathscr{B}_1$ на единицу меньше, чем в $\mathscr{B}$, то получаем противоречие со стандартностью представления $\mathscr{B}$. Следовательно, грань f_1 смежна по крайней мере с двумя гранями типа 0, откуда $d(v_1) \geqslant 3$. Лемма 1 доказана.

3. Торцевые вершины и 3-стыки

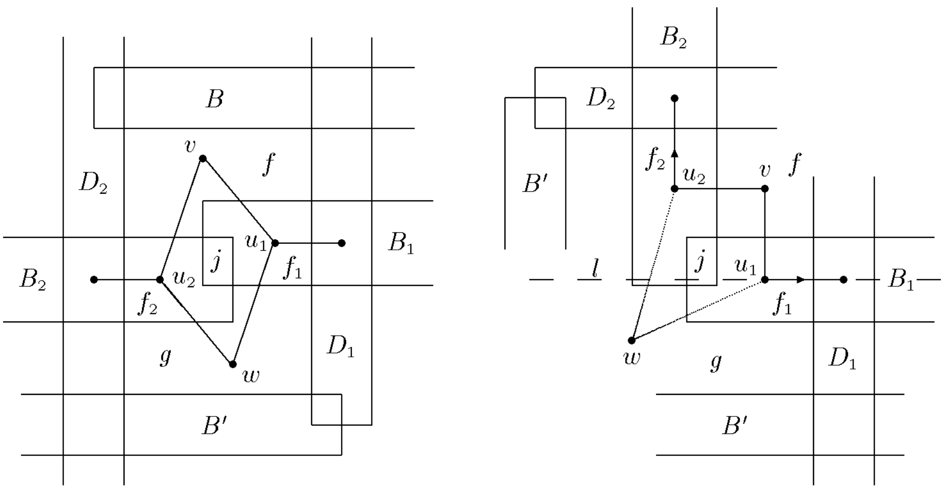
Пусть $\overrightarrow{h}_1$ и $\overrightarrow{h}_2$ — ненулевые векторы на плоскости. Через $\angle(\overrightarrow{h}_1, \overrightarrow{h}_2)$ обозначим величину угла между векторами $\overrightarrow{h}_1$ и $\overrightarrow{h}_2$, измеряемую в положительном направлении (против часовой стрелки) от $\overrightarrow{h}_1$ к $\overrightarrow{h}_2$. Тогда $0 \leqslant \angle(\overrightarrow{h}_1, \overrightarrow{h}_2) < 2\pi$ и $\angle(\overrightarrow{h}_1, \overrightarrow{h}_2) + \angle(\overrightarrow{h}_2, \overrightarrow{h}_1) = 2\pi$.

В предположениях разд. 2 рассмотрим бокс $B \in \mathscr{B}$, не являющийся простым. Тогда $d_x(B) = m > 0$. *Осью* бокса B назовем ту из его осей симметрии, которая параллельна оси координат и пересекает все грани типа 1 в B (см. рис. 5). Пусть v_1 и v_{m+1} — торцевые вершины, расположенные внутри бокса B. *Направляющим вектором* $\overrightarrow{h}(v_1)$ торцевой вершины v_1 назовем единичный вектор, параллельный оси l бокса B и направленный от вершины v_1 к вершине v_{m+1} (см. рис. 5). Поскольку B — единственный бокс, содержащий вершину v, то вектор $\overrightarrow{h}(v_1)$ однозначно определяется выбором вершины v_1. При этом $\overrightarrow{h}(v_{m+1}) = -\overrightarrow{h}(v_1)$.

Обозначим через f_0 и v_0 соответственно бесконечную грань мультиграфа $\Gamma(\mathscr{B})$ и отвечающую ей вершину в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$. Ясно, что грань f_0 и вершина v_0 принадлежат типу 0.

Пусть v — произвольная вершина типа 0 в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$, $f \in F(\Gamma(\mathscr{B}))$ — соответствующая ей грань и $d(v) = r(f) = k \geqslant 5$. Через $u_1, u_2, \ldots, u_k$ обозначим вершины типа 1 из $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$, смежные с вершиной v и перечисленные в порядке обхода вершины v по часовой стрелке (здесь и далее номера вершин рассматриваются по модулю k). Будем говорить, что вершины u_i и u_{i+1} образуют 3-*стык* в окружении вершины v, если вершины u_i и u_{i+1} являются торцевыми вершинами степени 3.

Пусть вершины u_1 и u_2 образуют 3-стык в окружении v. Тогда соответствующие вершинам u_1 и u_2 торцевые грани f_1 и f_2 из $F(\Gamma(\mathscr{B}))$ расположены внутри пересекающихся боксов B_1 и B_2 и смежны с гранью j типа 2, образованной пересечением боксов B_1 и B_2. Обозначим через w и g соответственно вторую вершину типа 0, смежную с вершинами u_1 и u_2, и соответствующую ей грань в $F(\Gamma(\mathscr{B}))$. Тогда вершины u_1 и u_2 образуют 3-стык в окружении как вершины v, так и вершины w (рис. 6).



а *б*

Рис. 6. 3-стык в окружении вершин v и w

Лемма 2. *Пусть $g(G) > 5$ и вершины u_1 и u_2 образуют 3-стык в окружении вершин v и w (при этом вершины u_1 и u_2 перечислены в порядке обхода вершины v по часовой стрелке). Тогда если $d(v) = 5$ или $\angle(\overrightarrow{h}(u_1), \overrightarrow{h}(u_2)) = \pi/2$, то $d(w) \geqslant 6$.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, введенными выше, и обозначим через D_1 и D_2 боксы из $\mathscr{B}$, которые x-пересекаются с боксами B_1 и B_2 и смежны с гранями f_1 и f_2 соответственно (см. рис. 6).

Предположим, что $d(v) = r(f) = 5$. Тогда имеется такой бокс $B \in \mathscr{B}$, пересекающий боксы D_1 и D_2, что граница грани f образована участками границ боксов B_1, D_1, B_2, D_2 и B. Согласно лемме 1 и условию $g(G) \geqslant 5$ имеем $d(w) = r(g) \geqslant 5$. Если $d(w) = 5$, то из стандартности представления $\mathscr{B}$ следует, что $w \neq v_0$ и в $\mathscr{B}$ имеется бокс $B' \neq B$, пересекающий боксы D_1 и D_2 и смежный с гранью g (см. рис. 6, *а*). В этом случае боксы D_1, B, D_2 и B' образуют 4-цикл в G, что противоречит условию $g(G) \geqslant 5$. Следовательно, $d(w) \geqslant 6$.

Предположим, что $\angle(\overrightarrow{h}(u_1), \overrightarrow{h}(u_2)) = \pi/2$. Без потери общности можно считать, что $\overrightarrow{h}(u_1) = (1,0)$ (вектор направлен вправо) и $\overrightarrow{h}(u_2) = (0,1)$ (вектор направлен вверх). Обозначим через l ось бокса B_1. Допустим, что $d(w) = 5$. Тогда из стандартности представления $\mathscr{B}$, как и ранее, следует, что $w \neq v_0$ и имеется бокс $B' \in \mathscr{B}$, пересекающий боксы D_1 и D_2 и смежный с гранью g (см. рис. 6, *б*). Так как грань типа x, образованная пересечением боксов B_2 и D_2, расположена выше грани j, то нижняя сторона бокса D_2 и верхняя сторона бокса B' расположены выше прямой l. С другой стороны, грань типа 2, являющаяся пересечением боксов D_1 и B', расположена ниже грани типа x, образованной пересечением боксов D_1 и B_1. Следовательно, верхняя сторона бокса B' расположена ниже прямой l. Полученное противоречие доказывает, что $d(w) \geqslant 6$. Лемма 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Поскольку при любом натуральном m класс всех B-графов с обхватом не менее m является наследственным, то для доказательства k-вырожденности всех таких графов достаточно доказать, что $\delta(G) < k$ для любого B-графа G с обхватом не менее m. Ясно, что последнее неравенство достаточно доказать для связного графа G.

Пусть G — связный B-граф без 3-циклов, $\delta(G) \geqslant 3$ и $\mathscr{B}$ — стандартное представление графа G. Определим мультиграфы $\Gamma(\mathscr{B}), \Gamma^*(\mathscr{B})$ и $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ как в разд. 2. Положим $V = V(\Gamma_1^*(\mathscr{B}))$, $\Phi = F(\Gamma_1^*(\mathscr{B}))$ и запишем формулу Эйлера для мультиграфа $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ в виде

$$\sum_{v\in V}(d(v)-4) + \sum_{\phi\in\Phi}(r(\phi)-4) = -8. \tag{1}$$

Первоначальным *зарядом вершины* $v \in V \setminus \{v_0\}$ назовем число $\mu(v) = d(v)-4$, а первоначальным *зарядом грани* $\phi \in \Phi$ — число $\mu(\phi) = r(\phi)-4$. Первоначальный заряд вершины v_0 определим как $\mu(v_0) = d(v_0)$. Тогда формула (1) принимает вид

$$\sum_{x\in V\cup\Phi} \mu(x) = -4. \tag{2}$$

В разд. 2 было показано, что мультиграф $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ является двудольным и не содержит граней ранга 2. Поэтому $r(\phi) \geqslant 4$ и $\mu(\phi) \geqslant 0$ для каждой грани $\phi \in \Phi$. Отсюда и из (2) следует, что

$$\sum_{v\in V} \mu(v) \leqslant -4. \tag{3}$$

Согласно лемме 1 при $g(G) \geqslant 4$ и $\delta(G) \geqslant 4$ только торцевые вершины мультиграфа $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ могут иметь степень 3, а значит, обладать отрицательным зарядом, равным -1. Если же $g(G) \geqslant 4$ и $\delta(G) = 3$, то заряд -1 будут иметь торцевые и простые вершины степени 3, а заряд любой другой вершины в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ будет неотрицательным.

Теперь, если имеется контрпример G и его стандартное представление $\mathscr{B}$, для доказательства теоремы достаточно так перераспределить заряды между вершинами из $V = V(\Gamma_1^*(\mathscr{B}))$, чтобы сумма зарядов осталась прежней, а заряд каждой вершины стал неотрицательным. Последнее будет противоречить (3). Предположим, что G — связный B-граф, и рассмотрим следующие три случая.

Случай 1. $g(G) \geqslant 8$. Допустим, что $\delta(G) \geqslant 3$. Тогда согласно лемме 1 имеем $d(v) \geqslant g(G) \geqslant 8$ для любой вершины v типа 0 в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$. Пусть каждая вершина v типа 0 передает заряд $1/2$ каждой смежной 3-вершине типа 1. Тогда после указанного перераспределения заряд вершины v будет не меньше $\mu(v) - d(v)/2 \geqslant d(v) - 4 - d(v)/2 = (d(v) - 8)/2 \geqslant 0$. С другой стороны, из леммы 1 и условия $\delta(G) \geqslant 3$ следует, что каждая вершина типа 1 смежна в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ не менее чем с двумя вершинами типа 0. Поэтому после перераспределения заряд любой такой вершины будет не меньше $-1 + 2 \times 1/2 = 0$. Так как в ходе перераспределения заряды других вершин из $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ не меняются, получаем противоречие с (3). Следовательно, $\delta(G) < 3$.

Случай 2. $g(G) \geqslant 6$. Допустим, что $\delta(G) \geqslant 4$. Тогда $d(v) \geqslant g(G) \geqslant 6$ для любой вершины v типа 0 в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ и (по доказанному) $\mu(v) = -1 < 0$, только если v — торцевая 3-вершина в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$. Перераспределим заряды между вершинами из $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ по следующим правилам.

П1. Если v — вершина типа 0, то v передает заряд $1/3$ каждой смежной вершине типа 1.

П2. Если v — внутренняя или торцевая вершина степени не менее 4, расположенная внутри бокса B, то v передает заряд $1/3$ каждой торцевой 3-вершине, расположенной внутри B.

Обозначим через $\mu_1(v)$ заряд вершины $v \in V(\Gamma_1^*(\mathscr{B}))$ после выполнения правил П1 и П2. Заметим, что если $\mu_1(v) \neq \mu(v)$, то вершина v является внутренней, торцевой или имеет тип 0. Если v — вершина типа 0 в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$, то из леммы 1 следует, что $d(v) \geqslant g(G) \geqslant 6$. Тогда согласно правилу П1 имеем $\mu_1(v) \geqslant \mu(v) - d(v)/3 \geqslant d(v) - 4 - d(v)/3 = 2(d(v) - 6)/3 \geqslant 0$.

Пусть v — внутренняя или торцевая вершина, расположенная внутри бокса B и передающая заряд по правилу П2. Если v — внутренняя вершина, то v получает заряд $1/3$ не менее чем от двух смежных вершин типа 0 по правилу П1 и передает заряд $1/3$ не более чем двум торцевым вершинам бокса B по правилу П2. Если v — торцевая вершина и $d(v) \geqslant 4$, то v получает заряд $1/3$ не менее чем от трех смежных вершин типа 0 (так как v смежна лишь с одной вершиной типа x) и передает заряд $1/3$ не более чем одной торцевой вершине бокса B. В любом случае имеем $\mu_1(v) \geqslant \mu(v) \geqslant 0$.

Пусть v — торцевая 3-вершина, расположенная внутри бокса B, и v' — другая торцевая вершина внутри B. Тогда вершина v получает заряд $1/3$ от каждой из двух смежных вершин типа 0 по правилу П1. Кроме того, если $d_x(B) \geqslant 2$, то v получает заряд $1/3$ по правилу П2 от внутренней вершины, расположенной внутри бокса B. Если же $d_x(B)=1$, то из условия $d(B) \geqslant \delta(G) \geqslant 4$ следует, что $d(v') \geqslant 4$. В этом случае вершина v получает заряд $1/3$ от вершины v'. Во всех случаях имеем $\mu_1(v) \geqslant -1 + 3 \times 1/3 = 0$. Полученное противоречие с (3) доказывает, что $\delta(G) < 4$.

Случай 3. $g(G) \geqslant 5$. Допустим, что $\delta(G) \geqslant 5$. Из леммы 1 следует, что $d(v) \geqslant 5$, если вершина $v \in V$ имеет тип 0, и $\mu(v) \geqslant 0$, если v не является торцевой 3-вершиной. Перераспределим заряды между вершинами из V по следующим правилам.

П3. Каждая вершина $v \in V$ типа 0 передает заряд $1/4$ каждой смежной внутренней 4-вершине и каждой смежной торцевой 3-вершине, не входящей в 3-стык в окружении v.

П4. Пусть $v \in V$ — вершина типа 0 и вершины u_1 и u_2 образуют 3-стык в окружении вершины v (причем вершины u_1 и u_2 перечислены в порядке обхода вершины v по часовой стрелке).

а) Если $d(v) = 5$ или $\angle(\overrightarrow{h}(u_1), \overrightarrow{h}(u_2)) = \pi/2$, то каждой вершине u_1, u_2 вершина v передает заряд $1/8$ (рис. 7, *а*).

б) Если $d(v) \geqslant 6$ и $\angle(\overrightarrow{h}(u_1), \overrightarrow{h}(u_2)) > \pi/2$, то каждой вершине u_1, u_2 вершина v передает заряд $3/8$ (рис. 7, *б*).

Обозначим через $\mu'(v)$ заряд вершины $v \in V$ после выполнения правил П3 и П4.

П5. Пусть v — торцевая вершина степени не менее 5 или внутренняя вершина (произвольной степени), расположенная внутри бокса B. Тогда вершина v передает заряд $\mu'(v)/2$ каждой торцевой 3-вершине, расположенной внутри бокса B, если в B имеются две торцевые 3-вершины, и заряд $\mu'(v)$, если в B имеется одна торцевая 3-вершина.

Обозначим через $\mu_2(v)$ заряд вершины $v \in V$ после выполнения правил П3–П5. Заметим, что если вершина $v \in V$ является торцевой 4-вершиной, простой вершиной или имеет тип x, то $\mu_2(v) = \mu(v) \geqslant 0$.

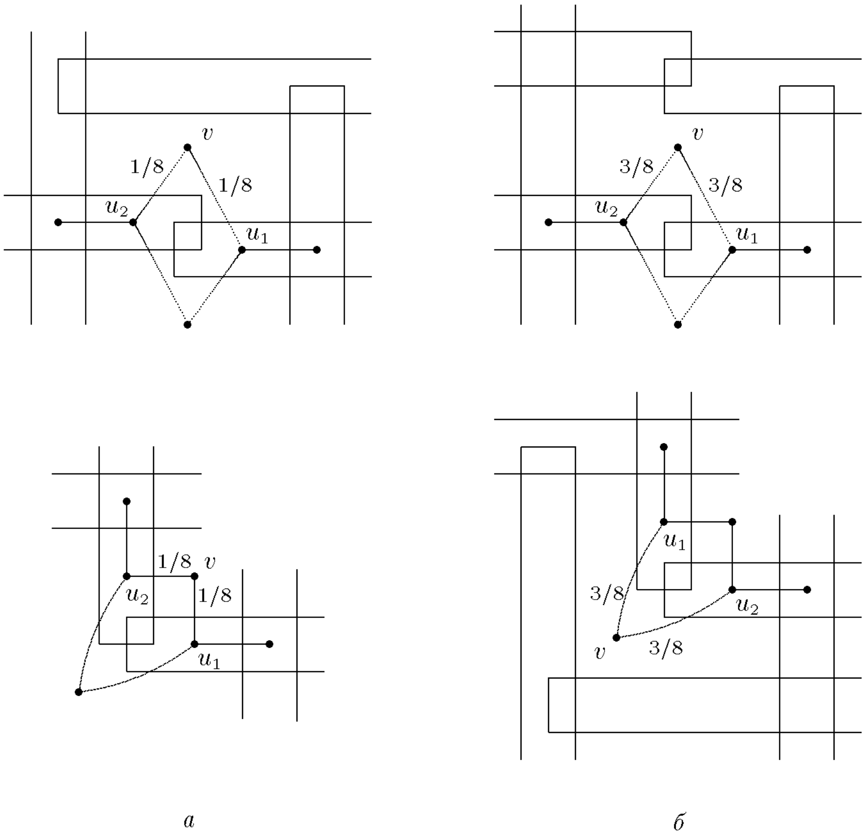


Рис. 7. Применение правила П4

Пусть $v \in V$ — торцевая вершина степени не менее 5 или внутренняя вершина. Если вершина v передает заряд торцевым 3-вершинам по правилу П5, то $\mu_2(v) \geqslant \mu'(v) - \mu'(v) = 0$. В противном случае имеем $\mu_2(v) = \mu'(v) \geqslant \mu(v) \geqslant 0$.

Пусть $u \in V$ — торцевая 3-вершина, расположенная внутри бокса B. Докажем, что вершина u получает заряд $1/2$ от двух смежных вершин v и w типа 0. Действительно, если вершина u не входит в 3-стык, то u получает заряд $1/4$ от каждой вершины v и w по правилу П3. Пусть вершины u и u' образуют 3-стык в окружении вершины v и перечислены в порядке обхода v по часовой стрелке. Если $d(v) \geqslant 6$ и $\angle(\overrightarrow{h}(u), \overrightarrow{h}(u')) > \pi/2$, то согласно правилу П4 вершина u получает заряд $3/8$ от вершины v и не менее $1/8$ от вершины w. Если же $d(v) = 5$ или $\angle(\overrightarrow{h}(u_1), \overrightarrow{h}(u_2)) = \pi/2$, то из леммы 2 следует, что $d(w) \geqslant 6$. В этом случае вершина u получает заряд $1/8$ от вершины v и заряд $3/8$ от вершины w.

Таким образом, для доказательства неравенства $\mu_2(u) \geqslant 0$ достаточно убедиться, что по правилу П5 вершина u получает заряд не менее

$1/2$ от вершин, расположенных внутри бокса B. Если среди этих вершин имеется вершина v степени не менее 5, то согласно правилам П3 и П4 имеем $\mu'(v) = \mu(v) = 1$. В этом случае вершина v передает вершине u заряд не менее $\mu'(v)/2 = 1/2$.

Пусть степени всех внутренних вершин, расположенных внутри бокса B, равны 4, а степень торцевой вершины $t \neq u$, расположенной внутри B, не превосходит 4. Тогда $d_x(B) > 1$, так как в противном случае (при $d_x(B) = 1$) из условия $d(B) \geqslant 5$ следует, что $d(t) \geqslant 5$. Если $d_x(B) = 2$, то условие $d(B) \geqslant 5$ влечет равенство $d(t) = 4$. В этом случае единственная внутренняя вершина v, расположенная внутри B, получает заряд $1/4$ от двух смежных вершин типа 0 по правилу П3 и передает заряд $1/2$ вершине u по правилу П5 (так как $d(t) \neq 3$). Если $d_x(B) > 2$, то внутри бокса B имеются по крайней мере две внутренние 4-вершины v_1 и v_2, каждая из которых получает заряд $1/2$ по правилу П3. Поэтому каждая вершина v_1 и v_2 передает заряд не менее $1/4$ вершине u по правилу П5. Следовательно, если u — торцевая 3-вершина в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$, то $\mu_2(u) \geqslant 0$.

Пусть $v \neq v_0$ — вершина типа 0 в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$ и $f \in F(\Gamma(\mathscr{B}))$ — соответствующая ей грань. Предположим, что $d(v) = r(f) = 5$. Заметим, что не все вершины, смежные с вершиной v, являются внутренними 4-вершинами в $\Gamma_1^*(\mathscr{B})$. Действительно, в противном случае каждый угол плоского многоугольника, ограничивающего грань f, был бы равен $\pi/2$, что возможно только при $r(f) = 4$. Последнее противоречит условию $g(G) \geqslant 5$ и лемме 1. Следовательно, если в окружении вершины v нет торцевых 3-вершин, то v передает заряд $1/4$ не более чем четырем смежным вершинам по правилу П3. Отсюда следует, что $\mu_2(v) \geqslant 1 - 4 \times 1/4 = 0$. Аналогично если в окружении вершины v имеется торцевая 3-вершина u, не входящая в 3-стык, то одна из вершин, расположенных в окружении вершины v рядом с вершиной u, не является ни торцевой 3-вершиной, ни внутренней 4-вершиной. В этом случае из правил П3 и П4(а) следует, что $\mu_2(v) \geqslant 1 - 4 \times 1/4 = 0$. Если же в окружении вершины v имеется 3-стык, то согласно правилам П3 и П4(а) имеем $\mu_2(v) \geqslant 1 - 2 \times 1/8 - 3 \times 1/4 = 0$.

Рассмотрим случай, когда $v \neq v_0$ и $d(v) = r(f) = 6$. Если в окружении вершины v имеется не более двух 3-стыков, то из правил П3 и П4 следует, что $\mu_2(v) \geqslant 2 - 4 \times 3/8 - 2 \times 1/4 = 0$. Пусть в окружении вершины v имеются три 3-стыка. Если для вершин каждого 3-стыка угол между направляющими векторами больше $\pi/2$ (т. е. не меньше π), то в силу конечности грани f общее число 3-стыков в окружении вершины v должно быть не менее четырех. Из полученного противоречия следует, что угол между направляющими векторами вершин какого-то 3-стыка равен $\pi/2$. Отсюда согласно правилу П4 имеем $\mu_2(v) \geqslant 2 - 4 \times 3/8 - 2 \times 1/8 > 0$.

Предположим, что $v \neq v_0$ и $d(v) \geqslant 7$. В этом случае из правил П3 и П4 следует, что $\mu_2(v) \geqslant d(v) - 4 - 3d(v)/8 = (5d(v) - 32)/8 > 0$. Наконец, если $v = v_0$, то согласно определению начального заряда вершины v_0 и правилам П3 и П4 имеем $\mu_2(v_0) \geqslant d(v_0) - 3d(v_0)/8 = 5d(v_0)/8 > 0$. Из полученного противоречия с (3) следует, что $\delta(G) < 5$. Теорема 2 доказана.

5. Точность верхних оценок из теоремы 2

Покажем, что оценки из теоремы 2 для чисел вырожденности B-графов в зависимости от обхвата являются неулучшаемыми. Для этого приведем примеры B-графа с обхватом 7 и минимальной степенью 3 и B-графа с обхватом 5 и минимальной степенью 4. Из существования первого графа будет следовать, что первая оценка из теоремы 2 не выполняется при $g(G) = 7$, а во второй оценке нельзя «4-вырожденность» заменить на «3-вырожденность». Аналогично из существования второго графа будет следовать, что вторая оценка не выполняется при $g(G) = 5$, а в третьей оценке нельзя «5-вырожденность» заменить на «4-вырожденность». Заметим, что в первой оценке «3-вырожденность» нельзя заменить на «2-вырожденность», так как любой цикл C_n при $n > 3$ является B-графом. Наконец, ввиду того, что полный двудольный граф $K_{m,n}$ является B-графом при любых m и n, третья оценка из теоремы 2 неверна при $g(G) = 4$.

Рассмотрим семейства боксов $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ (рис. 8, 9), которые содержат 184 и 197 боксов соответственно (некоторые боксы на рисунках заменены горизонтальными и вертикальными отрезками с концами в виде закрашенных кружков).

Положим $G_i = G(\mathscr{B}_i)$, $i = 1, 2$. Непосредственная проверка показывает, что $\delta(G_1) = 3$ и $\delta(G_2) = 4$. Для графа G_1 проверка облегчается тем, что в семействе $\mathscr{B}_1$ (с точностью до поворотов и отражений относительно горизонтальной и вертикальной осей симметрии) имеется 29 различных положений боксов. На рис. 8 эти положения обозначены числами от 1 до 29. В случае графа G_2 подобным образом можно использовать симметрию семейства $\mathscr{B}_2$ относительно горизонтальной оси и частичную симметрию относительно вертикальной оси.

Для проверки условия $g(G_1) = 7$ для каждого положения $i = 1, \ldots, 29$ на рис. 8 достаточно отметить какой-либо бокс B_i, занимающий это положение, и все боксы, расположенные в графе G_1 на расстоянии не более 3 от бокса B_i. Затем необходимо убедиться, что полученное семейство боксов не содержит циклов длины меньше 7. Чтобы проверить условие $g(G_2) = 5$, заметим, что любой бокс квадратной формы на рис. 9

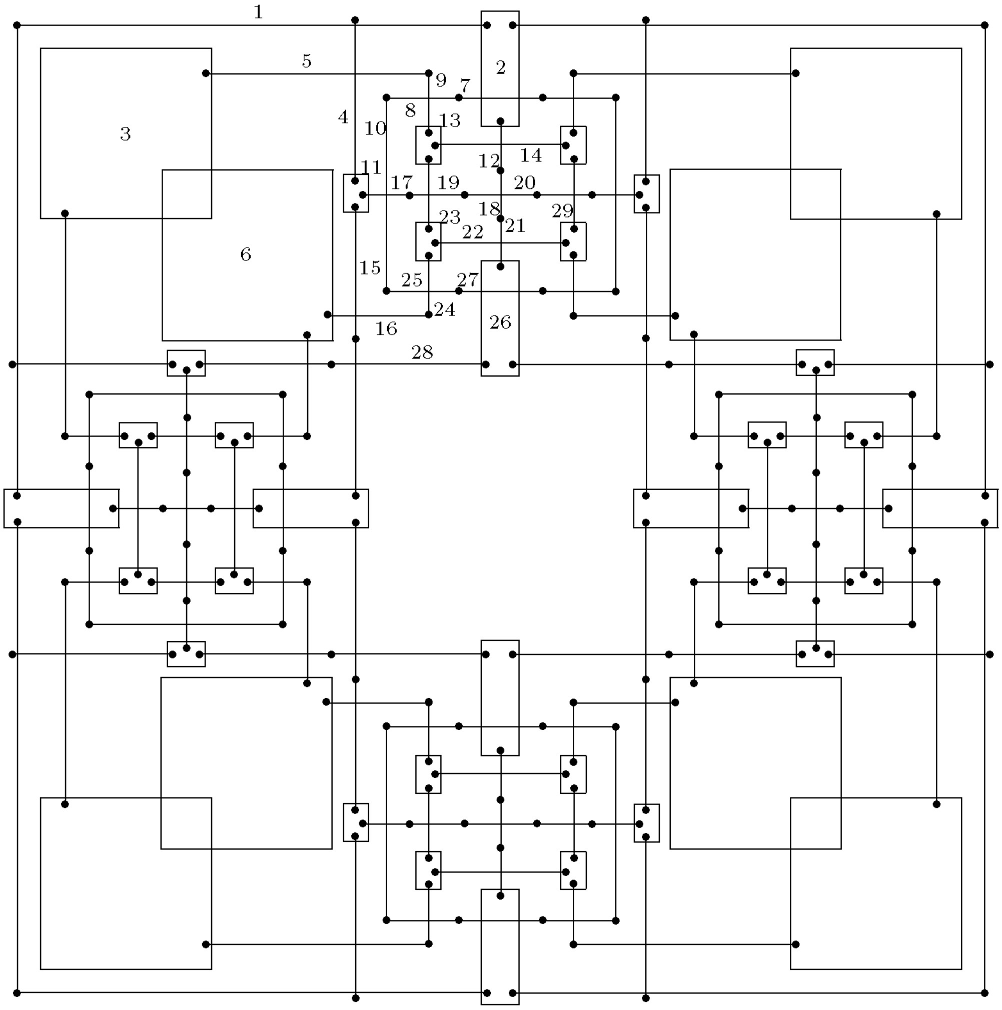


Рис. 8. $g(G) = 7$, $\delta(G) = 3$

не принадлежит 4-циклам в G_2. Поэтому для проверки условия $g(G_2) = 5$ достаточно убедиться в том, что каждый прямоугольный контур на рис. 9, образованный отрезками, изображающими боксы, на своей стороне содержит закрашенный кружок (т. е. дополнительное пересечение боксов из $\mathscr{B}_2$). При проверке вновь можно пользоваться горизонтальной и частичной вертикальной симметрией семейства $\mathscr{B}_2$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность А. В. Косточке, который познакомил меня с задачей и дал ряд ценных советов при ее решении и написании статьи.

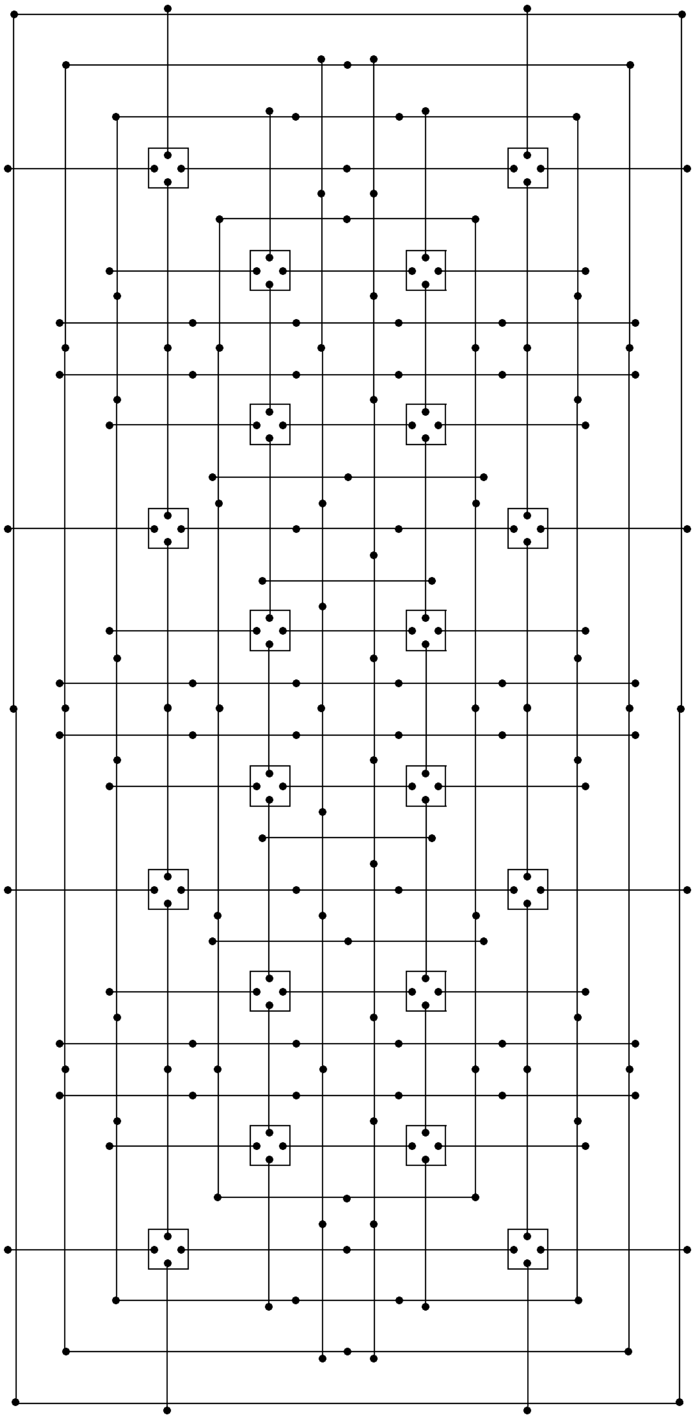


Рис. 9. $g(G) = 5$, $\delta(G) = 4$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Asplund E., Grünbaum B.** On a coloring problem // Math. Scand. 1960. V. 8. P. 181–188.
2. **Burling J. P.** On coloring problems of families of prototypes // Ph. D. Thesis. Univ. of Colorado. Boulder, CO, 1965.
3. **Kostochka A. V., Nešetřil J.** Coloring relatives of intervals on the plane, I: chromatic number versus girth // European J. Combin. 1998. V. 19, N 1. P. 103–110.
4. **Kostochka A. V., Perepelitsa I. G.** Coloring triangle-free intersection graphs of boxes on the plane // Discrete Math. 2000. V. 220, N 1–3. P. 243–249.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: angle@math.nsc.ru

Статья поступила
15 февраля 2002 г.