АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Совет математической секции Объединенного Ученого совета по физико-математическим и техническим наукам

С.С.КУТАТЕЛАДЗЕ

СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Автореферат

диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск
1970

А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Совет математической секции Объединенного Ученого совета по физико-математическим и техническим наукам

г. Новосибирск, 90 тел. 65-05-63

"____"________________1970 г.

Совет математической секции Объединенного Ученого совета по физико-математическим и техническим наукам Сибирского отделения Академии наук СССР направляет Вам для ознакомления автореферат диссертации С.С.Кутателадзе на тему : "Смежные вопросы геометрии и математического программирования", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Заверенный учреждением отзыв об автореферате диссертации просим направить в адрес Совета математической секции Объединенного Ученого совета в 2-х экземплярах.

О дне и времени защиты будет объявлено за 10 дней до защиты в газете "Советская Сибирь".

Ученый секретарь Совета
математической секции Объединенного
Ученого совета, доктор физ.-мат.наук,
профессор (М.К.Фаге)

А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Институт математики

Совет математической секции Объединенного Ученого совета по физико-математическим и техническим наукам

С.С.КУТАТЕЛАДЗЕ

СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Автореферат

диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

(002 - функциональный анализ и теория функций)

Научный руководитель
доктор физ.-мат.наук
профессор
Г.Ш.Рубинштейн

Новосибирск
1970

Диссертация выполнена в Институте математики Сибирского отделения Академии наук СССР.

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук Семенов Евгений Михайлович

кандидат физ.-мат. наук, доцент Вертгейм Борис Аронович

Ведущее учреждение: Ленинградское отделение ордена Ленина Математического института имени В.А.Стеклова.

1°. В настоящей работе делается попытка применить общие методы математического программирования, в частности, принцип двойственности, к исследованию экстремальных задач с ограничениями в геометрии выпуклых поверхностей. Указанный подход базируется на выборе естественного погружения совокупности выпуклых множеств в локально выпуклое векторное пространство, получении обозримого описания поляры множества выпуклых фигур при таком погружении и, наконец, установлении признаков оптимальности, позволяющих в ряде случаев сводить исследуемые задачи к конечномерным задачам математического программирования.

В последние годы в связи с проблематикой математического программирования возрос интерес к известной идее Минковского перехода от выпуклых множеств к сублинейным функциям. Развитие этого взгляда привело к четкой формулировке понятия пространства выпуклых множеств, т.е. линейной оболочки конуса опорных функций, появившейся в различных формах в работах Радстрема [1], Хермандера [2], А.Г.Пинскера [3] и других. Первое неявное использование понятия пространства выпуклых множеств принадлежит А.Д.Александрову, который в работе [4] 1937 года получил общее описание пространства, сопряженного к пространству выпуклых тел.

Основным объектом исследования настоящей работы являются экстремальные задачи изопериметрического типа в пространстве выпуклых компактов евклидова пространства.

2°. Диссертация состоит из введения и девяти параграфов, сведенных в четыре главы.

В первой главе, имеющей в основном вспомогательный характер, излагается общая схема Минковского-Фенхеля связи выпуклых множеств и опорных функций, а также в терминах пространства выпуклых множеств приводятся некоторые сведения из теории смешанных объемов Брунна-Минковского и теории поверхностных функций А.Д.Александрова.

Вторая глава посвящена задаче описания положительных линейных в смысле Минковского функционалов над выпуклыми поверхностями. Сначала требуемое описание дается на языке упорядоченности "линейно сильнее", введенной Ю.Г.Решетняком [5]. В доказательстве основной в главе теоремы 2.1 используется возможность для каждой меры на сфере выбрать дискретную линейно более сильную меру. Интересно, что существование такой меры гарантируется известными теоремами об аппроксимации многогранниками и свойствами смешанных объемов. Затем приводится в некотором смысле двойственное представление поляры конуса сублинейных функций в терминах исходного пространства выпуклых множеств. Особо следует отметить теоремы 2.6 - 2.10, в известной степени обращающие теорему о монотонности смешанных объемов.

Третья глава посвящена получению теорем двойственности для таких экстремальных задач изопериметрического типа, в которых ограничения и максимизируемая функция задаются смешанными объемами. Теорема 3.1 связывает вопрос о необходимых условиях экстремума с теоремами единственности для поверхностных функций и задачей о представлении положительного линейного в смысле Минковского функционала над выпуклыми поверхностями. Для частного случая квазивогнутых изопериметрических задач устанавливаются необходимые и достаточные признаки оптимальности. Соответствующие теоремы 3.2 - 3.6 показывают, что решение таких задач естественно искать в виде суммы Бляшке тел, задающих ограничения. В частности, плоские изопериметрические задачи сводятся к задачам квадратичного программирования. Основные результаты этой главы получены совместно с А.М.Рубиновым.

В четвертой главе рассматриваются частные случаи изопериметрических задач, облегченные условием принадлежности искомого тела многогранному конусу пространства выпуклых множеств. Оказывается, что к этому классу относится ряд практически интересных задач. Предлагаемый способ сведения таких задач к задачам линейного программирования основан на схеме Минковского-Фенхеля и позволяет непосредственно использовать форму задания выпуклых компактов в виде пересечения полупространств.

3°. Приведем теперь точные формулировки некоторых из отмеченных выше основных результатов.

Пусть $\mathcal{V}_n$ есть совокупность выпуклых компактных подмножеств n -мерного числового пространства R^n с евклидовой нормой $|\cdot|$. Наделим $\mathcal{V}_n$ операциями Минковского, упорядочением по включению и обычной топологией Хаусдорфа. Каждый выпуклый компакт x из $\mathcal{V}_n$ отождествим с его опорной функцией

$$x(y) = \max_{x \in x} (x, y) \qquad (y \in R^n),$$

а последнюю с её следом на сфере направлений $Z_n = \{x \in R^n : |x| = 1\}$.

При этом элементы $\mathcal{V}_n$ переходят в точки конуса $H_n \subset R^{Z_n}$ следов на Z_n сублинейных функционалов над R^n, т.е.

$$H_n = \{f : |x| f(\tfrac{x}{|x|}) + |y| f(\tfrac{y}{|y|}) - |x+y| f(\tfrac{x+y}{|x+y|}) \geq 0 \ (x, y \in R^n)\}.$$

(В этой формуле выражение $|0| f(\frac{0}{|0|})$ по определению совпадает с нулем).

При таком отождествлении алгебраическая, порядковая и топологическая структуры в H_n, перенесенные из $\mathcal{V}_n$, как известно, совпадают с индуцированными вложением H_n в векторное упорядоченное пространство $C(Z_n)$ непрерывных на Z_n функций с чебышевской нормой. Учитывая сказанное, можно не различать объекты H_n и $\mathcal{V}_n$ и обозначать их одним и тем же символом $\mathcal{V}_n$.

Под пространством выпуклых множеств понимается линейная оболочка $\mathcal{V}_n$ в пространстве $C(Z_n)$.

Через R^n_+ обозначим конус векторов из R^n с неотрицательными компонентами. Кроме того, будем придерживаться обычных обозначений для смешанных объемов $V_{m,k}$ и смешанных поверхностных функций $\mu_{m,k}$, т.е.

$$V_{m,k}(\mathfrak{a}, x, \mathcal{L}) = V(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_m, \underbrace{x, \dots, x}_{m-k}, \underbrace{\mathcal{L}, \dots, \mathcal{L}}_{k}) =$$

$$= \frac{1}{n} \int_{Z_n} x(z)\, d\mu(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{n-m}, \underbrace{x, \dots, x}_{m-k-1}, \underbrace{\mathcal{L}, \dots, \mathcal{L}}_{k})(z) = \frac{1}{n} \int_{Z_n} x\, d\mu_{m,k}(\mathfrak{a}, x, \mathcal{L})$$

При этом будем считать, что

$$V_m(\mathfrak{a}, x) = V_{m,0}(\mathfrak{a}, x, x); \ V(x) = V(x, x, \dots, x); \ \mu(x) = \mu(x, x, \dots, x)$$

Теорема 2.1. Пусть μ и ν неотрицательные меры из $C^*(Z_n)$. Тогда $\mu(h) \geq \nu(h)$ для любого h из $\mathcal{V}_n$ в том и только том случае, когда μ линейно сильнее ν. Последнее означает, что для любого разбиения $\nu_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{s} \nu_k = \nu$ меры ν найдется разбиение $\mu_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{s} \mu_k = \mu$ меры μ, обладающее тем свойством, что $\mu_{\overline{k}}(z) = \nu_k(z)$ $(k = 1, 2, \dots, s)$ для каждого одноточечного множества z из $\mathcal{V}_n$.

Запись $x \underset{T}{\geq} y$ означает, что поверхностная функция x линейно сильнее поверхностной функции y. Отметим, что если y можно поместить в x путем параллельного переноса, то $x \underset{T}{\geq} y$. Обратное имеет место, вообще говоря, лишь для плоскости.

Пусть теперь $\bar{x}$ произвольный выпуклый компакт из $\mathcal{K}_n$. Определим конус допустимых направлений в точке $\bar{x}$ соотношением:

$$\mathcal{K}_{n,\bar{x}}=\{g\in C(Z_n): \exists_{\alpha_0>0}: \bar{x}+\alpha g\in \mathcal{K}_n\ (0\le\alpha\le\alpha_0)\}.$$

Через $\mathcal{K}^*_{n,\bar{x}}$ обозначим конус, сопряженный к конусу $\mathcal{K}_{n,\bar{x}}$, т.е.

$$\mathcal{K}^*_{n,\bar{x}}=\{\mu\in C^*(Z_n): \mu(g)\ge 0\ (g\in\mathcal{K}_{n,\bar{x}})\}.$$

Т е о р е м а 2.5.

1. $\mathcal{K}^*_{n,\bar{x}}=\{\mu\in C^*(Z_n): \mu=\mu(x)-\mu(y);\ x\underset{T}{\geq} y;\ V_1(x,\bar{x})=V_1(y,\bar{x})\}$.

2. Если $\bar{x}$ регулярное тело, то $\mathcal{K}^*_{n,\bar{x}}=0$.

В качестве основной в работе рассматривается следующая задача.

З а д а ч а 3.1. Заданы:

тела $\mathfrak{A}^i_1, \mathfrak{A}^i_2,\dots,\mathfrak{A}^i_{n-m_i}, \mathcal{L}^i\in\mathcal{K}_n$ $(i=0,1,2,\dots,s)$;

числа $b_1, b_2,\dots,b_s\in R_+$.

Ищется выпуклый компакт $x\in\mathcal{K}_n$, удовлетворяющий условиям:

1. $V_{m_i,k_i}(\mathfrak{A}^i, x, \mathcal{L}^i)\le b_i$ $(i=1,2,\dots,s)$;

2. $V_{m_0,k_0}(\mathfrak{A}^0, x, \mathcal{L}^0)$ достигает максимума.

К сожалению, в общем случае эта задача не является задачей квазивогнутого программирования, т.е. ограничения пункта I определяют дополнения к выпуклым множествам в конусе $\mathcal{K}_n$. На основе схемы А.Я.Дубовицкого и А.А.Милютина [6] устанавливается следующая теорема.

Т е о р е м а 3.1. Если максимум в задаче 3.1 достигается на теле $\bar{x}$, то при некоторых обладающих свойством дополняющей нежесткости числах $\bar\alpha_1,\bar\alpha_2,\dots,\bar\alpha_s\in R_+$ и мере $\bar\mu\in\mathcal{K}^*_{n,\bar{x}}$ смешанные поверхностные функции компакта $\bar{x}$ удовлетворяют соотношению:

$$\mu_{m_0,k_0}(\mathfrak{A}^0,\bar{x},\mathcal{L}^0)+\bar\mu=\sum_{i=1}^s\bar\alpha_i\,\mu_{m_i,k_i}(\mathfrak{A}^i,\bar{x},\mathcal{L}^i).$$

В случае, когда задача 3.1 является квазивогнутой, теорему 3.1, как отмечалось в 2^0, можно усилить. Рассмотрим, например, следующую задачу максимизации объема при общих линейных ограничениях.

З а д а ч а 3.5. Заданы:

многогранник $P=\bigcap_{i=1}^s\{x\in R^n: (x,z_i)\le c_i\}$ $(z_i\in Z_n)$;

тела $y_1,y_2,\dots,y_m\in\mathcal{K}_n$;

числа $b_1,b_2,\dots,b_m\in R_+$.

Ищется тело $x\in\mathcal{K}_n$, удовлетворяющее условиям:

1. $x\subset P$;

2. $V_1(y_j,x)\le b_j$ $(j=1,2,\dots,m)$;

3. $V(x)$ достигает максимума.

Ограничение $x\subset P$ будем трактовать как s ограничений вида:

$$x(z_i)=\int_{Z_n} x\,d\mathcal{E}_{z_i}\le c_i\quad (i=1,2,\dots,s).$$

(Здесь $\mathcal{E}_{z_i}$ - мера Дирака, т.е. единичный заряд в точке z_i)

Рассмотрим систему линейных неравенств:

$$\begin{cases}\alpha\in R^s_+;\\ \sum_{i=1}^s\alpha_i z_i=0.\end{cases}$$

Пусть векторы $\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_p$ из R^s образуют остов многогранного конуса решений этой системы. Для $t=1,2,\dots,p$ положим $\mu_t=\sum_{i=1}^s \overset{(i)}{\nu_t}\,\mathcal{E}_{z_i}$. Для простоты будем считать, что меры μ_t являются александровскими и обозначим через x_t такие выпуклые компакты, что поверхностная функция $\mu(x_t)$ есть μ_t . Кроме того, для каждого $\beta\in R^{p+m}_+$ под $x(\beta)$ условимся понимать коническую комбинацию Бляшке тел $x_1,x_2,\dots,x_p;y_1,y_2,\dots,y_m$, т.е. некоторый выпуклый компакт с поверхностной функцией

$$\mu(x(\beta))=\sum_{t=1}^p\beta_t\,\mu(x_t)+\sum_{j=1}^m\beta_{p+j}\,\mu(y_j).$$

Для случая задачи 3.5 теорема 3.1 допускает следующее усиление :

Т е о р е м а 3.5. Для того, чтобы допустимое тело $\bar{x}$ являлось решением задачи 3.5 необходимо и достаточно, чтобы нашлись неотрицательные числа $\bar\beta_1,\bar\beta_2,\dots,\bar\beta_{p+m}\in R_+$ такие, что выполняются условия:

1. $x(\bar\beta)\underset{T}{\geq}\bar{x}$;

2. $V(\bar{x})=V_1(x(\bar\beta),\bar{x})$;

3. Система чисел $\bar\alpha_1,\bar\alpha_2,\dots,\bar\alpha_{s+m}\in R_+$, определенных соотношениями:

$\bar\alpha_i=\sum_{t=1}^p\bar\beta_t\,\overset{(i)}{\nu_t}$ $(i=1,2,\dots,s)$; $\bar\alpha_{s+j}=\bar\beta_{p+j}$ $(j=1,2,\dots,m)$

обладает свойством дополняющей нежесткости.

Отметим, что решение $\bar{x}$ любой квазивогнутой задачи типа 3.5 порождает неравенство

$$\varphi(\bar{x}, \bar{\alpha}) \geq \varphi(x, \bar{\alpha}) \quad (x \in \mathcal{K}_n),$$

где φ соответствующая функция Лагранжа и $\bar{\alpha}$ решение двойственной задачи. Это обстоятельство используется, в частности, в примере 3.7 при выведении неравенства Бибербаха в следующей обобщенной форме:

$$V_{m,k}(\mathfrak{A}, x, \mathcal{L})\, d^{m-k}(\mathfrak{z}_n) - V_{m,k}(\mathfrak{A}, \mathfrak{z}_n, \mathcal{L})\, d^{m-k}(x) \leq 0,$$

где $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{n-m}, \mathcal{L}$ – заданные симметричные выпуклые тела, $\mathfrak{z}_n$ единичный шар в R^n, а $d(x)$ – (внешний) диаметр x.

Основные результаты работы опубликованы в [7], [8], [9].

Приятный долг автора выразить благодарность своему научному руководителю Геннадию Шлемовичу Рубинштейну.

Л и т е р а т у р а

1. Радстрем (Radström). An embedding theorem for spaces of convex sets. Proc. of Amer.Math.Soc., 3, 1952, 165-168.

2. Хермандер (Hörmander L.) Sur la founction d'appul des ensembles couvexes un espace localement couvexe. Arkiv för Matematic., B3, H 2, 1955.

3. Пинскер А.Г. Пространство выпуклых множеств локально выпуклого пространства. В сб."Некоторые классы полуупорядоченных пространств". Изд. ЛГУ, 1966.

4. Александров А.Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. Матем.сб., 2 (44):5,1937, 947-972; Матем.сб., 2 (44):6,1937, 1025-1238; Матем.сб., 3 (45) : 1, 1938, 27-46; Матем. сб., 3 (45) : 2, 1938, 227-251.

5. Решетняк Ю.Г. О длине и повороте кривой и о площади поверхности. Канд.диссерт. Л., 1954, 32-49.

6. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. ДАН СССР, 1963, 149, 759-762.

7. Кутателадзе С.С. Положительные линейные функционалы над выпуклыми поверхностями. В сб. "Оптимальное планирование". Н., 1969, 14.

8. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М. Задачи типа изопериметра в пространстве выпуклых тел. В сб. "Оптимальное планирование" Н., 1969, 14.

9. Кутателадзе С.С. Некоторые геометрические приложения линейного программирования. В сб. "Оптимальное планирование". Н., 1969, 14.

Подписано к печати 2/VII-1970 г. МН 01641
Формат бумаги 60x84 1/16. Объем 0,62 п.л.,0,37 уч.-изд.л.
Заказ 196. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Институте математики СО АН СССР,
Новосибирск, 90