



Институт математики им. С. Л. Соболева

ЛЕОНИД ВИТАЛЬЕВИЧ

КАНТОРОВИЧ

(1912–1986)

Биобиблиографический указатель



A. King

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

ЛЕОНИД ВИТАЛЬЕВИЧ КАНТОРОВИЧ

(1912–1986)

Библиографический указатель

Научный редактор
С. С. Кутателадзе

Новосибирск
Издательство Института математики
2012

Под редакцией
С. С. Кутателадзе

**Канторович Леонид Витальевич (1912–1986):
Биобиблиографический указатель** / Ред. С. С. Кутателадзе. — 2-е изд., перераб. и доп. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2012. — 204 с.

ISBN 978–5–86134–184–4.

Биобиблиографический указатель трудов академика Л. В. Канторовича (1912–1986), выдающегося математика и экономиста, лауреата Нобелевской премии 1975 года.

Первый биобиблиографический указатель работ Л. В. Канторовича был издан в 1989 г. в издательстве «Наука». В 2002 г. в Институте математики им. С. Л. Соболева опубликовано обновленное и дополненное издание, взятое за основу настоящей публикации. Издание существенно переработано к 100-летию со дня рождения Л. В. Канторовича, дополнено его последней научной статьей «Функциональный анализ (основные идеи)» и рассчитано на читателей, интересующихся людьми науки и историей отечественной математики и экономики.

ISBN 978–5–86134–184–4 © Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН, 2012

Вехи жизни Л. В. Канторовича

- 1912** Родился 19 января (6 января по старому стилю) в Санкт-Петербурге. Отец — Виталий Моисеевич Канторович. Мать — Паулина Григорьевна Сакс.
- 1926–1930** Студент ЛГУ. Научный руководитель — Г. М. Фихтенгольц.
- 1930–1939** Ленинградский институт инженеров промышленного строительства (профессор с 1932 г.).
- 1930–1941** Ленинградский государственный университет (профессор с 1934 г.)
- 1934** Звание профессора.
- 1935** Звание доктора физ.-мат. наук без защиты диссертации.
- 1936** Книга «Методы приближенного решения уравнений в частных производных» (совместно с В. И. Крыловым).
- 1938** Первая премия по математике на Всесоюзном конкурсе работ молодых ученых.
- 1939** Выход в свет брошюры «Математические методы организации и планирования производства».
- 1939–1948** Высшее военно-инженерное техническое училище (нач. кафедры).
- 1940–1961** Ленинградское отделение Математического института им. В. А. Стеклова (с 1948 г. зав. отделом).
- 1944** Орден «Знак Почёта».
- 1948** Орден Трудового Красного Знамени.
- 1948–1960** Ленинградский государственный университет (зав. кафедрой вычислительной математики с 1958 г.)
- 1949** Сталинская премия за работу «Функциональный анализ и прикладная математика».
- Правительственная премия СССР.
- Орден Трудового Красного Знамени.
- 1950** Книга «Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах» (совместно с Б. З. Вулихом и А. Г. Пинскером).

- 1951** Книга «Расчет рационального раскрытия промышленных материалов» (совместно с В. А. Залгаллером).
- 1958** Избран членом-корреспондентом АН СССР по Отделению экономики на вакансию для Сибирского отделения.
- 1959** Книга «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов».
Книга «Функциональный анализ в нормированных пространствах» (совместно с Г. П. Акиловым).
- 1960–1971** Институт математики СО АН СССР (с 1962 г. зам. директора).
Новосибирский государственный университет (зав. кафедрой вычислительной математики).
- 1960–1986** Член редколлегии «Сибирского математического журнала».
- 1964** Избран действительным членом АН СССР по Отделению математики на вакансию для Сибирского отделения.
- 1965** Ленинская премия совместно с В. С. Немчиновым и В. В. Новожиловым.
- 1967** Орден Ленина.
- 1971–1976** Институт управления народным хозяйством ГКНТ СССР (зав. проблемной лаб.).
- 1975** Орден Трудового Красного Знамени.
Нобелевская премия по экономике совместно с Т. Купмансом.
- 1976–1986** Всесоюзный научно-исследовательский институт системных исследований Госплана и АН СССР (руководитель направления).
- 1982** Орден Ленина.
- 1985** Орден Отечественной войны.
- 1986** Скончался в Москве 7 апреля и похоронен на Новодевичьем кладбище.

Функциональный анализ (основные идеи)

Функциональный анализ — математическая дисциплина, основным предметом которой является изучение бесконечномерных, как правило, векторных пространств и их отображений. В пионерских исследованиях исходными элементами (переменными) были функции, а функция от такого аргумента называлась функционалом или функциональной операцией.

Первая потребность в функциональном анализе возникла в связи с рассмотрением задач с бесконечным множеством переменных, и постановки функционального анализа позволили сблизить их трактовку и изучение с конечномерными задачами. Например, задача о решении бесконечномерной системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{sk}x_k = b_s \quad (s = 1, 2, 3, \dots)$$

могла быть записана просто в форме

$$Ax = y,$$

где x и y — элементы некоторых пространств бесконечных последовательностей. Точно так же интерпретировалось интегральное уравнение, задача вариационного исчисления формулировалась как поиск экстремума некоторого функционала в подходящем пространстве функций и т. п.

Над этой статьей Л. В. Канторович работал последние недели своей жизни. К расшифровке магнитной записи и оформлению рукописи он привлек В. Л. Канторовича, С. С. Кутателадзе и В. М. Полтеровича. Однако откорректировать публикуемый вариант Л. В. Канторович уже не успел... Статья опубликована: Сиб. мат. журн. — 1987. — Т. 28, № 1. — С. 1–8.

Функциональный анализ развивался одновременно с целым рядом направлений, в известной мере соприкасаясь с теорией множеств, абстрактной алгеброй и аксиоматической геометрией. Общая топология, теория меры, теория дифференциальных уравнений и ряд других разделов математики развивались в столь тесной связи с функциональным анализом, что нелегко указать точную границу между ним и этими дисциплинами.

Фундаментальные идеи функционального анализа зародились на рубеже XIX–XX вв. В 20-х годах он окончательно сформировался как самостоятельное направление. Среди его основоположников были Ж. Адамар, С. Банах, В. Вольтерра, Д. Гильберт, Дж. фон Нейман, М. Фреше, Ф. Рисс. Создание функционального анализа ознаменовало коренное изменение подхода к исследованию многих математических проблем. Рассмотрение отдельных функций и уравнений было заменено изучением совокупностей этих объектов. Абстрактная форма рассмотрения позволила объединять далекие, на первый взгляд, вопросы, обнаруживать более общие и в то же время более конкретные и глубокие закономерности.

Следует сказать, что в начале своего существования функциональный анализ вызывал известный скептицизм. Казалось, что это повторение на новом языке известных фактов классического анализа, любопытное, но не дающее ничего существенно нового. В дальнейшем по мере обогащения аппарата функционального анализа, углубления исследований, открытия новых объектов и фактов стало ясно, что это новая и фундаментальная часть математического анализа, вплоть до того, что она стала основным средством и объектом исследований математического анализа. Многие считают, что сейчас понятие функционального анализа почти эквивалентно понятию анализа.

С самого начала развитие функционального анализа стимулировалось как внутренними потребностями самой математики (прежде всего, таких ее разделов,

как вариационное исчисление, интегральные уравнения, гармонический анализ), так и прикладными задачами, особенно задачами квантовой механики. В настоящее время язык функционального анализа широко используется во всей непрерывной математике. Его аппарат вошел в фундамент целого ряда новых направлений теоретического и прикладного характера — таких, как теория случайных процессов, дифференциальная топология, теория динамических систем, теория оптимального управления, математическое программирование и т. п. Теоретико-функциональные методы все глубже проникают и в различные инженерные дисциплины. Эти методы находят все более широкое применение и в математической экономике.

Пространства, изучаемые в функциональном анализе, принадлежат, как правило, к классу векторных (или линейных) метрических пространств, в которых определено расстояние между точками; более обще, это топологические векторные пространства, в которых тем или иным образом введена топология, т. е. соответствующая система открытых множеств и связанное с нею понятие предела. При этом требуется известное согласование алгебраических операций и топологии. Наибольшее значение в первое время получили метрические векторные пространства, для которых естественным образом определяется расстояние между точками. Такое расстояние задается какой-либо функцией (метрикой), сопоставляющей каждой паре векторов пространства неотрицательное число, причем так, чтобы были выполнены аналоги определенных свойств обычного расстояния. Топология пространства естественным образом определяется такой метрикой.

Важнейший наиболее распространенный класс пространств — это *пространства нормированные*, где каждому элементу x соответствует неотрицательное число $\|x\|$, называемое *нормой* x и обладающее следующими свойствами: 1) $\|x\| = 0$, если и только если $x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для любого скаляра λ (однородность);
 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника). Например, для пространства $C(S)$ непрерывных функций на компакте S полагают $\|x\| = \sup\{|x(s)| : s \in S\}$. Норма — это абстракция понятия «длина вектора». Функция $d(x, y) = \|x - y\|$ задает метрику на рассматриваемом пространстве X . Множество U в X называют *открытым*, если наряду с каждой точкой $u \in U$ оно содержит и шар некоторого зависящего от u положительного радиуса ε , т. е. $\{x \in X : \|x - u\| \leq \varepsilon\} \subset U$ при подходящем $\varepsilon > 0$. Возникающую топологию называют *сильной топологией нормированного пространства X* . Сходимость последовательности элементов (x_n) к элементу x в этой топологии означает, что $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Нормированное пространство называют *банаховым* (или, короче, *B-пространством*), если оно полно, т. е. если любая фундаментальная последовательность его элементов (т. е. такая, что $\|x_m - x_k\| \rightarrow 0$ при $m, k \rightarrow \infty$) имеет предел. Теория банаховых пространств — один из наиболее разработанных и быстро развивающихся в последние годы разделов функционального анализа (Й. Линденштраусс, П. Энфло, А. Пич). Банаховы пространства часто встречаются в приложениях.

Наиболее близкими по геометрическим свойствам к конечномерным пространствам являются пространства, в которых задано *скалярное произведение* $\langle x|y \rangle$ элементов x, y , удовлетворяющее определенным свойствам: 1) $\langle x|y \rangle$ комплексно сопряжено $\langle y|x \rangle$ (в частности, при изучении вещественных пространств $\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle$); 2) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2|y \rangle = \lambda_1 \langle x_1|y \rangle + \lambda_2 \langle x_2|y \rangle$; 3) $\langle x|x \rangle \geq 0$ и $\langle x|x \rangle = 0$ только при $x = 0$. Банахово пространство называется *гильбертовым*, если на нем задано такое скалярное произведение, что $\|x\|^2 = \langle x|x \rangle$. Такого рода пространства допускают важную геометрическую характеристику: *банахово пространство является гильбертовым в том и только том случае, если в каждой его плоско-*

сти выполнены законы евклидовой планиметрии. Из сказанного ясно, что в гильбертовых пространствах наиболее полно представлены аналоги средств и методов линейной алгебры и аналитической геометрии. Так, в них можно выделять системы координат — *гильбертовы базисы*, т. е. такие множества \mathcal{E} попарно ортогональных векторов единичной длины, что каждый элемент пространства может быть «разложен по базису», т. е. представлен в виде суммы ряда (*абстрактного ряда Фурье*):

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n | e_n \rangle e_n,$$

где (e_n) — некоторая последовательность элементов базиса \mathcal{E} . В наиболее распространенных случаях (так называемых сепарабельных гильбертовых пространств) весь гильбертов базис состоит из одной последовательности.

Приведем несколько примеров конкретных пространств. Пространство l_p , $1 \leq p < +\infty$, составленное такими последовательностями скаляров $x = (x_n)$, для которых конечна норма (иначе, *p-норма*)

$$\|x\| = \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p},$$

является банаховым. Если $p = 2$, то оно превращается в гильбертово при введении скалярного произведения элементов $x = (x_n)$ и $y = (y_n)$ по формуле

$$\langle x | y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n,$$

где, как обычно, \bar{a} — комплексно сопряженное к a число.

Непрерывным аналогом пространства l_2 служит пространство $L_2(a, b)$ скалярных функций, определенных на отрезке с концами a и b и с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля. При этом для обеспечения свойства (3) скалярного произведения функции, отличающиеся на множестве нулевой меры, отождествляют, а само произведение вводят по формуле

$$\langle x | y \rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt.$$

Базисом в l_2 служат, в частности, векторы (e_n) , у которых координата с номером n равна единице, а остальные — нули. В $L_2(0, 2\pi)$ в качестве гильбертова базиса можно взять последовательность функций $e_n = f_n / \|f_n\|$, $f_n(t) = e^{int}$ ($n = \dots - 1, 0, 1, \dots$). В последнем случае разложение функций по базису представляет собой ее классическое выражение в виде суммы ряда Фурье. Непосредственно видно, что, сопоставляя функции из $L_2(0, 2\pi)$ ее коэффициенты Фурье, мы устанавливаем линейную изометрию $L_2(0, 2\pi)$ и l_2 . Аналогичным образом проверяется изометричность произвольных сепарабельных гильбертовых пространств.

Пространство L_2 по аналогии с пространством последовательностей включается в шкалу банаховых пространств L_p , где $1 \leq p < +\infty$. При $p = +\infty$ полагают

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \dots\},$$

если $x = (x_n)$ — последовательность. Пространство L_∞ составляют из (классов) почти везде ограниченных функций. Пространства L_p и l_p при $p \neq 2$ не являются гильбертовыми.

Функцию, действующую из одного пространства в другое, часто называют *оператором*. Операторы со скалярными (= числовыми) значениями называют *функционалами*. Наиболее изучены так называемые линейные операторы. Оператор T , действующий из векторного пространства X в векторное пространство Y , называют *линейным*, если

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T x_1 + \lambda_2 T x_2$$

при любых $x_1, x_2 \in X$ и произвольных скалярах λ_1, λ_2 , т. е. если график $\{(x, Tx) : x \in X\}$ — линейное множество в произведении $X \times Y$ пространств X и Y . В случае нормированных пространств полагают

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}.$$

Величина $\|T\|$ называется *операторной нормой* или, короче, *нормой оператора T* . Операторы T с конечной нормой $\|T\| < \infty$ называют *ограниченными*. Оказывается, что оператор T ограничен в том и только том случае, если он непрерывен. Пространство $B(X, Y)$ ограниченных операторов со значениями в банаховом пространстве Y также является банаховым. В частности, к разряду банаховых относится *сопряженное к X пространство X'* , т. е. пространство непрерывных линейных функционалов на X . Можно показать, что с точностью до линейной изометрии (= сохраняющей расстояния линейной замены переменных) $(L_p)' = L_q$, $(l_p)' = l_q$, где $1/q + 1/p = 1$ при $1 < p < +\infty$, $(L_1)' = L_\infty$ и $(l_1)' = l_\infty$. Пространства, сопряженные к l_∞ , и L_∞ , устроены несколько сложнее.

Теория банаховых пространств и линейных операторов в них — один из наиболее развитых разделов функционального анализа, представляющий собой далеко идущее обобщение линейной алгебры и, в частности, теории матриц. При этом в бесконечномерном случае (а любое

пространство функций именно таково) чисто алгебраический подход мало эффективен, ибо в этой ситуации в пространстве всегда имеется колоссальное количество линейных разрывных (= неограниченных) операторов и функционалов. Использовать же разрывные операторы, т. е. игнорировать сам факт наличия естественной нормы в пространстве, во многих вопросах бессмысленно. Полезно подчеркнуть, что все линейные операторы, определенные на данном нормированном пространстве X , непрерывны в том и только том случае, если X — это конечномерное пространство (с какой-либо — все равно какой — нормой, ибо любые две нормы в конечномерном пространстве эквивалентны — задают одну и ту же топологию).

В теории банаховых пространств (и в более общих разделах) фундаментальную роль играют так называемые основные принципы функционального анализа: теорема Хана — Банаха (принцип продолжения), теорема Банаха — Штейнгауза (принцип ограниченности), теорема Банаха об открытом отображении (принцип открытости).

ПРИНЦИП ПРОДОЛЖЕНИЯ в простейшей форме утверждает, что *каждый непрерывный линейный функционал, заданный на подпространстве нормированного пространства, допускает продолжение с сохранением нормы на все пространство*. Этот принцип, его модификации и обобщения лежат в основе *выпуклого анализа* — раздела функционального анализа, изучающего выпуклые функции, выпуклые множества, выпуклые экстремальные задачи, модели экономической динамики и т. п.

ПРИНЦИП ОГРАНИЧЕННОСТИ имеет разнообразные формулировки. В одной из них утверждается, что *множество A в пространстве X ограничено по норме в том и только том случае, если для каждого функционала f из X' числовое множество $f(A)$ ограничено*

(т. е. если A слабо ограничено). Иными словами, при наличии оценок $|f(a)| \leq C_f$ для всех $a \in A$, где константа C_f зависит от $f \in X'$, $\|f\| = 1$, можно утверждать, что существует единая константа C , для которой $|f(a)| \leq C$ при всех $a \in A$, как только $\|f\| = 1$. Другая используемая в приближенных вычислениях форма принципа ограниченности устанавливает условия поточечной сходимости последовательности (T_n) операторов $T_n \in B(X, Y)$, действующих между банаховыми пространствами X и Y . Оказывается, что $T_n x \rightarrow T x$ для всех x из X в том и только том случае, если такая сходимость имеет место на некотором множестве аргументов, линейная оболочка которого плотна в X и, кроме того, нормы всех T_n ограничены в совокупности: $\sup\{\|T_n\| : n = 1, 2, 3, \dots\} < \infty$.

ПРИНЦИП ОТКРЫТОСТИ гласит, что ограниченный линейный оператор $T \in B(X, Y)$, определенный на банаховом пространстве X и такой, что образ $T(X)$ — это банахово пространство Y , обязательно переводит открытые множества X в открытые множества Y . Принцип открытости имеет многочисленные переформулировки и следствия, подчеркивающие его важнейшую роль. Полезна в приложениях следующая ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ: если операторное уравнение $Tx = y$ однозначно разрешимо при любой правой части y , то имеет место непрерывная зависимость решения x от правой части y (т. е. $T^{-1} \in B(Y, X)$).

Часто используется также ТЕОРЕМА БАНАХА О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ, представляющая собой один из вариантов принципа открытости. Линейный оператор T , действующий из X в T (где X, Y — банаховы пространства), ограничен в том и только том случае, если его график — замкнутое множество (в произведении пространств X и Y). Иначе говоря, проверка непрерывности T может состоять в установлении следующего условия: если $x_n \rightarrow x$ и $Tx_n \rightarrow y$, то $y = Tx$ (общее опреде-

ление непрерывности требует предварительного доказательства существования предела (Tx_n) , которое снимает теорема Банаха!).

В экономических приложениях первостепенное значение приобретает концепция двойственности функциональных пространств. Простейшим примером *двойственности* служит отображение $(x, f) \rightarrow f(x)$, ставящее в соответствие элементу x пространства X и функционалу f на X число $f(x)$. При трактовке x как вектора товаров, а f как вектора цен, величину $f(x)$ можно рассматривать как стоимость x . Дальнейшие уточнения и детализация этой трактовки требуют введения дополнительной структуры в X : цена, как правило, неотрицательна и поэтому необходимо рассматривать пространства, в которых между некоторыми векторами установлено отношение «больше», — *полуупорядоченные векторные пространства*. В экономике соотношения сравнения и сопоставления играют исключительную роль, и при их анализе теория таких пространств дает полезные плоды. Наиболее важны те из полуупорядоченных пространств, в которых каждое ограниченное (в смысле порядка) подмножество имеет точную верхнюю границу. Эти пространства называют *K -пространствами* или, более полно, *пространствами Канторовича*.

Таковы пространства L_p и l_p , где отношение порядка вводится очевидным способом — одна последовательность больше другой, если соответствующие координаты первой превосходят координаты второй; функция x больше y , если $x(t)$ при почти всех t больше $y(t)$.

Несколько более широкий класс пространств составляют *векторные решетки*, в которых точные границы имеются у конечных множеств. Как правило, векторную решетку можно считать вложенной в подходящее K -пространство.

Основы теории K -пространств были заложены в 30-х годах Л. В. Канторовичем, к настоящему времени она получила существенное развитие. Фундаментальное об-

научное значение этих пространств было вскрыто в последние годы в связи с развитием математической логики и, в частности, с доказательством независимости континуум-гипотезы. Было обнаружено, что элементы произвольного K -пространства суть изображения обычных вещественных чисел в соответствующей модели обычной теории множеств. В настоящее время происходит бурное развитие возникшего на этой основе булевозначного анализа, в котором разрабатываются средства, позволяющие оперировать элементами K -пространств как числами, а операторами в них — как обычными функциями.

Развитие теории линейных операторов, особенно на своем начальном этапе, стимулировала задача решения операторных уравнений «первого рода»

$$Tx = y.$$

Аналогия между функциональными и алгебраическими уравнениями, замеченная ранее для линейных дифференциальных уравнений, оказалась плодотворной и при рассмотрении интегральных уравнений, основы теории которых были заложены при формировании функционального анализа в работах В. Вольтерра, Д. Гильберта, К. Нётера и И. Фредгольма. При этом выяснилось, что удобно выделять уравнение «второго рода»

$$x + Kx = y$$

(т. е. формально рассматривать уравнение «первого рода» при условии, что $T = I + K$, где I — тождественный оператор). Более того, оказалось целесообразным следующее обобщение (типичный прием функционального анализа): вводить в такое уравнение параметр. Точнее говоря, исходную задачу удобно включать в класс задач, зависящих от параметра λ . При этом, как ни парадоксально, решить семейство задач оказывается значительно

но проще. Таким образом, рассматривают либо проблему «характеристических значений» исходного уравнения, т. е. задачу исследования уравнения вида

$$x + \mu Kx = y,$$

либо «спектральную задачу» вида

$$\lambda x - Kx = y,$$

где λ , μ — дополнительно вводимые, вообще говоря, комплексные скаляры. Видно, что обе постановки эквивалентны друг другу. Оказывается, что при малых (по абсолютной величине) μ (или, что то же самое, больших λ) названные задачи разрешимы, и при этом имеет место аналитическая зависимость решения от параметра λ . Особые точки — параметры, при которых решение отсутствует, — выделяют и изучают дополнительно. Для спектральной задачи их называют точками *спектра* оператора K . Ясно, что спектр оператора аналогичен набору собственных чисел матрицы. Примером полностью исследованных спектральных задач служат интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$x(s) + \mu \int_a^b k(s, t)x(t)dt = y(s),$$

где k , y — известные функции, а x — искомая функция.

Если, например, квадрат функции k интегрируем и задача ставится в пространстве L_2 , то внутри каждого круга с центром в нуле лежит лишь конечное число характеристических значений, каждому из которых отвечает конечномерное собственное подпространство K . Для регулярных (т. е. нехарактеристических) значений

решение может быть выписано в виде ряда, причем имеет место аналитическая зависимость решения от параметра.

Теория уравнений второго рода — один из наиболее разработанных разделов современного спектрально-го анализа операторов. Весьма полная, глубокая и удобная трактовка названного круга проблем дана в теории индекса М. Атья и И. Зингера.

Наряду с однозначными отображениями векторных пространств применяются *многозначные отображения* или *соответствия*, т. е. произвольные подмножества F в произведении $X \times Y$ пространств X и Y . Такое F можно трактовать как функцию из X в множество подмножеств Y , полагая $F(x) = \{y \in Y : (x, y) \in F\}$. В этой связи соответствие F часто называют многозначным отображением, одно-многозначным или, наконец, точечно-множественным отображением. Такие соответствия весьма часто возникают в связи с задачами экономики. Например, если x означает некоторую совокупность ресурсов, а $F(x)$ — продукцию, которая может быть получена на основе этих ресурсов, то такой набор $F(x)$ весьма многообразен и мы имеем дело со случаем точечно-множественного отображения.

В приложениях часто используются выпуклые и выпуклозначные соответствия. В первом случае выпукло само множество F — «график» отображения, во втором выпуклы допустимые «выпуски» — образы $F(x)$ при каждом x . Для точечно-множественных отображений справедливы многочисленные теоремы о существовании так называемых *неподвижных точек* (т. е. таких, что $x \in F(x)$). Эти теоремы широко используются при исследовании проблем конкурентного равновесия. Одна из упомянутых теорем (К. Фан) существования гласит следующее.

Пусть X — нормированное пространство и F — выпуклозначное отображение, определенное на некотором непустом компакте Q в X , причем такое, что

$F(x)$ замкнуто при $x \in Q$. Допустим, что F полунепрерывно сверху, т. е. для каждого замкнутого множества A в X его прообраз $F^{-1}(A) = \{x \in Q : (\exists y \in A)(x, y) \in F\} = \{x \in Q : F(x) \cap A \neq \emptyset\}$, является замкнутым в X . Тогда F имеет неподвижную точку в Q . Сформулированная теорема справедлива и для более широкого, чем нормированный, класса так называемых локально выпуклых пространств. Эти пространства составляют, по сути, наименьший класс, содержащий в себе все нормированные пространства и выдерживающий операцию образования произведения таких пространств в произвольном количестве. Такие пространства находят исключительно плодотворные применения, прежде всего в теории функциональных пространств дифференцируемых функций (с так называемыми обобщенными производными) — пространствах Соболева.

Число различных направлений анализа весьма велико. Среди них — уже названные теория функциональных пространств Соболева, спектральный анализ и теория индекса, теория гильбертовых пространств, а также теория банаховых алгебр (И. М. Гельфанд) и операторных алгебр (Дж. фон Нейман), теория представлений и другие. Эти теории получили глубокое развитие, способствовали решению внутренних проблем самой математики, получили важнейшие применения в теоретической физике, механике, математической физике, теории вероятностей и т. п.

Мы сосредоточим внимание лишь на некоторых направлениях, которые либо уже используются в математической экономике, либо их применения можно ожидать в ближайшее время.

Хотя экономические проблемы, по существу, конечны — имеется ограниченное множество продуктов и ресурсов, время можно считать дискретным, но такие конечные модели невообразимо громоздки и необозримы и для анализа, и для расчета. Поэтому гораздо эффективнее вместо них использовать родственные непрерывные

континуальные модели. Такова, например, модель развития (роста) при техническом прогрессе с вмененными основными фондами (Р. Солоу, Л. В. Канторович), описываемая функциональным уравнением, хорошо поддающимся теоретическому анализу и расчету.

Во многих модельных построениях возникает вопрос не только об адекватности модели исследуемому процессу, но и о «реальности модели самой по себе», т. е. о существовании модели, обладающей нужными свойствами. При этом заведомо известная неадекватность модели реальному процессу не позволяет сделать такое заключение на основании анализа исходных данных.

Вопрос существования нужной модели в известной мере сродни вопросу существования решения. Геометрически он может быть сформулирован так. Если мы выделяем два множества в пространстве моделей — одно, обладающее одной частью свойств, другое — другой, то имеют ли они общую точку? Существует значительная литература о методе неподвижных точек: принцип Качиполли, принцип Шаудера, теорема Какутани, упомянутая выше теорема Фана и др. В частности, таким образом получается известная теорема Эрроу — Вальда.

Скарфом и другими были развиты не только качественные, но и количественные методы нахождения решений моделей, в частности оптимизационных. Хотя эти методы громоздки и пока недостаточно эффективны, но сам по себе принципиально новый подход к поиску решений является весьма ценным.

Говоря о численных методах нахождения решений, необходимо напомнить о том значении, которое они имеют в экономике. Мало где в других науках встречаются задачи таких масштабов и такой сложности, как в моделях экономических процессов. Поэтому то развитие, которое получили численные методы алгебры и анализа в результате создания функционально-аналитического подхода к ним, призваны сыграть большую роль в математической экономике.

Это следующие группы методов:

1. Метод наискорейшего спуска и градиентные методы.
2. Методы ньютоновского типа.
3. Общая теория приближенных методов.
4. Принцип мажорант и методы последовательных приближений.

По ним имеется обширная литература в функциональном анализе и многих разделах прикладной математики, порождено огромное число эффективных численных методов решения с точной характеристикой наличия сходимости и ее быстроты. Названные методы дают также и много других важных средств исследования экономических моделей.

С их помощью в ряде случаев на основе расчетов могут устанавливаться строго существование решения, область единственности, некоторые свойства решения. В ряде случаев приближенное решение может быть получено на компьютере не в численном, а в аналитическом (формульном) виде. Эта область получила названия «вычислительное доказательство» и «аналитические вычисления на машинах», «доказательные вычисления». В то же время значение названных методов для экономики, в частности для задач на поиск равновесия или экстремума, полностью не раскрыто.

При развитии теории функциональных пространств одна сторона реальной действительности оказалась в ней на некоторое время упущенной. Для практических объектов наряду с алгебраическими и другими соотношениями большое значение имеет соотношение сравнения. Простое сравнение, имеющееся между всеми объектами, носит обедненный характер, например, можно все виды расположить по их весу, но это мало что дает. Гораздо более естественным является упорядочение, которое для тех случаев, когда это естественно, определяется или фиксируется, а в других случаях остается неопределенным (частичное упорядочение или полупорядоче-

ние). Например, два набора продуктов несомненно следует считать сравнимыми и первый больше второго, если в первом каждого продукта соответственно больше, чем во втором. Если же часть больше в одном, часть больше в другом, то можно сравнение не фиксировать.

Так, в свое время была построена теория полупорядоченных пространств, и прежде всего теория K -пространств, определенных выше. Она получила разнообразные применения как в теоретических вопросах анализа, так и в построении некоторых прикладных методов, например в теории мажорант в связи с интенсивным изучением метода последовательных приближений. В то же время полностью ее возможности до сих пор еще не раскрыты. Недооценено также и значение этой ветви функционального анализа для экономики. Между тем в экономике соотношения сравнения и сопоставления играют исключительную роль, и уже при возникновении K -пространств было ясно, что при анализе экономики они найдут свое место и дадут полезные плоды.

Теория K -пространств имеет и другое значение — их элементы могут использоваться как числа. В частности, при построении пространств типа Банана в качестве нормы вместо чисел могут использоваться элементы такого пространства, конечномерного или бесконечномерного. Подобная нормировка объектов является гораздо более точной. Скажем, функция нормируется не своим максимумом на всем интервале, а десятком чисел — максимумами ее на частях этого интервала. Очевидно, что возникающая норма гораздо точнее характеризует функцию. В частности, в экономике этот подход очень полезен при применении агрегирования, если он делается более детальным, чем обычная стоимость, образом. Итак, большие системы путем агрегирования упрощаются до систем меньшего размера, но все же довольно близким по свойствам к исходным.

Имеется ряд других применений частично упорядоченных множеств — в экономике, выпуклом анализе,

некоторых расчетах и т. д., в то же время их использование весьма недостаточно. Большое проникновение этих методов функционального анализа в экономику сыграет должную роль в изучении экономических систем.

Выше отмечены применения функционального анализа в экономике. В свою очередь, экономическая проблематика оказывает влияние на развитие самой математики. Это естественно, так как экономика представляет собой огромную область исследований с чертами собственных принципиальных отличий от тех классических физико-математических дисциплин, на базе которых шло развитие функционального анализа. Нужно отметить тот очевидный факт, что теория систем линейных неравенств и методов их решения развилась на сто лет позже, чем теория систем линейных уравнений, и притом именно в связи с потребностями экономики.

Еще один интересный и важный пример — транспортная задача. Это классическая задача об определении путей перевозки материалов от одних пунктов к другим, которая была математически оформлена и нашла эффективные методы решения, в частности метод потенциалов, около 1940 г. Известно, какое значение названная задача и ее обобщения, например производственно-транспортная задача, имеют для экономики — в вопросах размещения производства и ряде других.

Первоначальное изложение транспортной задачи под названием задачи о перемещении масс дано в 1942 г. (Л. В. Канторович). При этом, в частности, были проанализированы задача перевозок и задача выравнивания грунта, важная при строительстве аэродромов. Основная задача формулировалась в весьма абстрактном виде для произвольного метрического пространства, и довольно естественно введено понятие расстояния между двумя множествами одинаковой массы в компакте. Оно определено как минимальный объем затрат по перемещению одной массы из одного места в другое.

Названная метрика в дальнейшем стала широко при-

меняться в теории вероятностей для распределений, в геометрии и некоторых других областях математического знания. Ее применения в самом функциональном анализе привели к ряду новых интересных теорем. Можно назвать и другие примеры, где математический аппарат, развитый в связи с разнообразными задачами экономики, получил определенные приложения в самой математике и в совершенно иных прикладных науках. В этом нет ничего удивительного, потому что экономический анализ по своему многообразию и сложности, вероятно, превосходит даже проблематику современной физики. Следует ожидать, что в дальнейшем углубление математического анализа проблем экономики станет еще более мощным источником развития математического аппарата, идей самой математики.

Из тех теорий, которые перечислены выше, остановимся на использовании общей теории приближенных методов в экономике. Основная идея этой теории содержит общий принцип изучения больших систем, причем не только принцип системного анализа, но и общий гносеологический принцип исследований. Он состоит попросту в том, что данной большой сложной модели, расположенной в некотором пространстве, в известном смысле сопоставляется более простая, менее многомерная модель в этом же или другом пространстве посредством однозначного или одно-многозначного соответствия. Изучение типа упрощенной модели оказывается более доступным и осуществимым. При этом принципы и конкретные теоремы общей теории нередко позволяют на основе исследования более простой малой системы строить точные заключения о первоначальной большой системе, получать численные приближенные, но довольно точные оценки ее характеристик и осуществлять теоретический анализ системы — устанавливать существование решения, его единственность, асимптотические свойства и т. д.

Подчеркнем, что имеются разные средства постро-

ения таких упрощенных систем в экономике — переход к малоразмерным задачам, однопродуктовым или глобальным задачам и т. д. В частности, одним из общих приемов такого рода построения упрощенной системы является метод агрегирования. В этой связи применение общей теории приближенных методов и ее методологии даст существенные результаты в исследовании и экономическом анализе.

В заключение можно выразить убежденность в том, что все более широкое применение методов функционального анализа в математической экономике является весьма перспективным, и следует ожидать, что оно даст существенный вклад в развитие этой важной отрасли науки.

Л. В. Канторович

Математика и экономика в наследии Л. В. Канторовича

ПУТЬ КАНТОРОВИЧА

Канторович родился в Санкт-Петербурге в семье врача-венеролога 19 января 1912 г. (6 января по старому стилю). Интересно, что во многих справочниках указана другая дата. Сам Канторович всегда с улыбкой отмечал, что он себя помнит с 19.01.1912. Дарование мальчика проявилось очень рано. Уже в 1926 г. в возрасте 14 лет он поступил в Ленинградский университет. Вскоре он стал заниматься в кружке, организованном для студентов Г. М. Фихтенгольцем, а затем и в семинаре, посвященном дескриптивной теории функций. Ранние студенческие годы сформировали первую когорту наиболее близких товарищей. В кружке Фихтенгольца занимались также Д. К. Фаддеев, И. П. Натансон, С. Л. Соболев, С. Г. Михлин и др., с которыми Леонид Витальевич был дружен всю жизнь. Старые друзья до конца жизни за глаза называли его «Лёнечка».

Закончив ЛГУ в 1930 г., Канторович начал педагогическую работу в ленинградских вузах, сочетая ее с интенсивными научными исследованиями. Уже в 1932 г. он профессор Ленинградского института инженеров промышленного строительства и доцент ЛГУ. В 1934 г. Канторович становится профессором своей alma mater.

Основные труды в области математики Канторович создал именно в свой «ленинградский» период. При этом в 1930 годы он публикует больше статей по чистой математике, а 1940 годы для него — время работ по вычислительной математике, где он стал признанным лидером в стране.

При подготовке собрания сочинений Канторовича в его личном архиве было обнаружено письмо Н. Н. Лузина, датированное 29 апреля 1934 г. Один из первых математиков того времени и основатель знаменитой «Лужитании» писал¹:

«Вы должны знать, каково мое отношение к Вам. Вас всего, как человека, я не знаю еще, но угадываю мягкий чарующий характер. Но то что я точно знаю — это размер Ваших духовных сил, которые, насколько я привык угадывать людей, представляют в науке неограниченные возможности. Я не стану произносить соответствующего слова — зачем? Талант — это слишком мало. Вы имеете право на большее...».

В 1935 г. Канторович совершил свое главное математическое открытие — он определил K -пространства, т. е. векторные решетки, в которых каждое непустое порядково ограниченное множество имеет точные грани.

Пространства Канторовича предоставили естественные рамки для построения теории линейных неравенств — области, до того времени практически никак не изученной. Очевидно, что концепция неравенств весьма приспособлена для задач, связанных с приближенными вычислениями, где существенную роль играют разнообразные оценки точности полученных результатов. Важным источником интереса к линейным неравенствам служила экономическая проблематика. Целесообразное и оптимальное поведение в условиях ограниченных ресурсов естественно связывать с языком отношений частичного сравнения. Наконец, концепция линейных неравенств неразрывна с ключевой идеей выпуклого множества. Функциональный анализ по самому своему понятию предполагает наличие нетривиальных непрерыв-

¹ Решетняк Ю. Г., Кутателадзе С. С. *Письмо Н. Н. Лузина Л. В. Канторовичу* // Вестник РАН.—Т. 72, № 8 (2002).—С. 740–742.

ных линейных функционалов в рассматриваемом пространстве. Наличие же такого функционала эквивалентно существованию непустого собственного открытого выпуклого множества в объемлющем пространстве. В случае общего положения выпуклые множества суть в точности решения подходящей системы линейных неравенств.

В конце 1940 годов Канторович в серии работ сформулировал и развил тезис о взаимосвязи функционального анализа и прикладной математики:

«Установилась традиция считать функциональный анализ дисциплиной чисто теоретической, далекой от непосредственных приложений, которая в практических вопросах не может быть использована».

При этом Канторович подчеркивал, что его цель «в известной мере разрушить эту традицию, указать на связь функционального анализа с Канторович выделил три технологии: метод мажорант, восходящий к Коши, метод конечномерных приближений и метод Лагранжа для новых задач оптимизации, возникающих в экономике.

Технологию мажорирования в общих упорядоченных векторных пространствах Канторович взял за основу исследования вариантов метода Ньютона в банаховых пространствах.

Приближение бесконечномерных пространств и операторов их конечномерными аналогами следует воспринимать наряду с удивительным универсальным пониманием вычислительной математики как науки о конечных приближениях общих компактов (не обязательно метрических)².

² Это положение включено в совместный доклад, подготовленный С. Л. Соболевым, Л. А. Люстерником и Л. В. Канторовичем для III Всесоюзного математического съезда в 1956 г.

Новизна экстремальных задач, возникающих в социальных науках, связана с наличием многомерных противоречивых целей, ставящих на первое место проблему согласования интересов. Соответствующие технологии можно рассматривать как своего рода скаляризацию векторных целей.

С конца 1930 годов творчество Канторовича обрело новые черты — он совершил серьезный прорыв в экономической науке. В 1939 г. вышла в свет его знаменитая брошюра «Математические методы организации и планирования производства», ознаменовавшая рождение линейного программирования. Линейное программирование — техника максимизации линейного функционала на множестве положительных решений системы линейных неравенств. Неудивительно, что открытие линейного программирования последовало вскоре за созданием основ теории пространств Канторовича.

В 1940 годы на поверхности научного информационного потока экономические работы Канторовича практически не публикуются. Однако в его творчестве экономическая проблематика выходит на первый план.

Уже в военные годы он завершает работу над первым вариантом книги «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов», принесшей ему в 1975 г. Нобелевскую премию. Эта работа опережала время, не соответствовала догматам господствующей политической экономии, и ее публикация оказалась возможной только в 1959 г. Пионерские идеи Канторовича были легализованы и начали использоваться в экономической практике.

В 1948 г. Совет Министров СССР особо секретным постановлением № 1990–774сс/оп решил «в двухнедельный срок организовать в Ленинградском филиале Математического института АН СССР расчетную группу в количестве до 15 чел., возложив руководство этой группой на проф. Канторовича». Так Канторович вошел в число участников проекта по созданию отечественного

ядерного оружия³.

В 1957 г. Канторовича приглашают на работу во вновь создаваемое Сибирское отделение Академии наук. Вскоре он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР по Отделению экономики. Основные публикации Канторовича этого периода относятся к экономике, за исключением, прежде всего, всемирно известного курса «Функциональный анализ в нормированных пространствах», написанного совместно с Г. П. Акиловым.

Нельзя не отметить одну блестящую придумку Канторовича и его учеников — научные тарифы на такси. Люди старшего поколения помнят, как в 1960 году была введена плата за посадку и уменьшена такса за проезд, что немедленно привело к повышению рентабельности перевозок и выгоды коротких поездок для клиентов и водителей. Эта экономическая мера была разработана в результате математического моделирования, осуществленного Канторовичем и группой его молодых учеников-математиков, и опубликована в самом престижном математическом журнале страны — в «Успехах математических наук».

В 1964 г. Канторович избран действительным членом АН СССР по Отделению математики и в 1965 г. удостоен Ленинской премии.

В начале 1970 годов Канторович переехал в Москву, где продолжил занятия экономическим анализом. Канторович всегда мечтал о внедрении новых математических методов в хозяйственную практику своей Родины и служил этой мечте до своей кончины 7 апреля 1986 г., невзирая на непонимание и откровенное противодействие ретроградов от науки и политики, управлявших страной. Он похоронен на Новодевичьем кладбище в Москве.

³ Так называемая операция «Энормоз» в оперативной переписке советской разведки.

НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ

Научное наследие Канторовича огромно. Его исследования в области функционального анализа, вычислительной математики, теории экстремальных задач, дескриптивной теории функций оказали фундаментальное влияние на становление и развитие названных дисциплин. Он по праву входит в число основоположников современной математической экономики.

Канторович — автор более трехсот научных работ, которые при подготовке аннотированной библиографии его сочинений он сам предложил распределить по следующим девяти разделам: дескриптивная теория функций и теория множеств, конструктивная теория функций, приближенные методы анализа, функциональный анализ, функциональный анализ и прикладная математика, линейное программирование, вычислительная техника и программирование, оптимальное планирование и оптимальные цены, экономические проблемы плановой экономики.

Говоря о математических работах Канторовича, нельзя не выделить особо три обзорные статьи:

Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 6. — С. 89–185.

Полупорядоченные группы и линейные полупорядоченные пространства // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, вып. 3. — С. 31–98. — Соавт.: Вулих Б. З., Пинскер А. Г.

Об интегральных операторах // Успехи мат. наук. — 1956. — Т. 11, вып. 2. — С. 3–29.

Первая из названных статей снабжена названием, несказанно впечатляющим своим масштабом особенно при её сравнении с возрастом автора. Эта статья фигурирует в формуле Сталинской премии второй степени в размере 100 000 рублей, присужденной Канторовичу в 1948 году.

Учебник Канторовича и Акилова, многие годы служивший настольной книгой многих теоретиков и прикладников, возник на основе идей этого блестящего математического сочинения.

Удивительное многообразие направлений исследований объединяется не только личностью Канторовича, но и его методическими установками. Он всегда подчеркивал внутреннее единство науки, взаимопроникновение идей и методов, необходимых для решения разнородных теоретических и прикладных проблем математики и экономики.

Характерной чертой творчества Канторовича была ориентация на наиболее трудные проблемы и самые перспективные идеи математики и экономики своего времени.

МАТЕМАТИКА И ЭКОНОМИКА

Математика изучает формы мышления. Предмет экономики — обстоятельства человеческого поведения. Математика абстрактна и доказательна, а профессиональные решения математиков не задевают обычную жизнь людей. Экономика конкретна и декларативна, а практические упражнения экономистов основательно жизнь меняют. Цель математики — безупречные истины и методы их получения. Цель экономики — индивидуальное благополучие и пути его достижения. Математика не вмешивается в личную жизнь человека. Экономика задевает его кошелек и кошелку. Список коренных различий математики и экономики бесконечен.

Математическая экономика — новация XX века. Именно тогда возникло понимание того, что экономические проблемы требуют совершенно нового математического аппарата.

Человек разумный всегда был, есть и будет человеком хозяйствующим. Практическая экономика для каждого из нас и наших предков — это арена здраво-

го смысла. Здравый смысл представляет собой особую способность человека к мгновенным оценочным суждениям. Понимание выше здравого смысла и проявляется как осознанная адаптивность поведения. Понимание не наследуется и, стало быть, не принадлежит к числу врожденных свойств. Уникальной особенностью человека является способность пониманием делиться, превращая оценки в материальные и идеальные артефакты.

Культура — сокровищница понимания. Инвентаризация культуры — суть мировоззрения. Здравый смысл субъективен и родствен духовному подъему веры, то есть силе, превышающей возможности фактов и логики. Проверка суждений с помощью фактов и логики — критический процесс, освобождающий человека от ошибок субъективизма. Наука — трудный путь объективизации понимания. Религиозная и научная версии мировоззрения отличаются по сути способом кодификации артефактов понимания.

Становление науки как инструмента понимания — долгий и сложный процесс. Зарождение ординального счета фиксировано палеолитическими находками, отделенными десятками тысяч лет от явления разумного и хозяйствующего человека. Экономическая практика предвдывает предысторию математики, сформировавшуюся в науку доказательных вычислений в Древней Греции примерно 2500 лет тому назад.

Целенаправленное поведение людей в условиях ограниченных ресурсов стало объектом науки совсем недавно. Датой рождения экономики как науки принято считать 9 марта 1776 г. — день публикации сочинения Адама Смита «Исследование о природе и причинах богатства народов».

КОНСОЛИДАЦИЯ МЫШЛЕНИЯ

Идеи правят миром. Эту банальную констатацию когда-то с глубокой иронией дополнил Джон Мейnard

Кейнс. Свой капитальный труд «Общая теория занятости, процента и денег» он завершил весьма афористично: «Практические люди, мнящие себя совершенно неподверженными никаким интеллектуальным влияниям, обычно являются рабами какого-нибудь замшелого экономиста».

Политические идеи направлены на власть, экономические — на свободу от власти. Политическая экономия неразрывна не только с экономической практикой, но и с практической политикой. Политизированность экономических учений характеризует их особое положение в мировой науке. Изменчивость эпох, их технологических достижений и политических предпочтений отражается в широком распространении эмоционального подхода к экономическим теориям и ставит экономику в положение, невыносимое для остальных наук. Помимо благородных причин, для этого есть и одна довольно циничная: как бы не меняли достижения точных наук жизнь человечества, они никогда не затрагивают обыденное сознание людей столь живо и остро, как суждения об их кошельках и свободах.

Наука — чувственно-сверхчувственный артефакт в том смысле, что ее содержание раскрывается только человеком и без человека, по меньшей мере, вполне можно быть не может. Расположенная в самом центре культуры наука напоминает «Вавилонскую башню» — наивный, но героический и великий проект народов Земли. Стремление к свободе, внутренне присущее человеку, проявляется в неистребимой жажде знания. «Мы должны знать, мы будем знать!» — этот уже вековой тезис Давида Гильберта лежит в кладовой здравого смысла.

Георг Кантор, создатель теории множеств, еще в 1883 г. заметил, что «сущность математики заключена в ее свободе». Свобода математики отнюдь не сводится к отсутствию экзогенных ограничений на объекты и методы исследования. Свобода математики в немалой мере проявляется в предоставляемых ею новых интеллекту-

альных средствах овладения окружающим миром, которые раскрепощают человека, раздвигая границы его независимости. Математизация экономики — неизбежный этап пути человечества в царство свободы.

XIX век отмечен первыми попытками применения математических методов в экономике в работах Антуана Огюста Курно, Карла Маркса, Уильяма Стенли Джевонса, Леона Вальраса и его преемника по Лозаннскому университету Вильфредо Парето.

В XX веке к экономической проблематике обратились математики первой величины — Джон фон Нейман и Леонид Канторович. Первый развил теорию игр как аппарат изучения экономического поведения, а второй разработал линейное программирование как аппарат принятия решений о наилучшем использовании ограниченных ресурсов. Эти исследования фон Неймана и Канторовича занимают исключительное место в науке. Они показали, что современная математика предоставляет самые широкие возможности для экономического анализа практических проблем. Экономика приблизилась к математике. Оставаясь гуманитарной, она стремительно математизируется, демонстрируя высокую самокритичность и незаурядную способность к объективным суждениям.

Поворот в мышлении человечества, осуществленный фон Нейманом и Канторовичем, не всегда достаточно осознается. Между точным и гуманитарным стилями мышления существуют принципиальные различия. Люди склонны к рассуждениям по аналогии и методу неполной индукции, рождающим иллюзию общезначимости знакомых приемов. Различия научных технологий не всегда выделены отчетливо, что, в свою очередь, способствует самоизоляции и вырождению громадных разделов науки.

Методологическую пропасть, зиявшую между экономистами и математиками, к 1920 годам четко обозначил Альфред Маршалл, основатель кембриджской шко-

лы неоклассиков, «маршаллианцев». Он писал:

«Функция анализа и дедукции в экономической науке состоит не в создании нескольких длинных цепей логических рассуждений, а в правильном создании многих коротких цепочек и отдельных соединительных звеньев»⁴.

«Ясно, что в экономической науке нет места для длинных цепей дедуктивных рассуждений, ни один экономист, даже Рикардо, не пытался их использовать. На первый взгляд может показаться, что частое использование математических формул в экономических исследованиях свидетельствует о противоположном. Но при более тщательном рассмотрении станет очевидно, что такое впечатление обманчиво, за исключением случая, когда чистый математик использует экономические гипотезы ради развлекательных упражнений в математике...»⁵.

В 1906 г., в одном из частных писем, Маршалл сформулировал свое скептическое отношение к применению математики в экономике следующим образом:

«[У меня] в последние годы работы над этим предметом росло ощущение весьма малой вероятности того, что хорошая математическая теорема, имеющая дело с экономическими гипотезами, кажется хорошей экономикой. И я все больше и больше склонялся к следующим правилам:

- (1) Используй математику как язык для стенографии, а не исследовательский механизм.
- (2) Придерживайся математики, пока не закончил дело.
- (3) Переведи на английский.
- (4) Проиллюстрируй примерами, важными в реальной жизни.

⁴ Маршалл А. *Принципы политической экономии. Том III*. Пер. с англ. — М.: Изд-во Прогресс, 1984. — С. 225.

⁵ Маршалл А. *Ibid.* — С. 212.

(5) Сожги математику.

(6) Если не достиг успеха в (4), сожги (3). Особенно часто я пользовался именно последним приемом.

Я не имею ничего против математики, она полезна и необходима, однако очень плохо, что история экономической мысли больше не востребована и даже не предлагается во многих студенческих и аспирантских программах. Это потеря»⁶.

Маршалл последовательно противопоставлял экономическое и математическое мышление, призывая строить многочисленные короткие «гребешки» рассуждений в конкретном экономическом анализе. Ясно, что образ «гребешка» не имеет ничего общего с представлением о перевернутой пирамиде — кумулятивной иерархии универсума фон Неймана, в котором обитает современная теория множеств. Красота и сила математики со времен Древней Эллады до наших дней связаны с аксиоматическим методом, предполагающим вывод новых фактов с помощью сколь угодно длинных цепей формальных импликаций.

Бросающаяся в глаза разница в менталитете математиков и экономистов затрудняет их взаимопонимание и сотрудничество. Невидимы, но вездесущи перегородки мышления, изолирующие математическое сообщество от своего экономического визави. Этот статус-кво с глубокими историческими корнями всегда был вызовом для Канторовича, противоречащим его тезису о взаимопроникновении математики и экономики.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Главным открытием Канторовича на стыке математики и экономики стало линейное программирование,

⁶ Brue S. L. *The Evolution of Economic Thought. 5th ed.* — Fort Worth: Harcourt College Publishers, 1993. — P. 294.

которое теперь изучают десятки тысяч людей во всем мире. Под этим термином скрывается колоссальный раздел науки, посвященный линейным оптимизационным моделям. Иначе говоря, линейное программирование — это наука о теоретическом и численном анализе и решении задач, в которых требуется найти оптимальное значение, т. е. максимум или минимум некоторой системы показателей в процессе, поведение и состояние которого описывается той или иной системой линейных неравенств.

Термин «линейное программирование» был предложен в 1951 г. американским экономистом Т. Купмансом. В 1975 г. Канторович и Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам с формулировкой «за их вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». Особой заслугой Купманса стала пропаганда методов линейного программирования и защита приоритета Канторовича в открытии этих методов.

В США линейное программирование возникло только в 1947 г. в работах Джорджа Данцига. Поучительно привести его слова об истории линейного программирования⁷:

«Русский⁸ математик Л. В. Канторович на протяжении ряда лет интересовался применением математики к задачам планирования. В 1939 г. он опубликовал обстоятельную монографию под названием „Математические методы организации и планирования производства“... Канторовича следует признать первым, кто обнаружил, что широкий класс важнейших производственных задач поддается четкой математической формулировке, которая, по его убеждению, дает возможность подходить к задачам с

⁷ Данциг Дж. Б. *Линейное программирование, его обобщения и применения*. Пер. с англ. — М.: Изд-во Прогресс, 1966. — С. 29.

⁸ В указанном выше переводе стоит слово «советский», а в английском оригинале «Russian».

количественной стороны и решать их численными методами...

Канторович описал метод решения, основанный на имеющемся первоначально допустимом решении... Хотя двойственные переменные и не назывались „ценами“, в целом идея метода состоит в том, что выбранные значения этих „разрешающих множителей“ для недостающих ресурсов можно довести до уровня, когда становится целесообразной переброска ресурсов, являющихся избыточными...

Если бы первые работы Канторовича были бы в должной мере оценены в момент их первой публикации, то, возможно, в настоящее время линейное программирование продвинулось бы значительно дальше. Однако его первая работа в этой области оставалась неизвестной как в Советском Союзе, так и в других странах, а за это время линейное программирование стало настоящим искусством».

Следует подчеркнуть, что с оптимальным планом любой линейной программы автоматически связаны оптимальные цены или «объективно обусловленные оценки». Последнее громоздкое словосочетание Канторович выбрал из тактических соображений для повышения «критичности» термина.

Взаимозависимость оптимальных решений и оптимальных цен — такова краткая суть экономического открытия Канторовича.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ЭВРИСТИКА

Целостность мышления проявлялась во всем творчестве Канторовича. Идеи линейного программирования были тесно связаны с его методологическими установками в области математики. Главным своим математическим достижением в этой области Канторович считал выделение K -пространств⁹.

⁹ В рабочих тетрадях Канторович писал о «моих пространствах».

Уже в первой своей работе в новой области математики, датированной 1935 г., Канторович писал: «В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

Так была впервые сформулировала важнейшая методологическая установка, которую теперь называют эвристическим принципом Канторовича. Следует подчеркнуть, что в определение линейного полуупорядоченного пространства Канторовичем была включена аксиома условной порядковой полноты, обозначенная I_6 . Роль K -пространств Канторович продемонстрировал на примере теоремы Хана — Банаха. Оказалось, что в этом центральном принципе функционального анализа можно реализовать принцип Канторовича, т. е. заменить вещественные числа элементами произвольного K -пространства, а линейные функционалы — операторами со значениями в таком пространстве.

Эвристический принцип Канторовича нашел многочисленные подтверждения как в его собственных исследованиях, так и в работах его учеников и последователей. Этот принцип оказался путеводной идеей, приведшей к глубокой и изящной теории K -пространств, богатой разнообразными приложениями. Еще в середине прошлого века предпринимались попытки формализации эвристического принципа Канторовича. На этом пути появились так называемые теоремы о сохранении соотношений, которые утверждают, что если некоторое высказывание, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически оказывается верным и для элементов K -пространства. В то же время оставался совершенно неясным внутренний механизм, управляющий феноменом сохранения соотношений, гра-

ницы его применимости, а также общие причины многих аналогий и параллелей с классическими математическими дисциплинами.

Абстрактная теория K -пространств, линейное программирование и приближенные методы анализа — продукты универсальной эвристики Канторовича.

Современные исследования подтвердили, что идеи линейного программирования имманентны теории K -пространств. Можно доказать, что выполнение любого из принятых вариантов формулировок принципа двойственности линейного программирования в абстрактной математической структуре с неизбежностью приводит к тому, что исходный объект является K -пространством.

Эвристический принцип Канторовича связан с одной из самых ярких страниц математики прошлого века — со знаменитой проблемой континуума. Как известно, множество имеет мощность континуума, если оно находится во взаимнооднозначном соответствии с отрезком числовой прямой. Гипотеза континуума состоит в том, что любое подмножество отрезка либо счетно, то есть допускает пересчет, либо имеет мощность континуума. Проблема континуума состоит в ответе на вопрос о справедливости или ложности гипотезы континуума.

Гипотеза континуума была впервые высказана Кантором в 1878 г. Он был убежден в том, что эта гипотеза является теоремой и всю жизнь тщетно пытался ее доказать. В 1900 г. в Париже состоялся II Международный конгресс математиков. Гильберт выступил на открытии со своим знаменитым докладом «Математические проблемы», сформулировав 23 проблемы, решение которых девятнадцатое столетие завещало двадцатому. Первой в докладе Гильберта стоит проблема континуума. Оставаясь нерешенной десятилетиями, она порождала глубокие исследования в основаниях математики. В итоге более чем полувековых усилий мы теперь знаем, что гипотеза континуума не может быть ни доказана, ни опровергнута.

К пониманию независимости гипотезы континуума человечество пришло в два этапа: в 1939 г. Курт Гёдель проверил, что гипотеза континуума совместна с аксиомами теории множеств, а в 1963 г. Поль Коэн доказал, что им не противоречит и отрицание гипотезы континуума. Оба результата установлены путем предъявления подходящих моделей, т. е. построением универсума и интерпретации в нем теории множеств. Подход Гёделя основан на «усечении» универсума фон Неймана. Гёдель показал, что выделенные им конструктивные множества образуют модель, в которой имеет место континуум-гипотеза. Следовательно, отрицание гипотезы континуума недоказуемо. Подход Коэна в известном смысле противоположен технике Гёделя: он основан на контролируемом расширении универсума фон Неймана.

Метод форсинга Коэна был упрощен на языке нестандартных моделей в 1965 г. с использованием аппарата булевых алгебр и новой технологии математического моделирования. Прогресс возникшего на этой основе булевозначного анализа продемонстрировал фундаментальное значение расширенных K -пространств. Каждое из таких пространств, как оказалось совершенно неожиданно, служит равноправной моделью вещественной прямой и, значит, играет в математике ту же фундаментальную роль. Пространства Канторовича дали новые модели поля вещественных чисел и обрели бессмертие.

Эвристика Канторовича постоянно получает блестящее подтверждение, доказывая целостность науки и неизбежность взаимопроникновения математики и экономики.

МЕМЫ ДЛЯ БУДУЩЕГО

Противоречие между блестящими достижениями и детской неприспособленностью к практической линии жизни — один из важных парадоксов, оставленных нам

Канторовичем. Сама его жизнь стала ярким и загадочным гуманитарным феноменом. Интравертность Канторовича, очевидная в личном общении, совершенно неожиданно сочеталась с публичной экстравертностью. Отсутствие ораторского дара соседствовало с глубиной логики и особыми приемами полемики. Его внутренняя свобода и самодостаточность, мягкость, доброта и исключительная скромность стояли в одном ряду с целенаправленной жесткостью и неутомимостью на пути к поставленной цели. Своим примером он дал нам образец наилучшего использования ресурсов личности в условиях внешних и внутренних ограничений.

Идеи Канторовича востребованы человечеством, что видно по учебным планам любого экономического или математического факультета в мире. Аппарат математики и идея оптимальности стали подручными орудиями любого практикующего экономиста. Новые методы поставили непреодолимую планку для традиционалистов, рассматривающих экономику как полигон технологий типа маккиавелизма, лизоблюдства, здравого смысла и форсайта.

Экономика как вечный партнер математики избежит слияния с любой эзотерической частью гуманитарных наук, политики или беллетристики. Новые поколения математиков будут смотреть на загадочные проблемы экономики как на бездонный источник вдохновения и привлекательную арену приложения и совершенствования своих безупречно строгих методов.

Вычисление победит гадание.

С. С. Кутателадзе

Mathematics and Economics in the Legacy of L. V. Kantorovich

THE PATH OF KANTOROVICH

Kantorovich was born in the family of a venereologist at St. Petersburg on January 19, 1912 (January 6, according to the old Russian style). It is curious that many reference books give another date (which is three days before). Kantorovich kept explaining with a smile that he remembers himself from January 19, 1912. The boy's talent was revealed very early. In 1926, just at the age of 14, he entered St. Petersburg (then Leningrad) State University (SPSU). Soon he started participating in a circle of G. M. Fikhtengolts for students and in a seminar on descriptive function theory. It is natural that the early academic years formed his first environment: D. K. Faddeev, I. P. Natanson, S. L. Sobolev, S. G. Mikhlin, and a few others with whom Kantorovich was friendly during all his life also participated in Fikhtengolts's circle. The old cronies called him "Lënechka" ever since these days.

After graduation from SPSU in 1930, Kantorovich started teaching, combining it with intensive scientific research. Already in 1932 he became a full professor at the Leningrad Institute of Industrial Construction Engineers and an assistant professor at SPSU. From 1934 Kantorovich was a full professor at his *alma mater*.

The main achievements in mathematics belong to the "Leningrad" period of Kantorovich's life. In the 1930s he published more papers in pure mathematics whereas his 1940s are devoted to computational mathematics in which he was soon appreciated as a leader in this country.

The letter of Academician N. N. Luzin, written on April 29, 1934, was found in the personal archive of Kantorovich a few years ago during preparation of his selected works for publication (see [1]).

This letter demonstrates the attitude of Luzin, one of the most eminent and influential mathematicians of that time, to the brilliance of the young prodigy. Luzin was the founder and leader of the famous “Lusitania” school of Muscovites. He remarked in his letter:

... you must know my attitude to you. I do not know you as a man completely but I guess a warm and admirable personality.

However, one thing I know for certain: the range of your mental powers which, so far as I accustomed myself to guess people, open up limitless possibilities in science. I will not utter the appropriate word—what for? Talent—this would belittle you. You are entitled to get more...

In 1935 Kantorovich made his major mathematical discovery—he defined K -spaces, i.e., vector lattices whose every nonempty order bounded subset had an infimum and supremum. The Kantorovich spaces have provided the natural framework for developing the theory of linear inequalities which was a practically uncharted area of research those days. The concept of inequality is obviously relevant to approximate calculations where we are always interested in various estimates of the accuracy of results. Another challenging source of interest in linear inequalities was the stock of problems of economics. The language of partial comparison is rather natural in dealing with what is reasonable and optimal in human behavior when means and opportunities are scarce. Finally, the concept of linear inequality is inseparable from the key idea of a convex set. Functional analysis implies the existence of nontrivial continuous linear functional over the space under consideration, while the presence of a functional of this type amounts to the existence of nonempty proper open convex subset of the ambient space.

Moreover, each convex set is generically the solution set of an appropriate system of simultaneous linear inequalities.

At the end of the 1940s Kantorovich formulated and explicated the thesis of interdependence between functional analysis and applied mathematics:

There is now a tradition of viewing functional analysis as a purely theoretical discipline far removed from direct applications, a discipline which cannot deal with practical questions. This article¹ is an attempt to break with this tradition, at least to a certain extent, and to reveal the relationship between functional analysis and the questions of applied mathematics

He distinguished the three techniques: the Cauchy method of majorants also called domination, the method of finite-dimensional approximations, and the Lagrange method for the new optimization problems motivated by economics.

Kantorovich based his study of the Banach space versions of the Newton method on domination in general ordered vector spaces.

Approximation of infinite-dimensional spaces and operators by their finite-dimensional analogs, which is discretization, must be considered alongside the marvelous universal understanding of computational mathematics as the science of finite approximations to general (not necessarily metrizable) compacta.²

The novelty of the extremal problems arising in social sciences is connected with the presence of multidimensional

¹ Cp. Kantorovich L.V., *Functional analysis and applied mathematics*// Uspekhi Mat. Nauk.—1948.— Vol. 3, No. 6.—P. 89–185; English transl., Nat. Bur. Standards Rep., no. 1509, U.S. Dept. of Commerce, Nat. Bur. Standards, Washington, D.C., 1952.

² This revolutionary definition was given in the joint talk by S. L. Sobolev, L. A. Lyusternik, and L. V. Kantorovich at the Third All-Union Mathematical Congress in 1956.

contradictory utility functions. This raises the major problem of agreeing conflicting aims. The corresponding techniques may be viewed as an instance of scalarization of vector-valued targets.

From the end of the 1930s the research of Kantorovich acquired new traits in his audacious breakthrough to economics. Kantorovich's booklet *Mathematical Methods in the Organization and Planning of Production* which appeared in 1939 is a material evidence of the birth of linear programming. Linear programming is a technique of maximizing a linear functional over the positive solutions of a system of linear inequalities. It is no wonder that the discovery of linear programming was immediate after the foundation of the theory of Kantorovich spaces.

The economic works of Kantorovich were hardly visible at the surface of the scientific information flow in the 1940s. However, the problems of economics prevailed in his creative studies. During the Second World War he completed the first version of his book *The Best Use of Economic Resources* which led to the Nobel Prize awarded to him and Tjalling C. Koopmans in 1975.

The Council of Ministers of the USSR issued a top secret Directive No. 1990-774ss/op³ in 1948 which ordered "to organize in the span of two weeks a group for computations with the staff up to 15 employees in the Leningrad Division of the Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the USSR and to appoint Professor Kantorovich the head of the group." That was how Kantorovich was enlisted in the squad of participants of the project of producing nuclear weapons in the USSR.⁴

³ The letters "ss" abbreviate the Russian for "top secret," while the letters "of" abbreviate the Russian for "special folder."

⁴ This was the Soviet project "Enormous," transliterated in Russian like "Énormoz." The code name was used in the operative correspondence of the intelligence services of the USSR.

In 1957 Kantorovich accepted the invitation to join the newly founded Siberian Division of the Academy of Sciences of the USSR. He moved to Novosibirsk and soon became a corresponding member of the Department of Economics in the first elections to the Siberian Division. Since then his major publications were devoted to economics with the exception of the celebrated course of functional analysis, "Kantorovich and Akilov" in the students' jargon.

It is impossible not to mention one brilliant twist of mind of Kantorovich and his students in suggesting a scientific approach to taxicab metered rates. The people of the elder generation in this country remember that in the 1960s the taxicab meter rates were modernized radically: there appeared a price for taking a taxicab which was combining with a less per kilometer cost. This led immediately to raising efficiency of taxi parks as well as profitability of short taxicab drives. This economic measure was a result of a mathematical modeling of taxi park efficiency which was accomplished by Kantorovich with a group of young mathematicians and published in the most prestigious mathematical journal *Russian Mathematical Surveys*.

The 1960s became the decade of his recognition. In 1964 he was elected a full member of the Department of Mathematics of the Academy of Sciences of the USSR, and in 1965 he was awarded the Lenin Prize. In these years he vigorously propounded and maintained his views of interplay between mathematics and economics and exerted great efforts to instill the ideas and methods of modern science into the top economic management of the Soviet Union, which was almost in vain.

At the beginning of the 1970s Kantorovich left Novosibirsk for Moscow where he was deeply engaged in economic analysis, not ceasing his efforts to influence the everyday economic practice and decision making in the national economy. His activities were mainly waste of time and stamina in view of the misunderstanding and hindrance of the gov-

erning retrogradists of this country. Cancer terminated his path in science on April 7, 1986. He was buried at Novodevichy Cemetery in Moscow.

CONTRIBUTION TO SCIENCE

The scientific legacy of Kantorovich is immense. His research in the areas of functional analysis, computational mathematics, optimization, and descriptive set theory has had a dramatic impact on the foundation and progress of these disciplines. Kantorovich deserved his status of one of the father founders of the modern economic-mathematical methods. Linear programming, his most popular and celebrated discovery, has changed the image of economics.

Kantorovich wrote more than 300 articles. When we discussed with him the first edition of an annotated bibliography of his publications in the early 1980s, he suggested to combine them in the nine sections: descriptive function theory and set theory, constructive function theory, approximate methods of analysis, functional analysis, functional analysis and applied mathematics, linear programming, hardware and software, optimal planning and optimal prices, and the economic problems of a planned economy.

Discussing the mathematical papers of Kantorovich, we must especially mention the three articles [2, 5, 6] in *Russian Mathematical Surveys*. The first of them had acquired the title that is still impressive in view of its scale, all the more if compared with the age of the author. This article appeared in the formula of the Stalin Prize of 100,000 Rubles which was awarded to Kantorovich in 1948. The ideas of this brilliant masterpiece laid grounds for the classical textbook by Kantorovich and Akilov which was the deskbook of many scientists of theoretical and applied inclination.

The impressive diversity of these areas of research rests upon not only the traits of Kantorovich but also his method-

ological views. He always emphasized the innate integrity of his scientific research as well as mutual penetration and synthesis of the methods and techniques he used in solving the most diverse theoretic and applied problems of mathematics and economics.

The characteristic feature of the contribution of Kantorovich is his orientation to the most topical and difficult problems of mathematics and economics of his epoch.

MATHEMATICS AND ECONOMICS

Mathematics studies the forms of reasoning. The subject of economics is the circumstances of human behavior. Mathematics is abstract and substantive, and the professional decision of mathematicians do not interfere with the life routine of individuals. Economics is concrete and declarative, and the practical exercises of economists change the life of individuals substantially. The aim of mathematics consists in impeccable truths and methods for acquiring them. The aim of economics is the well-being of an individual and the way of achieving it. Mathematics never intervenes into the private life of an individual. Economics touches his purse and bag. Immense is the list of striking differences between mathematics and economics.

Mathematical economics is an innovation of the twentieth century. It is then when the understanding appeared that the problems of economics need a completely new mathematical technique.

Homo sapiens has always been and will stay forever *homo economicus*. Practical economics for everyone as well as their ancestors is the arena of common sense. Common sense is a specific ability of a human to instantaneous moral judgement. Understanding is higher than common sense and reveals itself as the adaptability of behavior. Understanding is not inherited and so it does not belong to the inborn traits of a person. The unique particularity of

humans is the ability of sharing their understanding, transforming evaluations into material and ideal artefacts.

Culture is the treasure-trove of understanding. The inventory of culture is the essence of outlook. Common sense is subjective and affine to the divine revelation of faith that is the force surpassing the power of external proofs by fact and formal logic. The verification of statements with facts and by logic is a critical process liberating a human from the errors of subjectivity. Science is an unpaved road to objective understanding. The religious and scientific versions of outlook differ actually in the methods of codifying the artefacts of understanding.

The rise of science as an instrument of understanding is a long and complicated process. The birth of ordinal counting is fixed with the palaeolithic findings hat separated by hundreds of centuries from the appearance of a knowing and economic human. Economic practice precedes the pre-history of mathematics that became the science of provable calculations in Ancient Greece about 2500 years ago.

It was rather recently that the purposeful behavior of humans under the conditions of limited resources became the object of science. The generally accepted date of the birth of economics as a science is March 9, 1776—the day when there was published the famous book by Adam Smith *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*.

CONSOLIDATION OF MIND

Ideas rule the world. John Maynard Keynes completed this banal statement with a touch of bitter irony. He finished his most acclaimed treatise *The General Theory of Employment, Interest, and Money* in a rather aphoristic manner:

Practical men, who believe themselves to be quite exempt from any intellectual influences, are usually the slaves of some defunct economist.

Political ideas aim at power, whereas economic ideas aim at freedom from any power. Political economy is inseparable from not only the economic practice but also the practical policy. The political content of economic teachings implies their special location within the world science. Changes in epochs, including their technological achievements and political utilities, lead to the universal proliferation of spread of the emotional attitude to economic theories, which drives economics in the position unbelievable for the other sciences. Alongside noble reasons for that, there is one rather cynical: although the achievements of exact sciences drastically change the life of the mankind, they never touch the common mentality of humans as vividly and sharply as any statement about their purses and limitations of freedom.

Science is “supersensible,” implying that its content cannot be wholly revealed without humans. Located in the very center of culture, science reminds of the Tower of Babel, the naive but heroic and grandiose project of the peoples of the Earth. Drive to freedom, innate in humans, lives in the unsatisfiable striving for knowledge. “We must know, we will know”—this centenarian motto of David Hilbert resides comfortably in the treasure-trove of common sense.

Georg Cantor, the creator of set theory, remarked as far back as in 1883 that “the essence of mathematics lies entirely in its freedom.” The freedom of mathematics does not reduce to the absence of exogenic restriction on the objects and methods of research. The freedom of mathematics reveals itself mostly in the new intellectual tools for conquering the ambient universe which are provided by mathematics for liberation of humans by widening the frontiers of their independence. Mathematization of economics is the unavoidable stage of the journey of the mankind into the realm of freedom.

The nineteenth century is marked with the first attempts at applying mathematical methods to economics

in the research by Antoine Augustin Cournot, Karl Marx, William Stanley Jevons, Léon Walras, and his successor in Lausanne University Vilfredo Pareto.

John von Neumann and Leonid Kantorovich, mathematicians of the first calibre, addressed the economic problems in the twentieth century. The former developed game theory, making it an apparatus for the study of economic behavior. The latter invented linear programming for decision making in the problems of best use of limited resources. These contributions of von Neumann and Kantorovich occupy an exceptional place in science. They demonstrated that the modern mathematics opens up broad opportunities for economic analysis of practical problems. Economics has been drifted closer to mathematics. Still remaining a humanitarian science, it mathematizes rapidly, demonstrating high self-criticism and an extraordinary ability of objective thinking.

The turn in the mentality of the mankind that was effected by von Neumann and Kantorovich is not always comprehended to full extent. There are principal distinctions between the exact and humanitarian styles of thinking. Humans are prone to reasoning by analogy and using incomplete induction, which invokes the illusion of the universal value of the tricks we are accustomed to. The differences in scientific technologies are not distinguished overtly, which in turn contributes to self-isolation and deterioration of the vast sections of science.

The methodological precipice between economists and mathematics was well described by Alfred Marshall, the founder of the Cambridge school of neoclassicals, “Marshallians.” He wrote in his *magnum opus* [7]:

*The function then of analysis and deduction in economics is not to forge a few long chains of reasoning, but to forge rightly many short chains and single connecting links...*⁵

⁵ Marshall A. *Principles of Economics*. 8th ed. London: Macmil-

*It is obvious that there is no room in economics for long trains of deductive reasoning.*⁶

In 1906 Marshall formulated his scepticism in regard to mathematics as follows:

[I had] a growing feeling in the later years of my work at the subject that a good mathematical theorem dealing with economic hypotheses was very unlikely to be good economics: and I went more and more on the rules—

(1) Use mathematics as a shorthand language, rather than an engine of inquiry.

(2) Keep to them till you have done.

(3) Translate into English.

(4) Then illustrate by examples that are important in real life.

(5) Burn the mathematics.

(6) If you can't succeed in (4), burn (3). This last I did often.

*I don't mind the mathematics, it's useful and necessary, but it's too bad the history of economic thought is no longer required or even offered in many graduate and undergraduate programs. That's a loss.*⁷

Marshall intentionally counterpose the economic and mathematical ways of thinking, noting that the numerous short “combs” are appropriate in a concrete economic analysis. Clearly, the image of a “comb” has nothing in common with the upside-down pyramid, the cumulative hierarchy of the von Neumann universe, the residence of the modern Zermelo–Fraenkel set theory. It is from the times of Hellas

lan and Co., Ltd. (1920), Appendix C: The Scope and Method of Economics. § 3.

⁶ *Ibid*, Appendix D: Use of Abstract Reasoning in Economics.

⁷ Brue S. L. *The Evolution of Economic Thought*. 5th ed. Fort Worth: Harcourt College Publishers, 1993.

that the beauty and power of mathematics rest on the axiomatic method which presumes the derivation of new facts by however lengthy chains of formal implications.

The conspicuous discrepancy between economists and mathematicians in mentality has hindered their mutual understanding and cooperation. Many partitions, invisible but ubiquitous, were erected in ratiocination, isolating the economic community from its mathematical counterpart and vice versa.

This status quo with deep roots in history was always a challenge to Kantorovich, contradicting his views of interaction between mathematics and economics.

LINEAR PROGRAMMING

The principal discovery of Kantorovich at the junction of mathematics and economics is linear programming which is now studied by hundreds of thousands of people throughout the world. The term signifies the colossal area of science which is allotted to linear optimization models. In other words, linear programming is the science of the theoretical and numerical analysis of the problems in which we seek for an optimal (i.e., maximum or minimum) value of some system of indices of a process whose behavior is described by simultaneous linear inequalities.

The term “linear programming” was minted in 1951 by Koopmans. The most commendable contribution of Koopmans was the ardent promotion of the methods of linear programming and the strong defence of Kantorovich’s priority in the invention of these methods.

In the USA the independent research into linear optimization models was started only in 1947 by George B. Dantzig who convincingly described the history of the area in his classical book [9, pp. 22–23] as follows:

The Russian mathematician L. V. Kantorovich has for a number of years been interested in the application of mathematics to

programming problems. He published an extensive monograph in 1939 entitled Mathematical Methods in the Organization and Planning of Production...

Kantorovich should be credited with being the first to recognize that certain important broad classes of production problems had well-defined mathematical structures which, he believed, were amenable to practical numerical evaluation and could be numerically solved.

In the first part of his work Kantorovich is concerned with what we now call the weighted two-index distribution problems. These were generalized first to include a single linear side condition, then a class of problems with processes having several simultaneous outputs (mathematically the latter is equivalent to a general linear program). He outlined a solution approach based on having on hand an initial feasible solution to the dual. (For the particular problems studied, the latter did not present any difficulty.) Although the dual variables were not called "prices," the general idea is that the assigned values of these "resolving multipliers" for resources in short supply can be increased to a point where it pays to shift to resources that are in surplus. Kantorovich showed on simple examples how to make the shifts to surplus resources. In general, however, how to shift turns out to be a linear program in itself for which no computational method was given. The report contains an outstanding collection of potential applications...

If Kantorovich's earlier efforts had been appreciated at the time they were first presented, it is possible that linear programming would be more advanced today. However, his early work in this field remained unknown both in the Soviet Union and elsewhere for nearly two decades while linear programming became a highly developed art.

It is worth observing that to an optimal plan of every linear program there corresponds some optimal prices or "objectively determined estimators." Kantorovich invented this bulky term by tactical reasons in order to enhance the "criticism endurance" of the concept.

The interdependence of optimal solutions and optimal prices is the crux of the economic discovery of Kantorovich.

UNIVERSAL HEURISTICS

The integrity of the outlook of Kantorovich was revealed in all instances of his versatile research. The ideas of linear programming were tightly interwoven with his methodological standpoints in the realm of mathematics. Kantorovich viewed as his main achievement in this area the distinguishing of K -spaces.⁸

Kantorovich observed in his first short paper of 1935 in *Doklady* on the newly-born area of ordered vector spaces:

In this note, I define a new type of space that I call a semiordered linear space. The introduction of such a space allows us to study linear operations of one abstract class (those with values in these spaces) in the same way as linear functionals.

This was the first formulation of the most important methodological position that is now referred to *Kantorovich's heuristic principle*. It is worth noting that his definition of a semiordered linear space contains the axiom of Dedekind completeness which was denoted by I_6 . Kantorovich demonstrated the role of K -spaces by widening the scope of the Hahn–Banach Theorem. The heuristic principle turned out applicable to this fundamental Dominated Extension Theorem; i.e., we may abstract the Hahn–Banach Theorem on substituting the elements of an arbitrary K -space for reals and replacing linear functionals with operators acting into the space.

Attempts at formalizing Kantorovich's heuristic principle started in the middle of the twentieth century at the initial stages of K -space theory and yielded the so-called identity preservation theorems. They assert that if some algebraic proposition with finitely many function variables is

⁸ Kantorovich wrote about “my spaces” in his personal memos.

satisfied by the assignment of all real values then it remains valid after replacement of reals with members of an arbitrary K -space.

Unfortunately, no satisfactory explanation was suggested for the internal mechanism behind the phenomenon of identity preservation. Rather obscure remained the limits on the heuristic transfer principle. The same applies to the general reasons for similarity and parallelism between the reals and their analogs in K -space which reveal themselves every now and then.

The abstract theory of K -spaces, linear programming, and approximate methods of analysis were particular outputs of Kantorovich's universal heuristics. More recent research has corroborated that the ideas of linear programming are immanent in the theory of K -spaces. It was demonstrated that the validity of one of the various statements of the duality principle of linear programming in an abstract mathematical structure implies with necessity that the structure under consideration is in fact a K -space.

The Kantorovich heuristic principle is connected with one of the most brilliant pages of the mathematics of the twentieth century—the famous problem of the continuum. Recall that some set A has the cardinality of the continuum whenever A is equipollent with a segment of the real axis. The continuum hypothesis is that each subset of the segment is either countable or has the cardinality of the continuum. The continuum problem asks whether the continuum hypothesis is true or false.

The continuum hypothesis was first conjectured by Cantor in 1878. He was convinced that the hypothesis was a theorem and vainly attempted at proving it during his whole life. In 1900 the Second Congress of Mathematicians took place in Paris. At the opening session Hilbert delivered his epoch-making talk "Mathematical Problems." He raised 23 problems whose solution was the task of the nineteenth century bequeathed to the twentieth century. The first on

the Hilbert list was open the continuum problem. Remaining unsolved for decades, it gave rise to deep foundational studies. The efforts of more than a half-century yielded the solution: we know now that the continuum hypothesis can neither be proved nor refuted.

The two stages led to the understanding that the continuum hypothesis is an independent axiom. Gödel showed in 1939 that the continuum hypothesis is consistent with the axioms of set theory,⁹ and Cohen demonstrated in 1963 that the negation of the continuum hypothesis does not contradict the axioms of set theory either. Both results were established by exhibiting appropriate models; i.e., constructing a universe and interpreting set theory in the universe. The Gödel approach based on “truncating” the von Neumann universe. Gödel proved that the constructible sets he distinguished yield the model that satisfies the continuum hypothesis. Therefore, the negation of the continuum hypothesis is not provable. The approach by Cohen was in a sense opposite to that of Gödel: it used a controlled enrichment of the von Neumann universe.

Cohen’s method of forcing was simplified in 1965 on using the tools of Boolean algebra and the new technique of mathematical modeling which is based on the nonstandard models of set theory. The progress of the so-invoked Boolean valued analysis has demonstrated the fundamental importance of the so-called universally complete K -spaces. Each of these spaces turns out to present one of the possible noble models of the real axis and so such a space plays a similar key role in mathematics. The spaces of Kantorovich implement new models of the reals and earn their eternal immortality.

Kantorovich heuristics has received brilliant corroboration, thus proving the integrity of science and inevitability of interpenetration of mathematics and economics.

⁹ This was done for Zermelo–Fraenkel set theory.

MEMES FOR THE FUTURE

The contradistinction between the brilliant achievements and the childish unfitness for the practical seamy side of life is listed among the dramatic enigmas by Kantorovich. His life became a fabulous and puzzling humanitarian phenomenon. Kantorovich's introvertness, obvious in personal communications, was inexplicably accompanied by outright public extravertness. The absence of any orator's abilities neighbored his deep logic and special mastery in polemics. His innate freedom and self-sufficiency coexisted with the purposeful and indefatigable endurance in the case of necessity. He bequeathed us a magnificent example of the best use of personal resources in the presence of restrictive internal and external constraints.

The memes of Kantorovich have been received as witnessed by the curricula and syllabi of every economics or mathematics department in any major university throughout the world. The gadgets of mathematics and the idea of optimality belong to the tool-kit of any practicing economist. The new methods erected an unsurmountable firewall against the traditionalists that view economics as a testing polygon for the technologies like Machiavellianism, flattery, common sense, or foresight.

Economics as an eternal boon companion of mathematics will avoid merging into any esoteric part of the humanities, or politics, or belles-lettres. The new generations of mathematicians will treat the puzzling problems of economics as an inexhaustible source of inspiration and an attractive arena for applying and refining their impeccably rigorous methods.

Calculation will supersede prophesy.

S. S. Kutateladze

Обзор научных трудов Л. В. Канторовича

Дескриптивная теория функций и теория множеств

Первые работы Л. В. Канторовича, доложенные на семинаре Г. М. Фихтенгольца в 1927–1928 гг., посвящены исследованию трансфинитной последовательности классов функций, составляющих так называемую классификацию Янга.

В этой классификации в качестве исходного принимается класс непрерывных функций, а последующие классы получаются чередованием предельных переходов возрастающих и убывающих последовательностей функций. Классификация Янга является детализацией классификации Бэра. Л. В. Канторовичем установлено, что функции Янга класса $(\alpha + 1)$ представимы как верхние и нижние пределы функций Бэра класса (α) : «Sur les suites des fonctions rentrant dans la classification de M. W. H. Young» (1929). Ему принадлежат также построения универсальных функций для классов Янга: «Об универсальных функциях» (1929); функция двух переменных называется универсальной для данного класса, если при специализациях одной из переменных получаются все функции одной переменной этого класса. Универсальные функции Л. В. Канторовича принадлежат тем же классам, что и представляемые ими функции. Для классификации Бэра, как показано Леонидом Витальевичем, такого рода универсальных функций не существует.

К тому же циклу относится работа 1932 г. «Об обобщенных производных непрерывных функций», посвященная условиям существования непрерывной функции, у которой производные числа Дини совпадают со значениями заданных четырех функций соответствующих классов. Дана дескриптивная характеристика этих

функций и множеств, с помощью которых решается задача. Например, на совершенном множестве меры нуль произвольная функция первого класса Бэра оказывается производной некоторой функции. Полученные Л. В. Канторовичем достаточные и частично необходимые условия существенно дополнили классические результаты А. Лебега, Р. Бэра, А. Данжуа, У. Янга и А. Безиковича.

Принципиальные результаты по теории A -множеств и проективных множеств получены Л. В. Канторовичем в работах, выполненных преимущественно в соавторстве с Е. М. Ливенсоном. Основными из них являются «Memoir on the analytical operations and projective sets» (1932, 1933). В этом цикле работ развивается общая теория аналитических операций над множествами, в частности, теория δs -операций Хаусдорфа — Колмогорова. Под этим названием понимается операция Φ_N , сопоставляющая счетной системе множеств $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ множество

$$\bigcup_{\gamma \in N} E_{n_1} \cap E_{n_2} \cap \dots \cap E_{n_l} \dots = \Phi_N(E_1, E_2, \dots).$$

Здесь $\gamma = (n_1, n_2, \dots)$ — последовательность натуральных чисел, а N — множество последовательностей γ , определяющее операцию. К δs -операциям относятся, например, A -операция П. С. Александрова, применение которой к замкнутым множествам порождает A -множества. Устанавливаются теоремы о зависимости дескриптивных свойств результата операции от класса множеств, из которого черпаются E_1, E_2, \dots , а также от дескриптивных свойств множества N , рассматриваемого как множество иррациональных чисел.

В качестве одного из приложений построенной теории доказывается, что все трансфинитные последовательности так называемых C -множеств, получающихся применением A -операции к множествам, дополнительным к множествам предыдущего класса (за исходный

класс берут A -множества), укладываются во второй проективный класс. Впервые дано также аналитическое представление всех проективных классов.

Конструктивная теория функций

К началу 1930 годов относятся также первые работы Л. В. Канторовича по конструктивной теории функций. Его внимание в этой области привлекли прежде всего известные многочлены

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

с помощью которых С. Н. Бернштейн в 1912 г. дал оригинальное доказательство знаменитой теоремы Вейерштрасса. В статье «О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала» (1931) Л. В. Канторович установил следующий неожиданный факт: если функция f регулярна хотя бы на части отрезка $(0, 1)$, то сходимость $B_n f$ к f имеет место в некоторой части комплексной области. Эти исследования Л. В. Канторовича были продолжены С. Н. Бернштейном в нескольких работах 1936–1943 гг.

В статье «О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна» (1930) Л. В. Канторович заметил, что может оказаться весьма полезной запись произвольного многочлена P_n степени n в форме

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k^{(n)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

где

$$\varphi_k^{(n)} = (n+1) \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t) dt.$$

Леонид Витальевич нашел сингулярный интеграл, сходящийся к соответствующей функции $f \in L[0, 1]$ почти везде. Отсюда следует почленная дифференцируемость почти везде последовательности полиномов Бернштейна для абсолютно непрерывной функции f . Используя другой выбор $\varphi_k^{(n)}$, Л. В. Канторович получил простое доказательство известной теоремы Бэра о представлении полунепрерывной функции в виде предела монотонной последовательности непрерывных функций. В более поздней работе «Об общих методах улучшения сходимости в способах приближенного решения граничных задач математической физики» (1934) на основе еще одного выбора $\varphi_k^{(n)}$ Леонид Витальевич создал аналитический аппарат для представления произвольной измеримой функции во всех ее точках аппроксимативной непрерывности. Этот аппарат до сих пор используется в теории функций.

К рассматриваемому циклу относится также статья «Несколько замечаний о приближении к функциям посредством полиномов с целыми коэффициентами» (1931), в которой решается задача существенности ухудшения наилучшего приближения непрерывной функции многочленами, если потребовать, чтобы коэффициенты таких многочленов были целыми. Эти исследования были продолжены А. О. Гельфондом в 1955 г.

Приближенные методы анализа

Первые работы Л. В. Канторовича по приближенным методам анализа были опубликованы в 1933 г.

В 1933–1934 гг. им предложено несколько методов приближенного решения задачи о конформном отображении круга на односвязную область, ограниченную некоторой кривой. Эти методы основаны на погружении заданной области в однопараметрическое семейство, включающее область, для которой конформное отображение известно. Используя затем разложение по мало-

му параметру, Леонид Витальевич вывел явные формулы для приближенного вычисления искомого конформного отображения («О конформном отображении многосвязных областей», 1934).

Разработке этого подхода и его обобщению на случай многосвязных областей посвящены работы, выполненные в 1933–1938 годах. Предложенный Леонидом Витальевичем метод малого параметра уже в 1933 г. был включен В. И. Смирновым в третий том его учебника «Курс высшей математики». Этот метод широко используется в механике, а также в работах Г. М. Голузина по экстремальным проблемам теории функций.

В работе «Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла» (1933) был предложен новый вариационный метод приближенного решения двумерных уравнений эллиптического типа, основанный на сведении соответствующей задачи минимизации интеграла

$$I(u) = \iint_D \left[a \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + b \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + cu^2 + 2fu \right] dx dy$$

на множестве функций двух переменных к минимизации функционала, зависящего от нескольких функций одного переменного (метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям). Описанный метод вошел в руководства по математике (Л. Э. Эльсгольц) и механике (А. И. Лурье).

Дальнейшему развитию вариационного метода, а также других приближенных методов решения дифференциальных интегральных уравнений посвящены работы 1934–1937 гг. В частности, в статье «Применение теории интегралов Стилтеса к расчету балки, лежащей на упругом основании» (1934) был впервые предложен известный метод коллокации. Указанные методы до сих

пор широко используются в приложениях — механике, технике и физике.

К рассматриваемому циклу примыкают также исследования Л. В. Канторовича по методу Рунге. В них дается ряд теорем о сходимости, а также методы приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, основанные на сочетании идей конструктивной теории функций с аналитической техникой оценок операторов. Этими вопросами в то время, как известно, занимались Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Г. И. Петров, М. В. Келдыш и другие. Исследования Л. В. Канторовича получили продолжение в работах его учеников.

В теории механических квадратур Л. В. Канторович, мастерски используя простую идею об аддитивном выделении особенностей, привел в статье «О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей» (1934) ряд остроумных приемов для вычисления интегралов от гладких функций. Это послужило также источником построения численных методов решения интегральных уравнений при наличии сингулярностей, в частности, уравнений теории переноса. В более поздней работе «Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций» (1949) выводятся формулы численного интегрирования четных и нечетных функций, которые при n узлах дают точные результаты для полиномов до степени $4n - 2$. Отсюда получаются и некоторые кубатурные формулы.

Разработанные Л. В. Канторовичем методы отражены в монографии 1936 г., написанной им совместно с В. И. Крыловым, «Методы приближенного решения уравнений в частных производных» (2-е изд. — «Приближенные методы высшего анализа», 1941 г.). Это сочинение стало первой в мировой научной литературе книгой по численным методам высшего анализа, неоднократно переиздававшейся в нашей стране и за рубежом.

Функциональный анализ

Выполненные в 1934 г. работы Л. В. Канторовича и Г. М. Фихтенгольца по проблеме представления линейных функционалов и операторов явились первыми исследованиями российских математиков по теории нормированных пространств. В то время функциональный анализ еще только оформлялся в самостоятельное научное направление, и одной из первостепенных задач было накопление фактического материала — осмысление общих понятий в конкретных ситуациях. Поскольку основой всех построений функционального анализа того времени служили нормированные пространства и линейные операторы в них, большое значение приобретало аналитическое представление линейных функционалов и операторов в конкретных нормированных пространствах. К 1934 г. общая форма линейного функционала была известна для всех классических банаховых пространств, за исключением пространства L_∞ всех ограниченных измеримых функций. Иначе обстояло дело с аналитическим представлением операторов. Результаты И. Радона (общие формы ограниченных и компактных операторов из пространства C непрерывных функций в себя) были единственными значительными результатами в этом направлении. Полученные Л. В. Канторовичем и Г. М. Фихтенгольцем теоремы об общем виде линейных функционалов и об аналитическом представлении ограниченных операторов, действующих из C в L_∞ , заполнили имевшиеся пробелы в списке известных сопряженных пространств и послужили отправным пунктом для дальнейших исследований по теории линейных операторов. Отметим, что в работе «Некоторые теоремы о линейных функционалах» (1934) на основе полученных результатов установлена недополняемость пространства C в L_∞ , что представляет интерес с точки зрения современной геометрической теории банаховых пространств. В этой же работе дано также решение проблемы Банаха

о мощности множества линейных функционалов в пространстве M ограниченных функций.

К тому же периоду относятся исследования Л. В. Канторовича, посвященные одной из наиболее актуальных проблем 1930 годов — созданию математического аппарата, используемого в физике и квантовой механике. Леонид Витальевич поставил задачу „распространения — «обогащения» функционального пространства Гильберта за счет введения «идеальных» функций, которые уже не будут функциями в обычном смысле“. Существенную новизну по сравнению с исследованиями К. Фридрихса здесь составила предложенная Л. В. Канторовичем схема пополнения, основанная на рассмотрении целого семейства (а не одного оператора, как у К. Фридрихса) самосопряженных плотно определенных операторов, связанных с операторами дифференцирования. Этот же круг вопросов — обобщенные функции и решения — был затронут в его работах об обобщенных интегралах Стильтьеса.

В середине 1930 годов в исследованиях Леонида Витальевича создавалось новое важное направление функционального анализа — теория упорядоченных пространств. Л. В. Канторович ввел и подробно изучил класс векторных решеток, в которых всякое ограниченное множество элементов имеет точные границы (такие пространства, как уже отмечалось, вошли в литературу под названием K -пространства). Большое внимание Леонид Витальевич уделял регулярным K -пространствам, где сходимости по упорядочению обладает рядом свойств, сближающих ее с обычной сходимостью в множестве вещественных чисел. Леонид Витальевич строил теорию операторов в K -пространствах, выделяя в качестве основного класс регулярных операторов, т. е. таких линейных операторов, которые представимы в виде разности двух положительных линейных операторов. Он доказал, что совокупность регулярных операторов, отобра-

жающих одно K -пространство в другое, также образует K -пространство («О некоторых классах линейных операций», 1936).

Этот результат представляет собой далеко идущее обобщение теоремы Ф. Рисса, относящейся к конкретному пространству функционалов.

Параллельно с разработкой общей теории K -пространств Л. В. Канторович дал разнообразные приложения этой теории ко многим вопросам функционального анализа, теории функций и теории функциональных уравнений. Поскольку многие классические функциональные пространства, изучавшиеся методами теории нормированных пространств, оказываются одновременно K -пространствами, то привлечение к изучению таких функциональных пространств своих методов позволило Л. В. Канторовичу провести более детальное исследование линейных операторов. Леонид Витальевич (частично совместно с Б. З. Вулихом) установил общие аналитические представления линейных операторов различных классов во многих конкретных пространствах. Теоремы Канторовича о распространении операторов нашли в его работах применения к теории интеграла, меры, а также к решению положительной проблемы моментов. Из общих соображений Леонидом Витальевичем были получены аналоги теорем Гамбургера, Стилтгеса и Хаусдорфа. Теоремы о сходимости последовательностей линейных операторов в K -пространствах Л. В. Канторович применил к теории неопределенного интеграла Лебега и к теории ортогональных рядов.

Для приложений функционального анализа к теории численных методов оказалась чрезвычайно полезной построенная Л. В. Канторовичем теория пространств, нормированных в обобщенном смысле — с помощью элементов некоторого K -пространства. Такие обобщенно нормированные пространства называют теперь решеточно-нормированными или BK -пространствами. В тео-

рию BK -пространств включается и теория самих K -пространств (в этом случае в роли нормирующего пространства выступает то же самое K -пространство), и теория нормированных пространств (нормирующее пространство — поле вещественных чисел).

Для BK -пространств Леонид Витальевич получил ряд теорем о методе последовательных приближений. Эти теоремы используются при анализе численных методов решения конечных и бесконечных систем уравнений, в том числе линейных и нелинейных дифференциальных, а также интегральных уравнений. Одновременно этот подход позволил дать абстрактную трактовку классического метода мажорант: «О функциональных уравнениях» (1937).

За указанный цикл работ в области теории упорядоченных векторных пространств Л. В. Канторовичу на Первом всесоюзном конкурсе работ молодых ученых (1938) была присуждена первая премия.

В восьмидесятые годы прошлого века в рамках булевозначного анализа было доказано, что решеточно-нормированные пространства Канторовича, удовлетворяющие введенной им специальной аксиоме разложимости нормы, служат изображениями обычных банаховых пространств. Поучительно, что аксиома разложимости нормы часто исключалась учениками Канторовича в последующих исследованиях как имеющая непонятную природу. Время подтвердило прозорливость Леонида Витальевича: на современном языке разложимость нормы оказывается эквивалентной переформулировкой ее экстенциональности.

В 1940 г. Л. В. Канторович приступил к подготовке итоговой монографии. Однако работа над этой монографией была завершена совместно с Б. З. Вулихом и А. Г. Пинскером лишь к концу 1940 годов. В книге «Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах» (1950) впервые дается систематическое

изложение теории K -пространств. Она до сих пор является ценным пособием для специалистов в этой области. Некоторым дополнением к ней является обзорная статья «Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства» (1951).

Прогресс математики и расширение сферы ее приложений подтвердили значимость теории пространств Канторовича, которая стала одним из основных разделов функционального анализа.

Л. В. Канторович постоянно подчеркивал неразрывную связь K -пространств с теорией неравенств и экономической проблематикой. Последующие исследования многих авторов подтвердили, что идеи линейного программирования имманентны теории K -пространств в следующем строго математическом плане: выполнение в абстрактной математической структуре любого из принятых вариантов формулировок принципа двойственности с неизбежностью приводит к тому, что исходный объект является K -пространством.

Удивительно прозорливым оказалось многократно высказанное Л. В. Канторовичем положение о том, что элементы K -пространства — суть обобщённые числа. Эвристический принцип Канторовича, состоящий в том, что элементы K -пространства суть своего рода вещественные числа, нашёл блестящее подтверждение в рамках современной математической логики.

Развитие булевозначных моделей теории множеств, вызванное к жизни в 1960 годы прошлого века в связи с решением проблемы континуума, продемонстрировало фундаментальное значение расширенных (универсально полных) K -пространств, каждое из которых, как неожиданно оказалось, служит новой равноправной моделью вещественной прямой. При этом решеточно-нормированные BK -пространства, считавшиеся искусственными абстракциями, оказались в точности новыми изображениями обычных банаховых пространств. Тем самым

K -пространства навсегда вошли в сокровищницу мировой науки.

Статья «Об интегральных операторах» (1956) связана с кругом идей С. Л. Соболева, использованных им в фундаментальных трудах по теоремам вложения различных функциональных классов. Отталкиваясь от своих исследований по аналитическому представлению операторов, Л. В. Канторович предложил новую схему получения теорем вложения. Основой этой схемы является выделение нового важного класса ядер, обеспечивающего компактность соответствующих интегральных операторов. Выделенные ядра, именуемые ядрами Канторовича, широко используются в современной теории операторов.

С помощью идей из работы «О перемещении масс» (1942), связанных с рассмотрением транспортной задачи, Л. В. Канторович и Г. Ш. Рубинштейн в исследованиях 1958 г. предложили новую нормировку конечных мер на метрическом компакте. В полученном нормированном пространстве сильная сходимость при условии равномерной ограниченности полных вариаций оказывается эквивалентной обычной $*$ -слабой сходимости соответствующих мер. Сопряженным к построенному пространству является пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица. Благодаря этим свойствам указанное функциональное пространство (его называют пространством Канторовича — Рубинштейна) широко используется в приложениях, в частности в математической экономике и теории вероятностей.

В 1959 г. выходит монография «Функциональный анализ в нормированных пространствах», написанная Л. В. Канторовичем совместно с Г. П. Акиловым. Эта монография оказала существенное влияние на исследования по применениям функционального анализа и на его преподавание в ведущих вузах страны и за рубежом. Наряду с оригинальной трактовкой традицион-

ных разделов функционального анализа в нормированных пространствах большое внимание в книге уделено приложениям к вычислительной математике. Указанная монография переведена на многие языки. В 1977 г. вышло ее второе, существенно переработанное и дополненное издание («Функциональный анализ»), в которое включены вопросы функционального анализа, связанные с математической экономикой, а также излагаются основы теории упорядоченных пространств. Это издание также переведено на несколько языков.

Функциональный анализ и прикладная математика

Л. В. Канторович впервые применил функционально-аналитические методы в вычислительной математике. Этому направлению посвящены его работы 1937–1957 гг. Центральной здесь является статья «Функциональный анализ и прикладная математика» (1948), объединяющая целый цикл его работ и удостоенная Государственной премии. Само название этой статьи звучало в 1948 г. непривычно. Лишь теперь, причем в значительной степени благодаря работам Л. В. Канторовича, функциональный анализ стал основным аппаратом в исследованиях по вычислительной математике.

Основная мысль статьи заключается в том, «что идеи и методы функционального анализа могут быть использованы для построения и анализа эффективных практических алгоритмов математических задач с таким же успехом, как для теоретического анализа этих задач». С этих позиций в статье рассматриваются три вопроса: общая теория приближенных методов решения функциональных уравнений, метод наискорейшего спуска и функционально-аналитический вариант метода Ньютона.

Первая попытка объединения различных приближенных методов на основе изучения функциональных уравнений была предпринята Л. В. Канторовичем еще

в 1937 г. в работе «О функциональных уравнениях». Ядром теории, предложенной в статье 1948 г. «К общей теории приближенных методов анализа», явилась принципиально новая идея — изучение связи исследуемого функционального уравнения

$$Kx = y \quad (x \in X, y \in Y)$$

в банаховых пространствах X и Y с «приближенным» уравнением

$$\tilde{K}\tilde{x} = \tilde{y} \quad (\tilde{x} \in \tilde{X}, \tilde{y} \in \tilde{Y})$$

в более простых, как правило, конечномерных пространствах \tilde{X} и \tilde{Y} . Доказываются общие теоремы, в которых на основании данных о точном решении устанавливаются разрешимость приближенного уравнения и сходимости приближенных решений к точному, а также теоремы, позволяющие на основе анализа приближенного уравнения устанавливать существование точного решения и оценивать его близость к полученному приближенному.

Построенная Леонидом Витальевичем общая теория функциональных уравнений, базирующаяся на вариации исходных функциональных пространств и операторов, использовалась им для анализа основных приближенных методов решения важнейших классов уравнений второго рода (метод редукции для бесконечных систем линейных уравнений, различные методы решения интегральных и дифференциальных уравнений).

Получаемые при этом оценки оказывались, как правило, лучшими, чем ранее известные для соответствующих методов. Относительно некоторых методов теоремы сходимости и оценки скорости сходимости были установлены впервые, например, для метода коллокации.

Построенная Л. В. Канторовичем абстрактная теория приближенных методов сыграла важную роль в теории разностных методов (В. С. Рябенкий, А. Ф. Филипов), в ряде конкретных прикладных исследований (В. С. Владимиров, А. И. Каландия и др.).

Общий метод наискорейшего спуска сформулирован Леонидом Витальевичем в работе «Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичных функционалов» (1945), результаты которой были доложены им на семинаре в Математическом институте им. В. А. Стеклова еще в сентябре 1943 г. Этот метод в его простейшем варианте предназначен для решения линейных уравнений с положительно определенными операторами в гильбертовых пространствах. Л. В. Канторовичем были установлены сходимость метода и точные оценки скорости сходимости. Сейчас известны многие связи метода наискорейшего спуска (в особенности его многошагового варианта) с другими методами решения задач линейной алгебры.

Работы Л. В. Канторовича по методу Ньютона «О методе Ньютона для функциональных уравнений» (1948), «О методе Ньютона» (1949) блестяще подтверждают неоднократно выдвигавшиеся им два тезиса.

Первый из них заключается в том, что разумно проведенное обобщение позволяет яснее увидеть существо дела и получить, как это ни парадоксально, более точный результат, чем при индивидуальном изучении частной задачи. Второй тезис состоит в том, что наличие хорошего приближения помогает не только локализовать предполагаемое решение, но и установить сам факт существования.

Разработанный Леонидом Витальевичем функционально-аналитический аналог метода Ньютона принято называть методом Ньютона—Канторовича. В работах «Принцип мажорант и метод Ньютона» (1951), «Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона для фу-

нкциональных уравнений» (1957) Л. В. Канторович дал более глубокую разработку общего метода мажорант, основанную на теории упорядоченных векторных пространств.

Линейное программирование

В 1938 г. к Л. В. Канторовичу обратились сотрудники Центральной лаборатории Ленинградского фанерного треста с просьбой рекомендовать численный метод для расчета рационального плана загрузки имеющегося оборудования. Речь шла о комплексном выполнении пяти видов работ на лущильных станках восьми типов. Вопрос сводился к определению матрицы (h_{ik}) и величины z из условий

$$h_{ik} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^5 h_{ik} = 1, \quad \sum_{i=1}^8 h_{ik} \alpha_{ik} = z p_k, \quad z \rightarrow \max,$$

где h_{ik} — суммарная производительность станков i -й группы при выполнении работ k -го вида, а p_k характеризует требуемый ассортимент. Из соответствующих результатов классического анализа вытекает, что в искомой матрице (h_{ik}) лишь двенадцать элементов отличны от нуля. Однако перебор всех таких комбинаций был сопряжен с непреодолимыми вычислительными трудностями (требовалось решить $C_{40}^{12} \approx 10^9$ систем линейных уравнений с двенадцатью неизвестными). Поэтому стало ясно, что эффективные методы решения подобных задач должны базироваться на принципиально новых идеях, позволяющих проводить целенаправленный перебор указанных комбинаций.

Ядром открытия Л. В. является установленная им объективная связь задачи оптимального планирования с задачей определения соответствующих стоимостных показателей. На этой основе формулируются признаки оп-

тимальности, позволяющие предложить различные схемы направленного перебора допустимых планов и систем стоимостных показателей. В частности, для приведенной задачи фанерного треста соответствующий признак состоит в следующем. Для оптимальности допустимого плана (h_{ik}^*) необходимо и достаточно, чтобы нашлись разрешающие множители λ_k^* , удовлетворяющие соотношениям

$$\lambda_k^* \geq 0, \quad \sum_{k=1}^5 \lambda_k^* > 0, \quad \lambda_k^* \alpha_{ik} = \max_s \lambda_s^* \alpha_{is} \quad \text{при } h_{ik}^* > 0.$$

Указанные разрешающие множители λ_k^* объективно оценивают трудоемкость выполнения работ, а величины $\mu_i^* = \max_s \lambda_s^* \alpha_{is}$ можно рассматривать как прокатные оценки соответствующей группы станков.

Основам теории оптимального производственного планирования были посвящены доклады Л. В. Канторовича, с которыми он выступал в Ленинградском университете и Ленинградском институте инженеров промышленного строительства в мае 1939 г. В том же году была издана брошюра «Математические методы организации и планирования промышленного производства», представляющая собой дополненную стенограмму этих докладов. В этой работе на основе разрешающих множителей исследуются различные классы планово-производственных задач.

Для характеристики широты охвата материала достаточно перечислить наименования разделов: распределение обработки деталей по станкам; организация производства с обеспечением максимального выполнения плана при условии заданного ассортимента; наиболее полное использование механизмов; максимальное использование комплексного сырья; наиболее рациональное использование топлива; рациональный раскрой материалов; наилучшее выполнение плана строительства при

данных строительных материалах; наилучшее распределение посевных площадей; наилучший план перевозок. Математическому изложению и обоснованию предложенных методов посвящены три приложения. В последнем из них на основе геометрической интерпретации задач линейного программирования доказывается существование разрешающих множителей. Выдающийся американский специалист в области линейного программирования Дж. Данциг отмечал: «Работа Л. В. Канторовича 1939 г. содержит почти все области приложений, известные в 1960 г.».

Разработке и конкретизации методов линейного и нелинейного программирования посвящены работы Леоида Витальевича 1940–1981 гг.

Особый интерес представляет статья «Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем» (1940), посвященная исследованию бесконечномерных задач выпуклого программирования. Для таких задач устанавливается признак оптимальности и формулируются идеи построения численных методов на основе последовательного улучшения имеющихся приближений. В ней дается характеристика не только решений оптимизационных задач, но и всех экстремальных или эффективных по Парето точек.

Большое внимание Л. В. Канторович уделял исследованию специальных классов задач линейного программирования.

В 1940 г. Л. В. Канторович и М. К. Гавурин изучили транспортную задачу в матричной и сетевой постановках. Предложенный ими метод потенциалов и его обобщение до сих пор широко используются в экономической практике.

Бесконечномерный аналог транспортной задачи, исследованный в работе «О перемещении масс» (1942), позволил Л. В. Канторовичу в статье «Об одной проблеме Монжа» (1948) доказать справедливость извест-

ной гипотезы Монжа для широкого класса задач перемещения масс. На этой же основе, как уже отмечалось, построено и пространство Канторовича — Рубинштейна, широко используемое теперь в математической экономике и теории вероятностей.

Вопросам рационального раскроя посвящены такие работы Л. В. Канторовича: «Рациональные методы раскроя металла» (1942); «Подбор поставов, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте» (1949), а также совместная с В. А. Заглаллером монография «Расчет рационального раскроя промышленных материалов» (1951; 2-е изд. «Рациональный раскрой промышленных материалов», 1971).

Предложенные в монографии методы решения задач рационального раскроя наряду с алгоритмами линейного программирования используют оригинальные идеи вычисления индивидуальных раскroев. Аналогичные идеи были впоследствии развиты Р. Беллманом в теории динамического программирования.

Вычислительная техника и программирование

Л. В. Канторович внес значительный вклад в развитие вычислительной техники и программирования. Предложенные им алгоритмические и структурные решения легли в основу ряда оригинальных вычислительных устройств. В середине 1950 годов под руководством Леонида Витальевича были разработаны релейные клавишные вычислительные машины «Вильнюс» и «Вятка», которые сыграли важную роль в автоматизации вычислительных работ на предприятиях и в учреждениях страны («Релейная клавишная вычислительная машина для автоматического выполнения арифметических операций» (1959).

Интересные идеи, связанные с усовершенствованием различных десятичных вычислительных устройств, предложены в работах «Устройство для умножения»

(1973); «Электромеханическое запоминающее устройство» (1974). В те же годы Л. В. Канторович обратился к вопросам автоматизации программирования, а также других форм интеллектуальной деятельности человека (осуществление выкладок с символами, преобразование программ и т. п.). Предложенные им принципы («Об одной математической символике, удобной при проведении вычислений на машинах», 1957) получили продолжение в работах отечественных и зарубежных авторов.

Уже в начале 1960 годов прошлого века Л. В. Канторович выдвинул идею «усиления» вычислительных возможностей универсальных ЭВМ путем комплексирования их со специализированными процессорами (приставками), ориентированными на массовые вычисления, характерные для того или иного класса задач.

В 1963–1965 гг. в Институте математики Сибирского отделения под руководством Л. В. Канторовича был разработан специализированный процессор («Вычислительная система, состоящая из универсальной цифровой вычислительной машины и малой вычислительной машины», 1965). В этой машине был использован предложенный Леонидом Витальевичем роторный принцип реализации массовых арифметических операций. Операции выполнялись с предельной скоростью, ограниченной только быстродействием оперативной памяти.

Некоторые архитектурные решения, положенные в основу арифметической машины (прямой доступ к оперативной памяти, конвейерная организация обработки и др.), впоследствии получили широкое распространение в отечественных и зарубежных машинах. Использование проблемно-ориентированных процессоров стало одним из перспективных направлений вычислительной техники.

Заслуживают внимания также общие идеи Л. В. Канторовича о комплексном развитии машинной математики (методы, алгоритмы, программирование, струк-

тура машин): «Комплексный подход к реализации массовых вычислений» (1974).

Оптимальное планирование и оптимальные цены

Л. В. Канторович заложил фундамент современной теории оптимального планирования. Развернутому изложению основных идей этой теории посвящена его капитальная монография «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» (1959, 1960). Стержнем этой книги является формулировка основной задачи производственного планирования и динамической задачи оптимального планирования. Указанные задачи достаточно просты, но в то же время учитывают важнейшие черты экономического планирования. Одно из привлекательных качеств состоит в том, что они базируются на схеме линейного программирования и, следовательно, на развитом аналитическом аппарате и обширном наборе эффективных вычислительных средств, часть из которых предложил сам Леонид Витальевич.

Динамическую задачу оптимального планирования Л. В. Канторович формулирует следующим образом.

Заданы наборы вещественных чисел

$$(a_{kit}^s) \quad s \in S, (k, i, t) \in N = K \times I \times T, (b_{kit})(k, i, t) \in N_0,$$

где K, I, T — конечные множества индексов, а N_0 — некоторое собственное подмножество множества N .

Требуется найти набор чисел (x^s) , $s \in S$, удовлетворяющий двум условиям:

- 1) $\sum_{s \in S} a_{kit}^s x^s \geq b_{kit}$, $(k, i, t) \in N_0$,
- 2) не существует набора (\tilde{x}^s) , $s \in S$, удовлетворяющего 1) и неравенствам

$$\sum_{s \in S} a_{kit}^s \tilde{x}^s \geq \sum_{s \in S} a_{kit}^s x_s, \quad (k, i, t) \in N \setminus N_0,$$

среди которых имеются строгие.

Содержательно набор чисел $(a_{kit}^s)(k, i, t) \in N$ при фиксированном $s \in S$ интерпретируется как производственный способ по переработке одних ингредиентов в другие, где положительные числа означают выпуск, а отрицательные — затраты соответствующих продуктов k в пунктах или районах i в периоды времени t . Требуется найти такой производственный план, определяемый объемами (интенсивностями) x^s использования различных способов, при котором выполняются ограничения по ресурсам ($b_{kit} < 0$) и обеспечивается выполнение плановых заданий ($b_{kit} > 0$) и при этом не существует аналогичного плана x^s , использующего меньшие ресурсы по всем $(k, i, t) \in N \setminus N_0$. Условие 2) обычно конкретизируется в зависимости от принятого критерия оптимальности.

Динамическая задача оптимального планирования привлекала большое внимание Л. В. Канторовича и в последующие годы. В частности, ей посвящена ключевая работа «Динамическая модель оптимального планирования» (1964); см. также «Оптимальные модели перспективного планирования» (1965). Здесь указаны важнейшие направления расширения и совершенствования основной схемы динамической модели и намечены пути использования ее в практике планирования. В этой работе Леонид Витальевич показал, как в экономическую модель вводятся элементы нелинейности, стохастики и дискретности и какую роль они играют как в более точном учете экономической реальности, так и при математическом анализе соответствующих моделей. Работа 1964 г., по существу, определила направление многих экономико-математических работ, которые были выполнены в последующие годы. За рубежом, в частности, большое развитие получило направление, именуемое теорией экономики благосостояния.

Все основные элементы этого направления заложены

ны в работах Леонида Витальевича по глобальным оптимизационным моделям экономики. Выдающимся достижением Л. В. Канторовича явилась формулировка оптимальных цен, осознание того факта, что цены и план составляют единую неразделимую систему и не могут рассматриваться изолированно. Указанные цены Леонид Витальевич назвал объективно-обусловленными оценками, чтобы подчеркнуть, что эти цены отражают совокупность условий, при которых составляется оптимальный план (отметим, что окончательное название было выбрано, когда велась уже корректура книги «Экономический расчет», Леонид Витальевич заменил этим названием предыдущее «наиболее целесообразные оценки», чтобы повысить «критикоустойчивость» термина).

Можно утверждать, что объективно-обусловленные оценки оптимального решения — ориентир, к которому должны приближаться реальные цены.

Система объективно-обусловленных оценок включает в себя не только оценки обычных продуктов, но также оценки вкладов ресурсов, в том числе трудовых, оценки фондов, условий социального характера, оценки времени как фактора производства. Предложенный в этих работах подход к оценке природных ресурсов, «прокатные» оценки оборудования прочно вошли в арсенал экономических показателей.

Своей трактовкой объективно-обусловленных оценок Л. В. Канторович заложил основы оптимизационно-экономико-математического анализа широкого круга фундаментальных экономических проблем, таких, как проблемы эффективности капитальных вложений, новой техники и других хозяйственных мероприятий, проблемы хозяйственного расчета, экономической оценки природных ресурсов, рационального использования труда. Использование объективно-обусловленных оценок обеспечило существенное продвижение в проблеме выбора показателей оценки деятельности предприятий и

других хозяйственных органов.

Следует заметить, что формулировка динамической модели оптимального планирования создала впечатление у ряда исследователей, что планирование и управление экономикой могут быть полностью осуществлены централизованно с помощью оптимизационной задачи. Леонид Витальевич был одним из первых, кто осознал важность декомпозиционных методов и лежащих в их основе локальных решений, с помощью которых в конечном счете формируется оптимальный план для всей экономики в целом. В своих работах он постоянно указывал на использование принципов декомпозиции как при решении больших задач линейного программирования, так и при организации реального процесса составления плана. В работе «Оптимальные модели перспективного планирования» (1965) этот вопрос проработан им особо.

В этой, а также в ряде последующих работ Леонид Витальевич изучал вопрос построения динамической модели оптимального планирования на базе существующей статистической информации, в частности на базе информации межотраслевого баланса. Путь, указанный в этих работах, оказался довольно плодотворным, и оптимизационные модели, базирующиеся на информации межотраслевого баланса, получили в свое время известное распространение.

В то же время внимание Л. В. Канторовича привлекали экономические модели, которые могли быть подвignуты достаточно полному математическому анализу в силу их малой размерности. Малоразмерные (однопродуктовые и двухпродуктовые) модели довольно интенсивно исследовались за рубежом. Накоплен обширный арсенал средств анализа таких моделей. Однако Л. В. Канторович и в этой области внес свой оригинальный вклад. В работе «О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродукто-

вой экономической модели» (1959) он сформулировал такую однопродуктовую модель, в которой учитывается срок ввода основных производственных фондов. Их анализ позволяет исследовать проблему амортизации и эффективности капитальных вложений и ряд других вопросов, которые особенно актуальны именно при планировании. К изучению однопродуктовых моделей Л. В. Канторович обращался не раз. Им рассматривались различные способы введения и учета технического прогресса. В частности, исследован вопрос о влиянии темпов технического прогресса на норматив эффективности капитальных вложений. Предложен способ оценки численной величины норматива исходя из имеющихся статистических данных. Тем самым впервые был дан объективный подход к исчислению нормы эффективности.

Экономические проблемы планирования

Л. В. Канторович внес выдающийся вклад в экономическую науку. При оценке этого вклада следует иметь в виду, что Леонид Витальевич жил и работал в стране с централизованным планированием, видел преимущества и недостатки этой системы и стремился усовершенствовать именно ее. Сделанное им не потеряло значения после изменения экономического уклада страны, хотя некоторые его достижения воспринимаются теперь в новом свете.

Рассмотрим прежде всего его вклад в проблему ценообразования — одну из коренных, затрагивающую, по существу, все сферы функционирования общества. С ликвидацией громоздкой системы централизованного установления цен научный расчет цен изменил свою роль, но не потерял значения. Принципиально важно, что Л. В. Канторович установил связь цен и общественно-необходимых затрат труда. Он дал определение понятия оптимума, оптимального развития, конкретизировав, в частности, что следует понимать под макси-

мальным удовлетворением потребностей членов общества. Из его положения о неразрывности плана и цен вытекает зависимость общественно-необходимых затрат труда от поставленных целей общества.

Таким образом, цели общества, оптимальный план и цены составляют одно неразрывное целое. Им были указаны конкретные условия, при которых объективно-обусловленные оценки оптимального плана совпадают с полными (прямыми и сопряженными) затратами труда. Определение перспектив экономики, наличие гигантских «естественных монополий» заставляет сохранить для них расчет по крайней мере опорных цен, согласованных и взаимно, и с интересами других отраслей экономики.

В работах Л. В. Канторовича исследовался ряд основных проблем экономической теории и практики хозяйствования. При этом характерно, что наряду с научным, теоретическим анализом проблемы, основывающимся на единой концепции оптимального плана и оптимальных (объективно-обусловленных) оценок, Леонид Витальевич учитывал специфику проблемы, накопленный опыт, делал конкретные выводы и формулировал практические предложения. Эти положения и подход нашли продолжение в работах многих ученых экономико-математического направления как в нашей стране, так и за рубежом. В определенной, хотя, к сожалению, и небольшой мере они уже используются и в экономической практике.

Указывая на недостатки действовавшей экономической системы, Л. В. Канторович подчеркивал, что система экономических показателей должна быть единой, построена по единому принципу. В связи с этим значительную часть своих работ в этой области Леонид Витальевич посвятил разработке и анализу конкретных экономических показателей.

Положение о необходимости оценки природных ре-

сурсов и принципы такой оценки использованы в работах самого Л. В. Канторовича и его учеников. Особое внимание было уделено оценке земельных ресурсов и воды, учету этих показателей в (заготовительных) ценах на сельскохозяйственную продукцию. Предложены оригинальные подходы к их расчету (сочетание метода наименьших квадратов и линейного программирования). На этой основе были даны рекомендации по улучшению системы экономических показателей и расчетов в сельском хозяйстве. Значение предложенных им принципов расчета в складывающейся экономической системе только возрастает. Здесь достаточно указать на значение рентных платежей, например, при использовании невосполнимых ресурсов.

В работах Л. В. Канторовича вскрывается сущность понятия показателя эффективности капиталовложений, показывается его роль в экономических расчетах принятия решений, предлагается методика определения величины этого нормативного показателя. Таким образом, Л. В. Канторович дал убедительное научное обоснование необходимости применения норматива эффективности и на основе оптимизационного подхода дал объективный путь его расчета.

В работе «Амортизационные платежи при оптимальном использовании оборудования» (1965) Л. В. Канторовичем была вскрыта сущность понятия амортизации. Он показал, как можно повысить эффективность использования оборудования, разделив амортизационные платежи на два типа, и с помощью остроумной математической модели указал, как определить численную величину коэффициента амортизационных отчислений. Это изменение позволило сделать ряд принципиальных выводов о необходимости коррективы принятой методики расчета амортизации.

Специальный интерес проявлял Леонид Витальевич к проблемам транспорта. Еще в его первых эконо-

мических работах были даны общий анализ транспортной задачи и метод потенциалов для ее решения. Этот метод широко использовался на транспорте (железнодорожном, автомобильном, морском, воздушном) и в органах централизованного снабжения для рационального прикрепления и рациональной организации перевозок. Он безусловно сохраняет свое значение и сейчас наряду с широко используемыми методами диспетчерского управления и расчетами маршрутов.

В работах «Об использовании математических моделей в ценообразовании на новую технику» (1968) и «Математико-экономический анализ плановых решений и экономические условия их реализации» (1971) Л. В. Канторович исследовал проблему эффективной работы транспорта с экономической точки зрения, показал, каковы должны быть транспортные тарифы в зависимости от вида транспорта, груза, расстояний и т. д. В ряде работ им рассматривались и вопросы комплексной транспортной системы — взаимосвязь транспорта с другими отраслями народного хозяйства и распределение перевозок между видами транспорта с учетом экономичности и в особенности энергозатрат. Эти работы сохраняют свое значение и сейчас.

Помимо проблем народно-хозяйственного планирования, Л. В. Канторович рассмотрел вопросы, относящиеся к отраслевому планированию. Наиболее простой и часто используемой является предложенная им модель, базирующаяся на транспортной задаче. На ряд более сложных моделей, в частности производственно-транспортной, динамической, декомпозиционной им указано в работах, посвященных текущему и перспективному отраслевому планированию («Возможность применения математических методов в вопросах производственного планирования», 1958) и др. Эти вопросы нашли отражение в исследованиях по отраслевым АСУ.

Большое внимание Леонид Витальевич уделял во-

просам рационального использования труда. В частности, по-видимому впервые, для более рационального распределения трудовых ресурсов им было предложено введение платежей предприятий за использование труда дифференцированных по профессиям, половозрастным признакам и территории. Он указывал также на возможности научного, количественного подхода к социальным проблемам, вопросам совершенствования сферы услуг и др. Вопросы экономического стимулирования рационального использования трудовых ресурсов остаются актуальными и сейчас.

В течение ряда лет и особенно в последние годы Л. В. Канторовича интересовали проблемы эффективности технического прогресса, среди них в частности вопросы внедрения в производство новой техники.

Особый интерес представляет обоснование предложения об установлении двух уровней цен на принципиально новую продукцию в первые годы ее выпуска. Важное значение имел также вывод о необходимости более высоко оценивать вклад в национальный доход технического прогресса и науки, чем это получалось по принятым тогда методам расчета («Ценообразование и технический прогресс», 1979).

Л. В. Канторович уделял большое внимание внедрению разработанных им методов в экономическую практику. В первую очередь в этой связи следует отметить цикл работ, посвященных методам рационального раскроя материалов, начатый Леонидом Витальевичем еще в 1939–1942 гг. В 1948–1950 гг. эти методы были внедрены на Ленинградском вагоностроительном заводе имени Егорова, на Кировском заводе и распространены впоследствии на некоторых других предприятиях. Более широкому распространению методов рационального раскроя способствовал ряд проведенных по инициативе Л. В. Канторовича совещаний.

С 1964 г. по предложению Леонида Витальевича

проводилась большая работа по внедрению системных методов расчета оптимальной загрузки прокатных станов в масштабах всей страны.

Являясь членом Государственного комитета по науке и технике, Л. В. Канторович вел большую организационную работу, направленную на совершенствование методов планирования и управления народным хозяйством. Он возглавлял Научный совет ГКНТ по использованию оптимизационных расчетов, состоял членом многих ведомственных советов и комиссий (по ценообразованию, транспорту и др.). Вклад Леонида Витальевича в исследование проблемы эффективности производства и, в частности, проблемы эффективности капитальных вложений исключительно велик.

*С. С. Кутателадзе, В. Л. Макаров
И. В. Романовский, Г. Ш. Рубинштейн*

Основная литература о жизни и трудах Л. В. Канторовича

Аганбегян А. Г. Роль Л. В. Канторовича в развитии экономической науки // Сиб. мат. журн. — 1982. — Т. 23, № 6. — С. 188–190.

Академик Л. В. Канторович и профессор Т. Купманс — лауреаты Нобелевской премии 1975 г. по экономике // Экономика и мат. методы. — 1976. — Т. 12, вып. 2. — С. 408–410.

Академик Леонид Витальевич Канторович (к семидесятилетию со дня рождения) // Сиб. мат. журн. — 1981. — Т. 22, № 6. — С. 3–6.

Академик Леонид Витальевич Канторович (к 75-летию со дня рождения) // Оптимизация: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1987. — Вып. 40. — С. 5–7.

Академику Леониду Витальевичу Канторовичу — 70 лет // Экономика и мат. методы. — 1982. — № 2. — С. 382–383.

Акилов Г. П. Он стрелял по невидимым целям // Экономика и орг. пром. пр-ва (ЭКО). — 1987. — № 1. — С. 93–97. — Посвящается памяти Л. В. Канторовича.

Бухвалов А. В. Канторович как теоретик менеджмента. К 90-летию со дня рождения Нобелевского лауреата по экономике Леонида Витальевича Канторовича // Российский журнал менеджмента. — 2003. — Т. 1, № 2. — С. 141–150.

Вершик А. М. Метрика Канторовича: начальная история и малоизвестные применения // Теория представлений, динамические системы. XI, Специальный выпуск. Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2004. — Т. 312. — С. 69–85.

Владимиров Д. А., Гавурин М. К., Мысовских И. П. Леонид Витальевич Канторович (к 70-летию со дня рождения) // Вестн. ЛГУ. — 1982. — № 1. Математика. Механика. Астрономия. Вып. 1. — С. 130–131.

Залгаллер В. А. Воспоминания о Л. В. Канторовиче и об эмоциях, связанных с его экономическими работами // Очерки истории информатики в России. — Новосибирск, 1998. — С. 449–456.

Канторович В. Л. Несколько фактов, связанных с публикуемыми работами Л. В. Канторовича // Теория представлений, динамические системы. XI, Специальный выпуск. Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2004. — Т. 312. — С. 17–23.

[К присуждению Л. В. Канторовичу Ленинской премии 1965 г. за работы в области математической экономики] // Один раз в жизни: О лауреатах Ленинской премии 1965 года. — [М., 1966]. — С. 59–60.

К шестидесятилетию академика Л. В. Канторовича // Сиб. мат. журн. — 1972. — Т. 13, № 1. — С. 3–5.

Канторович В. Л., Кутателадзе С. С., Фет Я. И. (Ред.) Леонид Витальевич Канторович — человек и учёный. Том 1. — Новосибирск: Филиал «Гео» Изд. СО РАН, Наука, 2002. — 543 с.

Канторович В. Л., Кутателадзе С. С., Фет Я. И. (Ред.) Леонид Витальевич Канторович — человек и учёный. Том 2. — Новосибирск: Филиал «Гео» Изд. СО РАН, Наука, 2004. — 614 с.

Колмогоров А. Н., Залгаллер В. А. Леонид Витальевич Канторович (к 70-летию со дня рождения) // Математика в шк. — 1982. — № 2. — С. 77–78.

Кочина П. Я. Воспоминания. — М., 1974. — С. 47, 190–193.

Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. О вкладе Л. В. Канторовича в теорию упорядоченных векторных пространств // Оптимизация: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1987. — Вып. 40. — С. 26–39.

Кутателадзе С. С. О математических работах Л. В. Канторовича // Сиб. мат. журн. — 1982. — Т. 23, № 6. — С. 190–191.

Кутателадзе С. С. Четыре математических съезда в жизни Л. В. Канторовича // Оптимизация: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1991. — Вып. 50 (67). — С. 135–140.

Кутателадзе С. С. Пространства Канторовича в современной математике // Экономика и мат. методы. — 1992. — Т. 28, № 5–6. — С. 834–835.

Кутателадзе С. С. Классик отечественной математики // Наука в Сибири. — 1994. — № 36. — С. 2.

Кутателадзе С. С. Л. В. Канторович и его научное наследие // Сибирская конференция по прикладной и индустриальной математике, посвященная памяти лауреата Нобелевской премии Л. В. Канторовича. — Новосибирск: Ин-т мат. им. С. Л. Соболева, 1997. — С. 1–7.

Кутателадзе С. С. Слово о Л. В. Канторовиче // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2004. — Т. 312. — С. 24–29.

Кутателадзе С. С. О математических работах Канторовича // Сибирские электронные мат. известия. — 2007. — Т. 4. — С. А1–А7.

Кутателадзе С. С. Феномен Канторовича // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 1. — С. 3–4.

Кутателадзе С. С. Канторович и математизация экономики / Л. В. Канторович. Избранные сочинения. Математико-экономические работы. — Новосибирск, Наука, 2011.

Кутателадзе С. С. Математика и экономика Л. В. Канторовича (к столетию со дня рождения) // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 1. — С. 3–17.

Кутателадзе С. С., Кусраев А. Г. Эвристический принцип Л. В. Канторовича // Сиб. журн. индустр. мат. — 2001. — Т. 4, № 2. — С. 18–28.

Кутателадзе С. С., Макаров В. Л., Романовский И. В., Рубинштейн Г. Ш. Научное наследие Л. В. Канторовича. — Сиб. журн. индустр. мат. — 2001. — Т. 4, № 2. — С. 4–17.

Кутателадзе С. С. (Ред.) Леонид Витальевич Канторович (1912–1986) // Биобиблиографический указатель. — Новосибирск: Инст. мат. им. С. Л. Соболева, 2002. — 140 с.

Кутателадзе С. С., Макаров В. Л., Романовский И. В., Рубинштейн Г. Ш. Леонид Витальевич Канторович (1912–1986) // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 1. — С. 3–8.

Кутателадзе С. С., Макаров В. Л., Романовский И. В., Рубинштейн Г. Ш. Л. В. Канторович — математик и экономист // Нобелевские лауреаты по экономике. Взгляд

из России. Под редакцией проф. Ю. В. Яковца. — Санкт-Петербург, Науч. изд-во «Гуманистика», 2003. — С. 776–803.

Кутателадзе С. С., Макаров В. Л., Романовский И. В., Рубинштейн Г. Ш. Обзор основных научных трудов Л. В. Канторовича. — Настоящее издание. — С. 60–89.

Л. В. Канторович, В. С. Немчинов, В. В. Новожилов — лауреаты Ленинской премии 1965 г. // Экономика и мат. методы. — 1965. — Т. 1, вып. 3. — С. 463–464.

Леонид Витальевич Канторович (к 50-летию со дня рождения) // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 1. — С. 5–6.

Леонид Витальевич Канторович (к пятидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1962. — Т. 17, вып. 4. — С. 201–215.

Леонид Витальевич Канторович (к шестидесятилетию со дня рождения) // Оптимизация. — 1971. — Вып. 3. — С. 7–9; Успехи мат. наук. — 1972. — Т. 27, вып. 3. — С. 221–227.

Леонид Витальевич Канторович (к семидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1982. — Т. 37, вып. 3. — С. 201–208.

Леонид Витальевич Канторович // Наука и человечество: Международный ежегодник, 1967. — М., 1967. — С. 346; Наука и человечество: Международный ежегодник, 1977. — М., 1977. — С. 278.

Леонид Витальевич Канторович (Некролог) // Вестн. АН СССР. — 1986. — № 6. — С. 106–107; Автоматика и телемеханика. — 1986. — № 8. — С. 176; Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, вып. 2. — С. 177–180.

Леонид Витальевич Канторович (1912–1986) (Некролог) // *Оптимизация*. — 1986. — Вып. 38. — С. 1; *Экономика и мат. методы*. — 1986. — Т. 22, вып. 4. — С. 763–767; *Сиб. мат. журн.* — 1987. — Т. 28, № 1. — С. 3–6.

Леониду Витальевичу Канторовичу — 60 лет // *Экономика и мат. методы*. — 1972. — Т. 8, № 1. — С. 3–6.

Макаров В. Л. Леонид Витальевич Канторович — выдающийся экономист современности (к 70-летию со дня рождения) // *Экономика и орг. пром. пр-ва (ЭКО)*. — 1982. — № 1. — С. 145–150.

Макаров В. Л. О вкладе Л. В. Канторовича в математическую экономику // *Сиб. мат. журн.* — 1982. — Т. 23, № 6. — С. 190.

Макаров В. Л. О динамических моделях экономики и развитии идей Л. В. Канторовича: К 75-летию со дня рождения академика Л. В. Канторовича // *Экономика и мат. методы*. — 1987. — Т. 23, вып. 1. — С. 10–24.

Макаров В. Л., Рубинштейн Г. Ш. О вкладе Л. В. Канторовича в развитие экономической науки // *Оптимизация: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]*. — Новосибирск, 1971. — Вып. 3. — С. 10–13.

Оптимизация: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1982. — Вып. 28 (45). — 148 с. — Посвящается Л. В. Канторовичу в связи с его семидесятилетием.

Петраков Н. Я. Бескомпромиссный боец // *Экономика и орг. пром. пр-ва (ЭКО)*. — 1987. — № 1. — С. 84–85.

Решетняк Ю. Г. Слово о Леониде Витальевиче Канторовиче // *Сибирские электронные мат. известия*. — 2007. — Т. 4. — С. А8–А13.

Романовский И. В. О программистских работах Л. В. Канторовича с сегодняшней точки зрения // Теория представлений, динамические системы. XI, Специальный выпуск. Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2004. — Т. 312. — С. 47–54.

Рубинштейн Г. Ш., Кутателадзе С. С. «В судьбе Леонида Витальевича проявилась историческая закономерность...»: [Беседа] // Экономика и орг. пром. пр-ва (ЭКО). — 1987. — № 1. — С. 86–92.

Фет Я. И. Об исследованиях Л. В. Канторовича в области архитектуры вычислительных машин // Оптимизация: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1987. — Вып. 40. — С. 17–25.

Фихтенгольц Г. М. Лауреат Государственной премии СССР 1949 г. проф. Л. В. Канторович // Вестн. ЛГУ. — 1949. — № 4. — С. 160–161.

Bentzel R. The prize for economic science in memory of Alfred Nobel // Les Prix Nobel en 1975. — Stockholm, 1976. — P. 256–257.

Charnes A. and Cooper W. W. On some works of Kantorovich, Koopmans and others // Mgmt. Sci. — 1962. — Vol. 8, No. 3. — P. 246–263.

Johansen L. L. V. Kantorovich's contribution to economics // Scand. J. Econ. — 1976. — Vol. 78, No. 1. — P. 61–80.

Koopmans T. C. A note about Kantorovich's paper "Mathematical methods of organizing and planning production" // Mgmt. Sci. — 1960. — Vol. 6, No. 4. — P. 363–365.

Koopmans T. C. On the evolution of Kantorovich's work of 1939 // Mgmt. Sci. — 1962. — Vol. 8, No. 3. — P. 264–265.

Makarov V. L. and Sobolev S. L. Academician L. V. Kantorovich // Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics. — New York and Oxford: Oxford University Press, 1990. — P. 1–7.

Zauberman A. The Mathematical Revolution in Soviet Economics. — London etc.: Oxford Univ. Press, 1975. — 62 p.

Zauberman A. Mathematical Theory in Soviet Planning: Concepts, Methods, Techniques. — London etc., 1976. — P. 4, 5, 8–13, 20, 28, 30, 33, 37, 46–49, 55, 70, 135, 140–150, 181, 233–247.

Хронологический указатель трудов

1929

Об универсальных функциях // Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва. — 1929. — Т. 2, вып. 2 — С. 13–21.

Sur le théorème de M. Vitali // C. R. Séanc. Soc. Sci. Lettres, Varsovie. — 1929. — Т. 22. — P. 142–148.

Sur les ensembles projectifs de la deuxième classe // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1929. — Т. 189, No. 27. — P. 1233–1235.

Sur les suites des fonctions rentrant dans la classification de M. W. H. Young // Fund. Math. — 1929. — Т. 13. — P. 178–185.

Sur un problème de M. Steinhaus // Fund. Math. — 1929. — Т. 14. — P. 266–270.

1930

О проективных множествах // 1-й Всесоюзный съезд математиков, Харьков, 24–29 июня 1930 г. — Харьков, 1930. — Бюл. № 1. — С. 26–27.

О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна // 1-й Всесоюзный съезд математиков, Харьков, 24–29 июня 1930 г. — Харьков, 1930. — Бюл. № 2. — С. 27–28.

О проективных множествах // Докл. АН СССР — А. — 1930. — № 21. — С. 563–568.

О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР — А. — 1930. — № 22. — С. 595–600.

Sur les δs -fonctions de M. Hausdorff // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1930. — T. 190, No. 6. — P. 352–354. — With Livénson E.

Sur les ensembles projectifs de M. Luzin // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1930. — T. 190, No. 19. — P. 1113–1115. — With Livénson E.

Sur les fonctions du type (A) // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1930. — T. 190, No. 22. — P. 1267–1269.

Sur les suites des fonctions presque partout continues // Fund. Math. — 1930. — T. 16. — P. 25–28.

1931

О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. — 1931. — № 8. — С. 1103–1115.

Несколько замечаний о приближении к функциям посредством полиномов с целыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. — 1931. — № 9. — С. 1163–1168.

1932

Об обобщенных производных непрерывных функций // Мат. сб. — 1932. — Т. 39, вып. 4. — С. 153–170.

Sur deux classes des opérations sur les ensembles fermés // C. R. Séanc. Soc. Sci. Lettres, Varsovie. — 1932. — T. 25. — P. 1–7. — With Livénson E.

Un exemple d'une fonction semicontinue universelle pour les fonctions continues // Fund. Math. — 1932. — T. 18. — P. 178–181.

Memoir on the analytical operations and projective sets. I
// Fund. Math. — 1932. — Т. 18. — P. 214–279. — With
Livénson E.

1933

Вариационное исчисление. — Л.: Кубуч, 1933. — 204 с.
— Соавт.: Смирнов В. И., Крылов В. И.

О некоторых методах построения функции, совершающей конформное отображение // Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. — 1933. — № 2. — С. 229–235.

Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла // Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. — 1933. — № 5. — С. 647–652.

О конформном отображении // Мат. сб. — 1933. — Т. 40, вып. 3. — С. 294–325.

Memoir on the analytical operations and projective sets. II
// Fund. Math. — 1933. — Т. 20. — P. 54–97. — With
Livénson E.

1934

О конформном отображении многосвязных областей // Докл. АН СССР. — 1934. — Т. 2, № 8. — С. 441–445.

Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. — 1934. — Т. 2, № 9. — С. 532–536.

Некоторые теоремы о линейных функционалах // Докл. АН СССР. — 1934. — Т. 3, № 5. — С. 307–312. — Соавт.: Фихтенгольц Г. М.

Об одном обобщении интеграла Стильтьеса // Докл. АН СССР. — 1934. — Т. 4, № 8–9. — С. 417–421.

Применение теории интегралов Стильтьеса к расчету балки, лежащей на упругом основании // Тр. Ленингр. ин-та инженеров пром. стр-ва. — 1934. — Вып. 1. — С. 17–34.

Об общих методах улучшения сходимости в способах приближенного решения граничных задач математической физики // Тр. Ленингр. ин-та инженеров пром. стр-ва. — 1934. — Вып. 2 — С. 65–72.

Некоторые исправления к моей статье «О конформном отображении» // Мат. сб. — 1934. — Т. 41, вып. 1. — С. 179–182.

О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей // Мат. сб. — 1934. — Т. 41, вып. 2. — С. 235–245.

La représentation explicite d'une fonction mesurable arbitraire dans la forme de la limite d'une suite de polynômes [Представление произвольной измеримой функции в виде предела последовательности полиномов] // Мат. сб. — 1934. — Т. 41, вып. 3. — С. 503–510.

Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées // *Studia Math.* — 1934. — Т. 5. — С. 69–98. — With Fichtenholz G. M.

1935

О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР. — 1935. — Т. 4, № 1–2. — С. 11–14.

О некоторых общих методах расширения пространства Гильберта // Докл. АН СССР. — 1935. — Т. 4, № 3. — С. 115–118.

Некоторые частные методы расширения пространства Гильберта // Докл. АН СССР. — 1935. — Т. 4, № 4–5. — С. 163–167.

О продолжении семейств линейных функционалов // Докл. АН СССР. — 1935. — Т. 1, № 4. — С. 204–210.

Sur un espace des fonctions à variation bornée et la différentiation d'une série terme à terme // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1935. — Т. 201, No. 27. — P. 1457–1460.

Über die Vollständigkeit eines Systems von Funktionen, die von einem stetigen Parameter abhängen: (Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen erster Art) // Compositio Math. — 1935. — Bd 2, Fasc. 3. — S. 406–416.

1936

Методы приближенного решения уравнений в частных производных. — Л.; М.: ОНТИ; Гл. ред. общетехн. лит., 1936, — 528 с. — Соавт.: Крылов В. И.

О конформном отображении областей // Труды 2 Всесоюзного математического съезда, Ленинград, 24–30 июня 1934 г., Т. 2. Секцион. докл. — Л.; М., 1936. — С. 173.

О некоторых методах приближенного решения уравнений в частных производных // Труды 2 Всесоюзного математического съезда, Ленинград, 24–30 июня 1934 г., Т. 2. Секцион. докл. — Л.; М., 1936. — С. 398.

К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 1, № 7. — С. 271–274.

Некоторые теоремы о полуупорядоченных пространствах общего вида // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 2, № 1. — С. 7–10.

Основы теории функций вещественного переменного со значениями, принадлежащими полуупорядоченному линейному пространству // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 2, № 9. — С. 359–363.

О некоторых классах линейных операций // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 3, № 1. — С. 9–13.

Общие формы некоторых классов линейных операций // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 3, № 3. — С. 101–106.

Об одном классе функциональных уравнений // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 4, № 5. — С. 211–216.

Sur les propriétés des espaces semi-ordonnés linéaires // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1936. — Т. 202, No. 10. — P. 813–816.

Les formes générales des opérations linéaires qui transforment quelques espaces classiques dans un espace semi-ordonné linéaire arbitraire // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1936. — Т. 202, No. 14. — P. 1251–1253.

1937

Конформное отображение круга на односвязную область // Конформное отображение односвязных и многосвязных областей. — М.; Л.: НИИММ ЛГУ, 1937. — Т. 2. — С. 5–17.

Эффективные методы в теории конформных отображений // Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. Сер. мат. — 1937. — Vol. 1, № 1. — С. 79–90.

О полуупорядоченных пространствах // Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. Сер. мат. — 1937. — Vol. 1, № 1. — С. 91–110.

О последовательностях линейных операций // Докл. АН СССР. — 1937. — Т. 14, № 5. — С. 225–259.

К проблеме моментов для конечного интервала // Докл. АН СССР. — 1937. — Т. 14, № 9. — С. 531–536.

Некоторые теоремы о сходимости почти везде // Докл. АН СССР. — 1937. — Т. 14, № 9. — С. 537–540.

К проблеме моментов для конечного интервала: [Поправка к статье] // Докл. АН СССР. — 1937. — Т. 16, № 3. — С. 150.

О функциональных уравнениях // Учен. зап. ЛГУ. — 1937. — Т. 3, № 7. — С. 24–50.

Применение одного метода приближенного решения уравнений в частных производных к решению задачи о кручении призматических стержней // Тр. Ленингр. ин-та инженеров пром. стр-ва. — 1937. — Вып. 4. — С. 111–112. — Соавт.: Фрумкин П. В.

Linéaire halbgeordnete Räume // Мат. сб. — 1937. — Т. 2, No. 1. — С. 121–168.

Sur quelques théorèmes concernant la théorie des ensembles projectifs // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1937. — Т. 204, No. 7. — P. 466–468. — With Livénson E. M.

Sur la representation des opérations linéaires // Compositio Math. — 1937. — Т. 5, Fasc. 1. — P. 119–165. — With Vulikh B. Z.

1938

Теория функций вещественной переменной и функциональный анализ // Математика и естествознание в СССР: Очерки развития мат. и естеств. наук за двадцать лет. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1938. — С. 20–29. — Соавт.: Фихтенгольц Г. М.

Sur la continuité et sur le prolongement des opérations linéaires // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1938. — Т. 206, No. 12. — P. 833–835.

Sur les fonctionnelles partiellement additives dans les espaces semiordonnés // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1938. — Т. 207, No. 26. — P. 1376–1378. — With Pinsker A. G.

Sur un théorème de M. N. Dunford // Compositio Math. — 1938. — Т. 5, No. 3. — P. 430–432. — With Vulikh B. Z.

Мой путь в науке // Ленингр. ун-т. — 1938. — 23 сент.

1939

Математические методы организации и планирования производства. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. — 68 с.

То же на англ. яз.: Mathematical methods of organizing and planning production // Management Sci. — 1960. — Vol. 6, No. 4. — P. 366–422.

О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта: (Рез. докл.). — Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. — 4 с.

К теории интегралов Стильеса — Римана // Учен. зап. ЛГУ. — 1939. — № 37. Сер. мат. наук, вып. 6. — С. 52–68.

The method of successive approximations for functional equations // Acta Math. Stockh. — 1939. — Vol. 71, No. 1–2. — P. 63–97.

Sur les formes générales des fonctionnelles partiellement additives dans certains espaces semiordonnés // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1939. — Т. 208, No. 2. — P. 72–74. — With Pinsker A. G.

К общей теории полуупорядоченных пространств. — Принято к печати в 1939 году. — Соавт.: Лоренц Г. Г. — Рукопись на немецком языке. Опубликовано в 2009 году: Zur allgemeinen Theorie der halbgeordneten Räume

[On the general theory of semi-ordered spaces] // J. Approx. Theory. — 2009. — Vol. 156, No. 1. — P. 28–51. — With Lorentz G.

Реф.: Пинскер А. Г. О расширении полуупорядоченных пространств (ДАН СССР. 1938. Т. 21, № 1–2. С. 6–10) // Физ.-мат. РЖ. — 1939. — Т. 1, вып. 6. — С. 546–547.

Реф.: Пинскер А. Г. Аналитическое представление некоторых частично-аддитивных функционалов (ДАН СССР. 1938. Т. 18, № 7. С. 397–401) // ДАН СССР. 1938. Т. 18, № 7. С. 547.

Реф.: Пинскер А. Г. Об одном функционале в пространстве Hilbert'a (ДАН СССР. 1938. Т. 20, № 6. С. 411–413) // ДАН СССР. 1938. Т. 18, № 7. С. 547.

Реф.: Гавурин М. О k -кратно-линейных операциях в пространствах Banach'a (ДАН СССР. 1939. Т. 22, № 9. С. 547–551) // Физ.-мат. РЖ. — 1939. — Т. 2, вып. 1–2. — С. 20.

Реф.: Явец М. А. Классификация Borel–Young'a элементов полуупорядоченных пространств (Зап. НИИ математики и механики и Харьковск. мат. о-ва. Сер. 4. Т. 15. 1938. Вып. 2. С. 35–40) // Физ.-мат. РЖ. — 1939. — Т. 2, вып. 1–2. — С. 22.

Реф.: Пинскер А. Г. О некоторых свойствах расширенных k -пространств (ДАН СССР. 1939. Т. 22, № 5. С. 220–224) // Физ.-мат. РЖ. — 1939. — Т. 2, вып. 1–2. — С. 22.

Реф.: Юдин А. Решение двух проблем теории полуупорядоченных пространств (ДАН СССР. 1939. Т. 23, № 5. С. 418–422) // Физ.-мат. РЖ. — 1939. — Т. 2, вып. 3. — С. 148.

Реф.: Гавурин М. К построению дифференциального и интегрального исчисления в пространствах Banach'a

(ДАН СССР. 1939. Т. 22, № 9. С. 552–556) // Физ.-мат. РЖ. — 1939. — Т. 2, вып. 3. — С. 148–149.

1940

Определенные интегралы и ряды Фурье. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1940. — 248 с.

Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем // Докл. АН СССР. — 1940. — Т. 28, № 3. — С. 212–215.

Linear operations in semi-ordered spaces: I // Мат. сб. — 1940. — Т. 7, вып. 2. — С. 209–284.

Реф.: Вулих Б. З. О метризации сходимостей в линейных пространствах (ДАН СССР. 1939. Т. 23, № 5. С. 433–437) // Физ.-мат. РЖ. — 1940. — Т. 3, вып. 5. — С. 426–427.

Реф.: Вулих Б. З. K -нормированные пространства (Учен. зап. ЛГПИ им. Герцена. 1939. Т. 28. Каф. математики. С. 179–224) // Физ.-мат. РЖ. — 1940. — Т. 4, вып. 3. — С. 239.

1941

Приближенные методы высшего анализа. — 2-е изд., перераб. — Л.; М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1941. — 618 с. — Соавт.: Крылов В. И.

То же на англ. яз.: Approximate Methods of Higher Analysis. — New York/Gröningen: Interscience/P. Noordhoff, 1958. — XII, 681 p. — With Krylov V. I.

Некоторые замечания о методе Ритца // Тр. Высш. инж.-техн. уч-ща Военно-Морск. Флота. — 1941. — Вып. 3. — С. 3–16.

О сходимости вариационных процессов // Докл. АН СССР. — 1941. — Т. 30, № 2. — С. 107–111.

О сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Докл. АН СССР. — 1941. — Т. 30, № 7. — С. 579–582.

Рец.: Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А. Курс математического анализа. М.; Л. 1940, Т. 1. 460 с. // Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. Сер. мат. — 1941.—Т. 5, № 4–5.—С. 381–383.—Соавт.: Натансон И. П.

1942

О перемещении масс // Докл. АН СССР. — 1942. — Т. 37, № 7–8. — С. 227–229.

То же на англ. яз.: On the translocation of masses // Management Sci. — 1958. — Vol. 5. — P. 1–4. On mass transportation // J. Math. Sci., New York. — 2006. — Vol. 133, No. 4. — P. 1381–1382.

Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Прикл. математика и механика. — 1942. — Т. 6, вып. 1. — С. 31–40.

Рациональные методы раскроя металла // Произв.-техн. бюл./ НКБ СССР. — 1942. — № 7–8. — С. 21–29.

1944

Некоторые соображения по расстановке минных полей в связи с подсчетом вероятностей поражения // Тр. ВВ-МИСУ. — 1944. — Т. 6.

1945

Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала // Докл. АН СССР. — 1945. — Т. 48, № 7. — С. 485–487.

1946

Теория вероятностей. — Л., 1946. — 153 с.

Об одном методе решения задач о минимуме квадратичных функционалов // Успехи мат. наук. — 1946. — Т. 1, вып. 5–6. — С. 241.

1947

О методе наискорейшего спуска // Докл. АН СССР. — 1947. — Т. 56, № 3. — С. 233–236.

1948

Приближенные методы // Математика в СССР за тридцать лет, 1917–1947. — М.; Л.: 1948. — С. 759–801. — Соавт.: Крылов В. И.

О методе Ньютона для функциональных уравнений // Докл. АН СССР. — 1948. — Т. 59, № 7. — С. 1237–1240.

К общей теории приближенных методов анализа // Докл. АН СССР. — 1948. — Т. 60, № 6. — С. 957–960.

Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 6. — С. 89–185.

То же на англ. яз.: Functional Analysis and Applied Mathematics. Nat. Bur. Standards Report No. 1509, Washington: U. S. Department of Commerce, 1952. — II, 202 p.

Функциональный анализ и прикладная математика // Вестн. ЛГУ. — 1948. — № 6. — С. 3–18.

Григорий Михайлович Фихтенгольц (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 5. — С. 179–181. — Соавт.: Смирнов В. И., Натансон И. П.

Григорий Михайлович Фихтенгольц (к шестидесятилетнюю со дня рождения) // Вестн. ЛГУ. — 1948. — № 6. — С. 133–135 — Соавт.: Смирнов В. И., Натансон И. П.

Об одной проблеме Монжа // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 2. — С. 225–226.

То же на англ. яз.: On a problem of Monge // J. Math. Sci., New York. — 2006. — Vol. 133, No. 4. — P. 1383.

О некоторых новых приемах вычислений на табуляторе, связанных с использованием двоичных разложений чисел // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 4. — С. 160–162. — Соавт.: Гавурин М. К.

Об одном методе последовательных приближений для решения интегральных уравнений // Бюл. науч.-исслед. работ / Упр. воен.-мор. учеб. заведений. Секция инж.-техн. — 1948. — Вып. 9. — С. 3–10.

1949

Приближенные методы высшего анализа. — 3-е изд. — М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит. — 1949. — 695 с. — Соавт.: Крылов В. И.

Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. — С. 110–138. — Соавт.: Гавурин М. К.

Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций // Сборник работ по приближенному анализу Ленинградского отделения института им. В. А. Стеклова. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. — С. 3–25. — (Тр. МИАН; Т. 28).

О методе Ньютона // Сборник работ по приближенному анализу Ленинградского отделения института им.

В. А. Стеклова. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. — С. 104–144. — (Тр. МИАН; Т. 28).

О дифференциальных уравнениях вида $x'' = f(x)$ // Сборник работ по приближенному анализу Ленинградского отделения института им. В. А. Стеклова. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. — С. 148–151. — (Тр. МИАН; Т. 28).

Подбор поставок, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте // Лес. пром-сть. — 1949. — № 7. — С. 15–17; № 8. — С. 17–19.

Ред.: Сборник работ по приближенному анализу Ленинградского отделения института им. В. А. Стеклова. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. — 184 с. — (Тр. МИАН; Т. 28).

1950

Приближенные методы высшего анализа. — 3-е изд. — М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950. — 695 с. — Соавт.: Крылов В. И.

Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. — М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950. — 548 с. — Соавт.: Вулих Б. З., Пинскер А. Г.

1951

Расчет рационального раскроя промышленных материалов. — Л.: Лениздат, 1951. — 198 с. — Соавт.: Залгаллер В. А.

Принцип мажорант и метод Ньютона // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 76, № 1. — С. 17–20.

Принцип мажорант и метод Ньютона // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, вып. 3. — 1951. — Т. 76, № 1. — С. 131–132.

Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант // Докл. АН СССР.—1951.—Т. 80, № 6.—С. 849–852.

Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, вып. 3. — С. 31–98. — Соавт.: Вулих В. З., Пинскер А. Г.

То же на англ. яз.: Partially ordered groups and partially ordered linear spaces // Amer. Math. Soc. Transl., II, Ser. — 1963. — Vol. 27. — P. 51–124. — With Vulikh B. Z. and Pinsker A. G.

1952

Приближенные методы высшего анализа. — 4-е изд. — М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1952. — 695 с. — Соавт.: Крылов В. И.

Functional Analysis and Applied Mathematics. Nat. Bur. Standards Report No. 1509, Washington: U. S. Department of Commerce, 1952. — II, 202 p.

Рец.: Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.; Л. 1951. 360 с. // Сов. кн. — 1952. — № 8. — С. 21–23.

1953

A felsőbb analizis közelítő módszerei. — Budapest: Akad. Kiado, 1953. — L. 703. — With Krúlov V. I.

Рец.: Эльсгольц Л. Э. Вариационное исчисление. М.; Л. 1952. 168 с. // Сов. кн. — 1953. — № 6. — С. 32–33.

1954

А. с. 98671. СССР. Функциональный преобразователь. — № 436222/2323; Заявл. 3.10.50; Оpubл. 30.09.54 (Бюл. изобр., № 7, 1954). — Соавт.: Гавурин М. К., Эпштейн В. Л.

1956

Таблицы для численного решения граничных задач теории гармонических функций. — М.: Гостехиздат, 1956. — 462 с. — Соавт.: Крылов В. И., Чернин К. Е.

То же на англ. яз.: Tables for the Numerical Solution of Boundary Value Problems of the Theory of Harmonic Functions. — New York; Ungar: Frederick Under Publ. Co., 1964. — 462 p. — With Krylov V. I. and Chernin K. Ye.

Metode de Aproximație ale Analizei Superioare. — București: S.n., 1956. — Vol. 2-3. — 330 p. — With Krylov V. I.

Näherungsmethoden der höheren Analysis. — Berlin: VEB Dt. Verl. Wiss., 1956. — XI, 611 s. — With Krylov W. I.

Перспективы развития и использования электронных счетных машин // Математика, ее содержание, методы и значение. — М., 1956. — Т. 2. — С. 382-390.

Функциональный анализ и вычислительная математика // Труды 3 Всесоюзного математического съезда, Москва, июнь-июль 1956 г. — М., 1956. — Т. 2: Крат. содерж. обзор. и секц. докл. — С. 43. — Соавт.: Соболев С. Л., Люстерник Л. А.

О математической символике, удобной при вычислениях на машинах // Труды 3 Всесоюзного математического съезда, Москва, июнь-июль 1956 г. — М., 1956. — Т. 2: Крат. содерж. обзор. и секц. докл. — С. 151. — Соавт.: Петрова Л. Т.

Об интегральных операторах // Успехи мат. наук. — 1956. — Т. 11, вып. 2. — С. 3-29.

Исправления к статье Л. В. Канторовича «Об интегральных операторах» // Успехи мат. наук. — 1956. — Т. 11, вып. 4. — С. 232.

Исидор Павлович Натансон (к 50-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1956. — Т. 11, вып. 4. — С. 193–196. — Соавт.: Фаддеев Д. К.

Приближенное решение функциональных уравнений // Успехи мат. наук. — 1956. — Т. 11, вып. 6. — С. 99–116.

Счетные комбайны: [Беседа] // Сов. Латвия. — 1956. — 18 марта.

1957

Возможность применения математических методов в вопросах производственного планирования // Организация и планирование равномерной работы машиностроительных предприятий: Тез. докл. Межвуз. совещ. — Л., 1957. — Вып. 2. — С. 18–20.

[Выступление на пленарном заседании Сессии АН СССР по научным проблемам автоматизации производства: Крат. излож.] // Сессия Академии наук СССР по научным проблемам автоматизации производства, 15–20 окт. 1956 г.: Пленар. заседания. — М., 1957. — С. 152–154.

Об одной математической символике, удобной при проведении вычислений на машинах // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 113, № 4. — С. 738–741.

О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 115, № 3. — С. 441–444.

Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 115, № 6. — С. 1058–1061. — Соавт.: Рубинштейн Г. Ш.

О проведении численных и аналитических вычислений на машинах с программным управлением // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1957. — Т. 10, № 2. — С. 3–16.

Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона для функциональных уравнений // Вестн. ЛГУ. — 1957. — № 2. Математика. Механика. Астрономия. Вып. 7. — С. 68–103.

1958

О применении современных математических методов при определении экономической эффективности капитальных вложений.—М.: Изд-во АН СССР, 1958.—19 с.

Approximate Methods of Higher Analysis. — New York and Gröningen: Interscience and P. Noordhoff Ltd., 1958. — XII, 681 p. — With Krylov V. I.

Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах. — Шанхай: Б.и., 1958. — Т. 1. — 242 с. — Соавт.: Вулих Б. З., Пинскер А. Г.

Approximate solution of functional equations (Chinese) // Adv. in Math. — 1958. — Vol. 4. — P. 1–13.

On the translocation of masses // Management Sci. — 1958. — Vol. 5. — P. 1–4.

Игр теория // БСЭ. — 2-е изд. — 1958. — Т. 51. — С. 125–126. — Соавт.: Канторович И. Л.

Линейное программирование // БСЭ. — 2-е изд. — 1958. — Т. 51. — С. 175–177. — Соавт.: Рубинштейн Г. Ш.

Операций исследование // БСЭ. — 2-е изд. — 1958. — Т. 51. — С. 216–218. — Соавт.: Иванов А. А.

Возможность применения математических методов в вопросах производственного планирования // Организация и планирование равномерной работы машиностроительных предприятий: Межвуз. совещ.: Докл. — М.; Л., 1958. — С. 338–353. — (Тр. Ленингр. инж.-экон. ин-та; Вып. 22).

Об одной системе программирования // Конференция «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения»: Секция универс. цифровых машин (Применение машин), Москва, 12–17 марта 1956 г. — М., 1958. — Ч. 3. — С. 30–36. — Соавт.: Петрова Л. Т., Яковлева М. А.

[Поправки к статьям: «О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач» (ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 3) и «Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах» (ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 6)] // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 118, № 6. — С. 1054. — Соавт.: Рубинштейн Г. Ш.

Григорий Михайлович Фихтенгольц (к 70-летию со дня рождения) // Вестн. ЛГУ. — 1958. — № 7. Математика. Механика. Астрономия. Вып. 2. — С. 5–13. — Соавт.: Натансон И. П.

Об одном пространстве вполне аддитивных функций // Вестн. ЛГУ. — 1958. — № 7. Математика. Механика. Астрономия. Вып. 2. — С. 52–59. — Соавт.: Рубинштейн Г. Ш.

Ред.: Математика / Отв. ред. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1958. — 96 с. — (Учен. зап. ЛГУ, № 271. Сер. мат. наук; Вып. 33).

1959

Функциональный анализ в нормированных пространствах.—М.: Физматгиз, 1959.—684 с.—Соавт.: Акилов Г.П.

То же на англ. яз.: Functional Analysis in Normed Spaces. — Oxford etc.: Pergamon Press, 1964. — XIII, 773 p. — (Int. Ser. of Monogr. in Pure and Applied Math.; Vol. 46). — With Akilov G. P.

То же на немец. яз.: *Funktionalanalysis in Normierten Räumen.* — Berlin: Akademie, 1964. — XV, 622 s. — With Akilov G. P.

Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — 344 с.

Линейное программирование // МСЭ. — 3-е изд. — 1959. — Т. 5. — С. 579–581. — Соавт.: Рубинштейн Г. Ш.

Операций исследование // МСЭ. — 3-е изд. — 1959. — Т. 6. — С. 916–917. — Соавт.: Иванов А. А.

Приближенные и численные методы // Математика в СССР за сорок лет, 1917–1957: В 2-х т. — М., 1959. — Т. 1: Обзорные статьи. — С. 809–855. — Соавт.: Гавурин М. К.

Математические методы организации и планирования производства // Применение математики в экономических исследованиях. — [2-е изд.]. — М.: Соцэкгиз, 1959. — С. 251–309.

То же на англ. яз.: *Mathematical methods of production planning and organization // The Use of Mathematics in Economics.* — Edinburgh: Oliver and Boyd Limited, 1964. — P. 225–279.

Дальнейшее развитие математических методов и перспективы их применения в планировании и экономике // Применение математики в экономических исследованиях. — М.: Соцэкгиз, 1959. — С. 310–353.

О применении современных математических методов при определении экономической эффективности капитальных вложений // Экономическая эффективность капитальных вложений и новой техники. — М., 1959. — С. 227–237.

[Выступление на совещании в Институте экономики АН СССР по проблеме товарного производства и использования закона стоимости при социализме] // Закон стоимости и его использование в народном хозяйстве СССР. — М., 1959. — С. 289–295.

О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 129, № 4. — С. 732–735. — Соавт.: Горьков Л. И.

То же на англ. яз.: Some functional relations which arise in analysis of a one-product economic model // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 51–56. — With Gor'kov L. I.

[Выступление на общем годовичном собрании АН СССР 26–28 марта 1959 г.] // Вестн. АН СССР. — 1959. — № 4. — С. 59–61.

Григорий Михайлович Фихтенгольц (некролог) // Вестн. ЛГУ. — 1959. — № 19. Математика. Механика. Астрономия. Вып. 4. — С. 158–159. — Соавт.: Александров А. Д., Акилов Г. П., Ашневиц И. Я., Валландер С. В. и др.

Григорий Михайлович Фихтенгольц (некролог) // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 14, вып. 5. — С. 123–128. — Соавт.: Натансон И. П.

Ред.: Линейные неравенства и смежные вопросы: Сб. статей под ред. Г. У. Куна и А. У. Таккера: С прил. кн. С. Вайда «Теория игр и линейное программирование»: Пер. с англ./ Под ред. Л. В. Канторовича, В. В. Новожилова. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959. — 469 с.

Предисловие к русскому изданию // Линейные неравенства и смежные вопросы: Сб. статей под ред. Г. У. Куна и А. У. Таккера: С прил. кн. С. Вайда «Теория игр и линейное программирование»: Пер. с англ./ Под ред.

Л. В. Канторовича, В. В. Новожилова. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959. — С. 5–8.

Ред.: Работы по приближенному анализу. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. — 392 с. — (Тр. МИАН; Т. 52).

От редактора // Работы по приближенному анализу. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. — С. 3–4. — (Тр. МИАН; Т. 52).

А. с. 123762. СССР. Релейная клавишная вычислительная машина для автоматического выполнения арифметических операций. — № 595834/26; Заявл. 29.03.58; Опубл. 9.09.59 (Бюл. изобр., № 21, 1959). — Соавт.: Поснов Н. Н., Петров Ю. П.

1960

Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. — М.: Изд-во АН СССР, 1960. — 347 с.

Оптимальное планирование и экономические показатели. — М.: ВИНТИ, 1960. — 18 с.

Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. — Шанхай: Б.и., 1960. — Т. 2. — 590 с. — Соавт.: Вулих Б. З., Пинскер А. Г.

Об исчислении производственных затрат // Вопр. экономики. — 1960. — № 1. — С. 122–134.

То же на англ. яз.: On the calculation of production inputs // Problems of Economic Transition. — 1960. — Vol. 3, No. 1. — P. 3–10.

Mathematical methods of organizing and planning production // Management Sci. — 1960. — Vol. 6, No. 4. — P. 366–422.

Формулы вторгаются в жизнь: [О расширении сферы применения математики] // Ленингр. правда. — 1960. — 15 июня.

1961

Rachunek Ekonomiczny Optymalnego Wykorsystania Zasobów. — Warszawa: Państw. Wyd-wo Ekon., 1961. — 506 s.

Оптимальное планирование и экономические показатели // Общие вопросы применения математики в экономике и планировании. — М., 1961. — С. 67–99. — (Тр. науч. совещ. о применении мат. методов в экон. исслед. и планир., 4–8 апр. 1960 г.; Т. 1).

[О применении вычислительной машинной техники в экономике и планировании: Выступление в прениях] // Общие вопросы применения математики в экономике и планировании. — М., 1961. — С. 160–164. — (Тр. науч. совещ. о применении мат. методов в экон. исслед. и планир., 4–8 апр. 1960 г.; Т. 1).

[Заключительное слово] // Общие вопросы применения математики в экономике и планировании. — М., 1961. — С. 259–271. — (Тр. науч. совещ. о применении мат. методов в экон. исслед. и планир., 4–8 апр. 1960 г.; Т. 1).

[Выступления в прениях по докладам секции линейного программирования] // Линейное программирование. — М., 1961. — С. 122–123, 125–126. — (Тр. науч. совещ. о применении мат. методов в экон. исслед. и планир., 4–8 апр. 1960 г.; Т. 4).

Проблемы математической экономики // 4 Всесоюзный математический съезд, 3 июля — 12 июля 1961 г.: Аннот. пленар. докл. — Л.: 1961. — С. 13–14.

Ред.: Общие вопросы применения математики в экономике и планировании / Под ред. Л. В. Канторовича,

И. А. Кулева, Л. Е. Минца, В. В. Новожилова. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — 295 с. — (Тр. науч. совещ. о применении мат. методов в экон. исслед. и планир., 4–8 апр. 1960 г.; Т. 1).

1962

Приближенные методы высшего анализа. — 5-е изд., испр. — М.; Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с. — Соавт.: Крылов В. И.

Исследование операций // Автоматизация производства и промышленная электроника: Энциклопедия соврем. техники. — М., 1962. — Т. 1. — С. 518–520. — Соавт.: Романовский И. В.

Исследование операций // Заоч. экон. курсы. — 1962. — Вып. 7. — С. 14–15. — (Прил. к Экон. газ. — 1962. — 8 сент.). — Соавт.: Романовский И. В.

О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 5. — С. 701–709.

[О развитии математических методов решения экономических задач учеными Сибирского отделения АН СССР: Выступление на координац. совещ. по вопр. использ. математики и вычисл. техники в экономике. Крат. излож.] // Вопр. экономики. — 1962. — № 4. — С. 77.

Победы «электронных экономистов»: [О новых мат. методах в экономике] // Комс. правда. — 1962. — 7 июля.

Ред.: Работы по автоматическому программированию, численным методам и функциональному анализу. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. — 384 с. — (Тр. МИАН; Т. 66). — Соавт.: Фаддеева В. Н., Петровский И. Г.

Предисловие редакторов // Работы по автоматическому программированию, численным методам и функциональному анализу. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. — С. 3. — (Тр. МИАН; Т. 66). — Соавт: Фаддеева В. Н.

Ред.: Чернин К. Е. Таблицы для численного решения граничных задач, связанных с уравнением Пуассона. — Л.: Мор. трансп., 1962. — 733 с. — (Тр. Аркт. и Антаркт. НИИ; Т. 252).

1963

Calcul Économique et Utilisation des Ressources. — Paris: Dunod, 1963. — XVII–XXVII, 306 p. — (Finance et Économic Appliquée; Vol. 15).

Проблемы математической экономики: (Тез. докл.) // Труды 4 Всесоюзного математического съезда, Ленинград, 3–12 июля 1961 г. — Л., 1963. — Т. 1: Пленар. докл. — С. 100–101.

Амортизационные отчисления и эффективность применения новой техники в системе оптимального планирования // Применение математики и электронно-вычислительной техники в экономике: Межвуз. науч. конф. (16–18 дек. 1963 г.): Тез. докл. пленар. заседания. — Л., 1963. — С. 66–68.

Electronic computing machines // Mathematics: Its Content, Methods and Meaning / Ed. by A. D. Alexandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev. — Providence, 1963. — Pt 4. — P. 143–190. — (Transl. of Math. Monogr.; Vol. 1). — With Lebedev S. A.

[Проблематика математических методов в оптимальном планировании: Докл. на конф. по применению мат. методов и ЭВМ в планир., Новосибирск] // Вопр. экономики. — 1963. — № 3. — С. 81–82.

Борис Захарович Вулих (к пятидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1963. — Т. 18, вып. 6. — С. 242–243. — Соавт.: Акилов Г. П., Владимиров Д. А., Натансон И. П.

То же на англ. яз.: Boris Zakharovich Vulikh (on the occasion of his fiftieth birthday) // Russian Math. Surveys. — 1963. — Vol. 18, No. 6. — P. 193–194. — With Akilov G. P., Vladimirov D. A., and Natanson I. P.

Partially ordered groups and partially ordered linear spaces // Amer. Math. Soc. Transl., II, Ser. — 1963. — Vol. 27. — P. 51–124. — With Vulikh B. Z. and Pinsker A. G.

Условие оптимального планирования // Экон. газ. — 1963. — 20 апр.

1964

Approximate Methods of Higher Analysis. 3rd ed. — New York and Gröningen: Interscience and P. Noordhoff, 1964. — 681 p. — With Krylov V. I.

Functional Analysis in Normed Spaces. — Oxford etc.: Pergamon Press, 1964. — XIII, 773 p. — (Int. Ser. of Monogr. in Pure and Applied Math.; Vol. 46). — With Akilov G. P.

Funktionalanalysis in Normierten Räumen. — Berlin: Akademie, 1964. — XV, 622 s. — With Akilov G. P.

Tables for the Numerical Solution of Boundary Value Problems of the Theory of Harmonic Functions. — New York; Ungar: Frederick Under Publ. Co., 1964. — 462 p. — With Krylov V. I. and Chernin K. Ye.

Динамическая модель оптимального планирования // Планирование и экономико-математические методы: К семидесятилетию со дня рождения академика В. С. Немчинова. — М., 1964. — С. 323–345.

То же на англ. яз.: A dynamic model of optimum planning // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 24–50.

Перспективы применения методов оптимального программирования в сельскохозяйственном производстве // Применение математических методов в экономических исследованиях по сельскому хозяйству. — М.: Экономика, 1964. — С. 12–20.

Победы «электронных экономистов» // Звездолеты и сфинксы. — М., 1964. — С. 12–14.

Further development of mathematical methods and the prospects of their application in economic planning // The Use of Mathematics in Economics. — Edinburgh: Oliver and Boyd Limited, 1964. — P. 281–321.

[Выступление на общем собрании АН СССР, 3–5 февр. 1964 г.] // Вестн. АН СССР. — 1964. — № 4. — С. 75–77.

[Выступление на конференции «Круглого стола» в Агентстве печати «Новости», посвященной применению математических методов в экономике: Излож., перераб. и доп.] // Вопр. экономики. — 1964. — № 9. — С. 77–83.

[Выступление на заседании «Кибернетика, планирование и социальная система» в редакции журнала «Вопросы экономики»: Крат. излож.] // План. хоз-во. — 1964. — № 5. — С. 91.

Коли наука досягає досконалості! // Наука і життя. — 1964. — № 6. — С. 34–36. — Соавт.: Горстко А.

Ein dynamisches Modell der optimalen Planung // Sowjetwissenschaft. Gesellw. Beitr. — 1964. — H. 7. — S. 707–723.

1965

Математические проблемы расчета и анализа оптимальных динамических моделей: Препр. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1965. — 15 с.

The Best Use of Economic Resources. — Oxford etc.: Pergamon Press, 1965. — VII–XVI, 349 p.

Сякай сюги кэйдзай то сигэн хайбун. — Токио: Собунся, 1965. — 390 p.

Оптимальные модели перспективного планирования // Применение математики в экономических исследованиях. — М., 1965. — Т. 3. — С. 7–87. — Соавт.: Макаров В. Л.

[Ответы на вопросы издательства «Экономика»] // Экономическая наука и хозяйственная практика: Экон. ежегодник. — М., 1965. — С. 150–151.

[Выступления на совещании в Агентстве печати «Новости», март 1964 г.] // Экономисты и математики за «Круглым столом». — М., 1965. — С. 79–86, 161–163.

Математические проблемы оптимального планирования // Colloquium on Applications of Mathematics to Economics, Budapest, 1963. — Budapest, 1965. — P. 171–179.

Амортизационные платежи при оптимальном использовании оборудования // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 162, № 5. — С. 1015–1018. — Соавт.: Романовский И. В.

Памяти В. С. Немчинова // Вестн. АН СССР. — 1965. — № 1. — С. 122–123. — Совм. с др.

На основе математических методов // Экономика строва. — 1965. — № 3. — С. 12–16.

Mathematics and economics // Problems of Economic Transition. — 1965. — Vol. 8, No. 5. — P. 12–15.

Un modello dinamico di pianificazione ottimale // Statistica. — 1965. — Ann. 25, No. 3. — P. 337–358.

Математика и экономика // Правда. — 1965. — 24 авг.

Принцип оптимальности [в плановом ценообразовании] // Экон. газ. — 1965. — № 45. — С. 9.

Ред.: Булавский В. А., Рубинштейн Г. Ш. Несколько лекций по линейному программированию / Отв. ред. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1965. — 68 с.

А. с. 172567. Вычислительная система, состоящая из универсальной цифровой вычислительной машины и малой вычислительной машины. — Заявл. 2.11.63, № 867237/26–24; Оpubл. 29.06.65. — Соавт.: Фет Я. И.

1966

Calculul Economic al Folosirii Optime a Resurselor. — București: Ed. Științifică, 1966. — 407 p.

Математические методы оптимальной загрузки прокатных станов: (тез. докл.). — Новосибирск: Наука, 1966. — 13 с.

Математические оптимальные модели в планировании развития отрасли и в технической политике // Доклады на Всесоюзной конференции по применению экономико-математических методов и ЭВМ в отраслевом планировании и управлении. — Новосибирск, 1966. — С. 3–19.

Математические проблемы оптимального планирования // Математические модели и методы оптимального планирования. — Новосибирск, 1966. — С. 116–124.

Амортизационные отчисления и оценка эффективности новой техники в системе оптимального планирования // Математико-экономические проблемы: Тр. межвуз. науч. конф. «Применение математики и электрон.-вычисл. техники в экономике» (январь 1964 г.) — Л., 1966. — С. 3–11. — (Тр. Ленингр. инж.-экон. ин-та им. Пальмиро Тольятти; Вып. 58).

То же на англ. яз.: Depreciation charges and estimation of the effectiveness of new technology in a system of optimal

planning // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 168–182.

Модель оптимальной замены оборудования в условиях стационарной неравномерной нагрузки // Тезисы кр. науч. сообщений; [Междунар. мат. конгр.]. Секция 13. Мат. пробл. управляющих систем. — М., 1966. — С. 21.

[Применение математических методов в экономике: Беседа] // Один раз в жизни: О лауреатах Ленинских премий 1965 года. — М., 1966. — С. 61–62.

Структура амортизационных отчислений при стационарной нагрузке машинного парка // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 166, № 2. — С. 309–312. — Соавт.: Романовский И. В.

[Выступление на общем собрании АН СССР в прениях по докладам о ценообразовании, 14 дек. 1965 г.] // Вестн. АН СССР. — 1966. — № 2. — С. 82–86.

Развитие математических методов экономического анализа // Вестн. АН СССР. — 1966. — № 10. — С. 9–14.

Арон Григорьевич Пинскер (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1966. — Т. 21, вып. 6. — С. 169–170. — Соавт.: Владимиров Д. А., Вулих Б. З.

То же на англ. яз.: Aron Grigor'evich Pinsker (on his sixtieth birthday) // Russian Math. Surveys. — 1966. — Vol. 21, No. 6. — P. 165–166. — With Vladimirov D. A. and Vulikh B. Z.

Андрей Васильевич Бицадзе (к 50-летию со дня рождения) // Сиб. мат. журн. — 1966. — Т. 7, № 4. — С. 729–730.

О математической подготовке экономистов и инженеров-экономистов // Вестн. высш. шк. — 1966. — № 3. — С. 22–27. — Соавт.: Пинскер А. Г.

Математические методы в решении хозяйственных задач // Коммунист. — 1966. — № 10. — С. 64–73.

[О развитии и современных задачах экономико-математических методов: Беседа] // Сов. Союз. — 1966. — № 4. — С. 36. — (Сибирь на электрон. машине).

Ред.: Математические модели и методы оптимального планирования / Отв. ред. — Новосибирск: Наука, 1966. — 178 с.

Ред.: Математическое программирование / Отв. ред. — М.: Наука, 1966. — 135 с.

Ред.: Оптимальное планирование: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. Вып. 6. Программы / Отв. ред. — Новосибирск: Наука, 1966. — 189 с.

А. с. 188151. Сумматор для одновременного сложения нескольких двоичных слагаемых. — Заявл. 15.03.65, № 948838/26–24; Оpubл. 20.10.66. — Соавт.: Фет Я. И., Иловайский И. В.

1967

Функциональный анализ в нормированных пространствах. — В 2-х т. — Токио: Б.и., 1967. — 488 с. — Соавт.: Акилов Г. П.

Динамическая модель оптимального планирования // Оптимальное планирование: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1967. — Вып. 8: Оптимальные динамические модели народно-хозяйственного планирования. — С. 3–22.

То же на англ. яз.: A dynamic model of optimum planning // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 24–50.

Вопросы разработки и использования крупноагрегированной модели оптимального перспективного планирования // Оптимальное планирование: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1967. — Вып. 8: Оптимальные динамические модели народно-хозяйственного планирования. — С. 23–35. — Соавт.: Макаров В. Л.

Об исчислении нормы эффективности на базе однопродуктовой модели развития хозяйства // Оптимальное планирование: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1967. — Вып. 8: Оптимальные динамические модели народно-хозяйственного планирования. — С. 37–51.

Математические методы в решении хозяйственных задач // Теория и практика хозяйственной реформы. — М., 1967. — С. 159–173.

Математика в экономике // Наука и человечество: Междунар. ежегодник, 1967. — М., 1967. — С. 347–361. — Соавт.: Горстко А. Б.

Однопродуктовая динамическая модель при наличии мгновенной превращаемости фондов // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 174, № 3. — С. 522–525. — Соавт.: Глобенко И. Г.

То же на англ. яз.: A single-product dynamical model with instantaneous convertibility of funds // Soviet Math. Dokl. — 1967. — Vol. 8. — P. 622–666. — With Globenko I. G.

Динамическая модель экономики // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 176, № 5. — С. 997–998. — Соавт.: Глобенко И. Г.

То же на англ. яз.: A dynamic model of the economy // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 64–67. — With Globenko I. G.

[Выступление на годовичном собрании АН СССР. 6–7 февр. 1967 г.] // Вестн. АН СССР. — 1967. — № 3. — С. 202–203.

[Математические оптимальные модели в планировании развития отрасли и в технической политике: Докл. на 1 Всесоюз. конф. по применению экон.-мат. методов и ЭВМ в отраслевом планир. и упр., 21–24 дек. 1966 г.: Крат. излож.] // Вестн. АН СССР. — 1967. — № 5. — С. 110.

Математические оптимальные модели в планировании развития отрасли и в технической политике // Вопр. экономики. — 1967. — № 10. — С. 102–115.

То же на англ. яз.: Optimal mathematical models in planning the development of a branch and in technical policy // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 142–167.

Экстремальные состояния и экстремальные управления // Вестн. ЛГУ. — 1967. — № 7. Математика. Механика. Астрономия. Вып. 2. — С. 30–37. — Соавт.: Акилов Г. П., Рубинштейн Г. Ш.

То же на англ. яз.: Extremal states and extremal controls // SIAM J. Control. — 1967. — Vol. 5, No. 4. — P. 600–608. — With Akilov G. P. and Rubinshtein G. Sh.

Об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития хозяйства // Экономика и мат. методы. — 1967. — Т. 3, вып. 5. — С. 697–710. — Соавт.: Вайнштейн А. Л.

То же на англ. яз.: On the calculation of the norm of effectiveness on the basis of a one-product model of the development of the economy // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 68–90. — With Vainshtein A. L.

[Выступление на сессии «Методологические проблемы долгосрочного экономического прогнозирования» Научного совета АН СССР по комплексной проблеме «Совершенствование методов и показателей народно-хозяйственного планирования», НИЭИ при Госплане СССР и журнала «Плановое хозяйство», дек. 1966 г.] // План. хоз-во. — 1967. — № 2. — С. 75.

Сфера обслуживания и наука // Правда. — 1967. — 20 марта.

1968

Математическое оптимальное программирование в экономике. — М.: Знание, 1968. — 96 с. — (Новое в жизни, науке, технике. Сер. математика, кибернетика; № 8–9). — Соавт.: Горстко А. Б.

La Asignación Óptima de los Recursos Económicos. — Barcelona: Ed. Ariel, 1968. — VII–XXII, 308 p.

Пути применения математических методов в сельскохозяйственном производстве // Оптимальные модели орошения: Материалы совещ., Новосибирск, март 1967 г. — М., 1968. — С. 5–22.

Перспективы работы в области автоматизации программирования на базе крупноблочной системы // Автоматическое программирование, численные методы и функциональный анализ. — Л., 1968. — С. 5–15. — (Тр. Мат. ин-та; Т. 96).

То же на англ. яз.: Trends of development in automatic programming based on large-block systems // Proc. Steklov Inst. Math. — 1968. — Vol. 96. — P. 1–15.

Об использовании математических моделей в ценообразовании на новую технику // Совершенствование ценообразования и научно-технический прогресс. — М., 1968. — С. 46–50.

О путях дальнейшего совершенствования ценообразования // Итоги реформы цен и перспективы ценообразования: Тр. Объед. сес. науч. советов, 25–29 янв. 1968 г. — М., 1968. — С. 35–39.

Социология и экономика // Количественные методы в социальных исследованиях: Материалы совещ., Сухуми, 17–20 апр. 1967 г. — М., 1968. — С. 45–55. — (Информ. бюл. № 8. Сер. Материалы и сообщ.).

Optimal mathematical models in planning the development of a branch and in technical policy // Problems of Economic Transition. — 1968. — Vol. 11, No. 3. — P. 142–167.

Сергей Львович Соболев (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1968. — Т. 23, вып. 5. — С. 177–186. — Соавт.: Бицадзе А. В., Лаврентьев М. А.

То же на англ. яз.: Sergei L'vovich Sobolev (on his sixtieth birthday) // Russian Math. Surveys. — 1968. — Vol. 23, No. 5, — P. 131–140. — With Bitsadze A. V. and Lavrent'ev M. A.

Используя способности каждого: [О рацион. использ. рабочей силы] // Труд. — 1968. — 12 мая.

Ред.: Оптимальные модели орошения: Материалы совещ., Новосибирск, март 1967 г. / Науч. ред. Л. В. Канторович, П. Я. Полубаринова-Кочина, Л. В. Дудин-Барковский. — М.: Ин-т математики СО АН СССР, 1968. — 270 с.

А.с. 209032. СССР. Арифметическое устройство цифровой вычислительной машины. — № 1006197/26–24; Заявл. 10.05.65; Опубл. 17.01.68. — Соавт.: Фет Я. И., Иловайский И. В.

1969

Optimálne Využitie Zdrojov. — Bratislava: Vyd-vo SAV, 1969. — 302 s.

Некоторые теоретические вопросы построения системы пассажирских тарифов // Система пассажирских тарифов на транспорте СССР и пути ее совершенствования: Материалы науч.-техн. конф. (19–20 дек. 1966 г.). — М., 1969. — С. 113–117.

Опыт оптимальной загрузки прокатных и трубных станов заказами на металлопродукцию и связанные с ним выводы об организации оптовой торговли средствами производства // 6 Международный симпозиум по материально-техническому снабжению, Тбилиси, сент.-окт. 1969 г. — М., 1969. — С. 3–10.

Краткий очерк научной, научно-организационной, педагогической и общественной деятельности академика С. Л. Соболева // Шапарнева М. А. Сергей Львович Соболев: К 60-летию со дня рождения. — Новосибирск, 1969.—С. 3–8.—Соавт.: Лаврентьев М. А., Бицадзе А. В.

Mathematical economics and optimal planning // Contemporary Soviet Economics: A Collection of Readings from Soviet Sources. — New York, 1969. — Vol. 1. — P. 40–53.

О возможности повышения производительности универсальных ЦВМ при решении экономико-математических задач // Экономика и мат. методы. — 1969. — Т. 5, вып. 2. — С. 276–279. — Соавт.: Фет Я. И.

[Выступление на пленарном заседании Всесоюзного совещания актива организаций Госнаба СССР, 30 июня–1 июля 1969] // Матер.-техн. снабжение. — 1969. — № 10. — С. 68–71.

Цена времени // Коммунист. — 1969. — № 10. — С. 82–94. — Соавт.: Богачев В.

То же на англ. яз.: The price of time // Problems of Economic Transition. — 1970. — Vol. 12, No. 10. — P. 3–27. — With Bogachev V.

Математика нужна всем // Правда. — 1969. — 14 июля. — (Пробл. и суждения).

Динамический подход и третья компонента // За науку в Сибири. — 1969. — 30 июля. — С. 2.

Математические методы — в народное хозяйство: [Беседа] // Сов. Молдавия. — 1969. — 31 июля.

1970

Математико-экономический анализ плановых решений // Материалы к заседанию секции оптимального планирования и управления сельским хозяйством Научного совета АН СССР и секции экономико-математического моделирования Ученого совета ВНИИ кибернетики МСХ СССР, 9–14 февр. 1970 г. — Новосибирск, 1970. — С. 3–31. — Соавт.: Вирченко М. И.

Модели роста управляемой экономики // Доклады, представленные на симпозиум по моделированию народного хозяйства, Новосибирск, 1970. — Новосибирск, 1970. — С. 3–29.

O výpočte normy efekt'ivnosti na základe jednodukčého modelu rozvoja hospodárstva // Investície, Rovnováha, Optimálny Rast: Zborník Stat'i Svetových Ekonómov. — Bratislava, 1970. — S. 297–315. — With Vaňstein A. L.

Глеб Павлович Акилов (к пятидесятилетию со дня рождения) // Оптимальное планирование: Сб. тр. — Новосибирск, 1970. — Вып. 17. — С. 7–9. — Соавт.: Вершик А. М., Владимиров Д. А., Вулих Б. З., Макаров Б. М., Рубинов А. М., Рубинштейн Г. Ш., Судачков В. Н., Хавин В. П.

Оптимальное чередование основного и модифицированного процессов Ньютона — Канторовича // Оптимальное планирование: Сб. тр. — Новосибирск, 1970. — Вып. 17. — С. 10–28.

Статистическая модель сейсмичности и оценка основных сейсмических эффектов // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1970. — № 5. — С. 85–102. — Соавт.: Молчан Г. М., Кейлис-Борок В. И., Вилькович Е. В.

То же на англ. яз.: A statistical model of seismicity and an estimate of the basic seismic effects // Izv. Acad. Sci. USSR Phys. Solid Earth. — 1970. — P. 320–328. — With Molchan G. M., Keylis-Borok V. I., and Vil'kovich E. V.

Еще об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития народного хозяйства // Экономика и мат. методы. — 1970. — Т. 6, вып. 3. — С. 407–415. — Соавт.: Вайнштейн А. Л.

То же на англ. яз.: Once again on calculating the norm of effectiveness on the basis of a one-product national economic development model // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 91–107. — With Vainshtein A. L.

Об оценке эффективности капитальных затрат // Экономика и мат. методы. — 1970. — Т. 6, вып. 6. — С. 811–826. — Соавт.: Богачев В. Н., Макаров В. Л.

То же на англ. яз.: Estimating the effectiveness of capital expenditures // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 108–134. — With Bogachev V. N. and Makarov V. L.

Методы оптимизации и математические модели экономики // Успехи мат. наук. — 1970. — Т. 25, вып. 5. — С. 107–109.

То же на англ. яз.: Methods of optimization and mathematical models in economics // Russian Math. Surveys. — 1970. — Vol. 25, No. 5. — P. 105–107.

Дифференциальные и функциональные уравнения, возникающие в моделях экономической динамики // Сиб. мат. журн. — 1970. — Т. 11, № 5. — С. 1046–1059. — Соавт.: Макаров В. Л.

То же на англ. яз.: Differential and functional equations arising in dynamic models of economy // Siberian Math. J. — 1970. — Vol. 11, No 5. — P. 777–786. — With Makarov V. L.

The price of time // Problems of Economic Transition. — 1970. — Vol. 12, No. 10. — P. 3–27. — With Bogachev V.

Der Preis der Zeit // Sowjetwissenschaft. Gesellw. Beitr. — 1970. — Н. 1. — S. 81–95. — With Bogachev V.

Вопросы оптимального планирования // Пром-сть Армении. — 1970. — № 5. — С. 49–50.

Опыт оптимальной загрузки прокатных и трубных станов // Матер.-техн. снабжение. — 1970. — № 4. — С. 87–91.

Современные проблемы математической экономики // За науку в Сибири. — 1970. — 11 марта. — С. 4–7. — Соавт.: Макаров В. Л., Рубинштейн Г. Ш.

Город в зоне землетрясения: Экономика сейсмостойкого строительства // Правда. — 1970. — 28 июля. — Совм. с др.

1971

Рациональный раскрой промышленных материалов. — 2-е изд., испр. и доп. — Новосибирск: Наука, 1971. — 299 с. — Соавт.: Залгаллер В. А.

Статистические вопросы оценки поверхностных эффектов, связанных с сейсмичностью // Алгоритмы интерпретации сейсмических данных. — М., 1971. — С. 80–128. — (Вычисл. сейсмология; Вып. 5). — Соавт.: Молчан Г. М., Вилькович Е. В., Кейлис-Борок В. И.

Математико-экономический анализ плановых решений и экономические условия их реализации // Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве. — Новосибирск, 1971.—Ч. 1.—С. 5–40.—Соавт.: Вирченко М. И.

Значение электронно-вычислительной техники в деле совершенствования ценообразования // Применение экономико-математических методов и ЭВМ в ценообразовании и планировании цен в СССР: (Материалы к Междунар. науч. конф.). — М., 1971. — С. 43–67.

Линейное программирование // Математика и кибернетика в экономике: Слов.-справ. — М., 1971. — С. 44–49. — Соавт.: Романовский И. В.

Математическое программирование // Математика и кибернетика в экономике: Слов.-справ. — М., 1971. — С. 64–67. — Соавт.: Романовский И. В.

Симплексный метод // Математика и кибернетика в экономике: Слов.-справ. — М., 1971. — С. 152–155. — Соавт.: Горстко А. Б.

Управляющие параметры в экономической системе // 5 Всесоюзное совещание по проблемам управления, Москва, 1971 г.: Реф. докл. — М., 1971. — Ч. 1. — С. 195–198. — Соавт.: Макаров В. Л.

О математической подготовке экономистов и инженеров-экономистов // Сб. науч.-метод. ст. по математике: Пробл. преподавания математики в вузах. — 1971. — Вып. 1. — С. 27–32. — Соавт.: Пинскер А. Г.

О ценах, тарифах и эффективности экономики // Экономика и орг. пром. пр-ва (ЭКО). — 1971. — № 1. — С. 23–30.

То же на англ. яз.: Concerning prices, rates, and economic effectiveness // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 212–221.

Ред.: Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве. Ч. 1 / Науч. ред. Л. В. Канторович, В. П. Можин. — Новосибирск: Изд-во АН СССР, 1971. — 182 с.

От редакторов // Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве. Ч. 1 / Науч. ред. Л. В. Канторович, В. П. Можин. — Новосибирск: Изд-во АН СССР, 1971. — С. 3–4. — Соавт.: Можин В. П.

1972

Оптимальные решения в экономике. — М.: Наука, 1972. — 231 с. — Соавт.: Горстко А. Б.

Croirea Economică a Materialelor in Industrie. — București: Ed. Tehnică, 1972. — 248 p. — With Zalgaller V. A.

Пути развития вычислительных средств для решения больших задач оптимального планирования и управления // Оптимизация: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1972. — Вып. 6. — С. 5–7.

То же на англ. яз.: Ways to develop computing means for solving large optimal planning and control problems // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 222–225.

Évaluation de l'efficacité d'investissements de capitaux // Économie Mathématique en URSS. — Paris, 1972. — С. 69–99. — (Cah. de l'ISEA. Sér. G N 30. Écon. et Soc.; T. 6, No. 1) — With Bogachev V. N. and Makarov V. L.

Control parameters in an economic system // Proceedings of the IFAC 5th World Congress, Paris, June 12–17, 1972. Pt 3. Ecology and Systems Engineering: Large Scale: Sensitivity Optimization and Adaptation Theory. — Pittsburgh, 1972. — Paper 28.4. — P. 1–5. — With Makarov V. L.

Современный математический аппарат управления экономикой // Вестн. АН СССР. — 1972. — № 10. — С. 70–79. — Соавт.: Гольштейн Е. Г., Макаров В. Л., Романовский И. В.

То же на англ. яз.: A modern mathematical system of economic management // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 226–242. — With Gol'shtein E. G., Makarov V. L., and Romanovskii I. V.

О математическом обеспечении АСУ «Металл» // Приборы и системы упр. — 1972. — № 12. — С. 8–10.

Возраст открытий: Какой он — молодой ученый? // Смена. — 1972. — № 16. — С. 15. — (Анкета журн. «Смена»).

Предисловие к русскому изданию // Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост: Многоотраслевой анализ: Пер. с англ. — М.: 1972. — С. 5–7.

Ред.: Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве. Ч. 2. Экономическая оптимизация в орошении / Науч. ред. — Новосибирск: Изд-во АН СССР, 1972. — 205 с.

Пат. 92143. ГДР: Rechenwerk. — Заявл. 20.10.71; Опубл. 25.08.72. — With Tolstjev V. P. and Fet Y. I.

1973

Сейсмический риск и принципы сейсмического районирования // Вычислительные и статистические методы

интерпретации сейсмических данных. — М., 1973. — С. 3–20. — (Вычислит. сейсмология; Вып. 6). — Соавт.: Кейлис-Борок В. И., Молчан Г. М.

Рубинштейн Геннадий Соломонович (Шлёмович): К 50-летию со дня рождения // Оптимизация: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1973. — Вып. 9. — С. 5–8.

Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 211, № 6. — С. 1280–1283. — Соавт.: Жиянов В. И.

То же на англ. яз.: A one-product dynamic model of the economy taking into account the change in the structure of capital under technological progress // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 135–141. — With Zhiianov V. I.

[Модели роста и их применение в долгосрочном планировании: Докл. на конф., посвящ. долгосроч. планир. и прогнозированию, провед. Междунар. экон. ассоц., Москва, 11–16 дек. 1972 г.: Крат. излож.] // Вестн. АН СССР. — 1973. — № 4. — С. 68. — Соавт.: Макаров В. Л.

Плодотворность взаимопроникновения естественных и общественных наук // Вопр. философии. — 1973. — № 10. — С. 39–41.

Ученый, педагог, практик (к 50-летию со дня рождения Г. С. Рубинштейна) // За науку в Сибири. — 1973. — 16 мая. — С. 3. — Совм. с др.

А. с. 409222. Устройство для умножения. — Заявл. 09.02.71, № 1624119 / 18–24; Оpubл. 30.11.73. — Соавт.: Толстьев В. П., Фет Я. И.

Пат. 1357598. Великобритания: Digital arithmetic units. — Заявл. 9.11.71, 52017 / 71. Heading 04 A; Оpubл. в 1973 г. — With Tolstjev V. P. and Fet Y. I.

Пат. 3758767. США: Digital serial arithmetic unit. — Заявл. 19.10.71. Ser. No. 190, 610; Оpubл. 11.09.73. — With Tolstjev V. P. and Fet Y. I.

1974

Значение электронно-вычислительной техники для совершенствования ценообразования // Математические методы и ЭВМ в ценообразовании и планировании цен: (Материалы Междунар. науч. конф., Москва, сент. 1971 г.). — М., 1974. — С. 127–136.

Комплексный подход к реализации массовых вычислений // Оптимизация: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР] — Новосибирск, 1974. — Вып. 13. — С. 5–11. — Соавт.: Петрова Л. Т., Фет Я. И.

Перспективы крупноблочного подхода в прикладной математике, программировании и вычислительной технике // Численные методы и автоматическое программирование. — Л., 1974. — С. 5–11. — (Зап. науч. семинаров ЛОМИ; Т. 48).

Об одном подходе к расчету цен и рентных оценок земли в условиях сложившегося размещения сельского хозяйства // Тезисы докладов Всесоюзного научно-технического совещания «Автоматизированная система управления в сельском хозяйстве», Минск, 1–3 апр. 1975 г. Секция 1: Подсистема планирования и оперативного управления в АСУ-сельхоз. — М., 1974. — С. 21–27.

Экономические проблемы научно-технического прогресса // Экономика и мат. методы. — 1974. — Т. 10, вып. 3. — С. 432–448.

То же на англ. яз.: Economic problems of scientific-technical progress // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 183–211.

Роль транспортного фактора при размещении производства // Вопр. экономики. — 1974. — № 3. — С. 79–90. — Соавт.: Журавель А.

То же на англ. яз.: The role of the transport factor in the location of production // Problems of Economic Transition. — 1974. — Vol. 17, No. 7. — С. 3–24. — With Zhuravel' A.

Владимир Иванович Соболев (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1974. — Т. 29, вып. 1. — С. 247–250. — Соавт.: Ефимов Н. В., Иохвидов И. С., Красносельский М. А., Крейн С. Г., Люстерник Л. А.

То же на англ. яз.: Vladimir Ivanovich Sobolev (on his sixtieth birthday) // Russian Math. Surveys. — 1974. — Vol. 29, No. 1. — P. 157–160. — With Efimov N. V., Iokhvidov I. S., Krasnosel'skiĭ M. A., Krein S. G., and Lyusternik L. A.

Оптимальное планирование: Нерешенные задачи // Экономика и орг. пром. пр-ва (ЭКО). — 1974. — № 5. — С. 3–9.

Функции воспитания научного мышления курса математики во втузе: (Прения по докл. А. Д. Мышкиса и Б. О. Солоноуца «О программе и стиле преподавания математики во втузах») // Сб. науч.-метод. ст. по математике: Пробл. преподавания математики в вузах. — 1974. — Вып. 4. — С. 11–13.

Рец.: Новое исследование по теоретическим основам оптимального планирования: [Волконский В. А. Принципы оптимального планирования. М. 1973. 239 с.] // Изв. АН СССР. Сер. экон. — 1974. — № 6. — С. 120–124. — Соавт.: Гурвич Ф. Г.

Рец.: Лурье А. Л. Экономический анализ моделей планирования социалистического хозяйства. М., 1973. 435 с.

// Экономика и мат. методы. — 1974. — Т. 10, вып. 4.
— С. 833–836. — Соавт.: Богачев В. Н.

Достижения экономической науки — в практику // Экон.
газ. — 1974. — № 26. — С. 14.

То же на англ. яз.: Putting the achievements of economic
science into practice // Problems of Economic Transition.
— 1975. — Vol. 18, No. 6. — P. 3–9.

А. с. 427390. Электромеханическое запоминающее уст-
ройство. — Заявл. 19.03.71. № 1635542/18–24; Опубл.
5.05.74. — Соавт.: Куликов Б. И., Фет Я. И.

1975

Модели роста и их применение в долгосрочном планиро-
вании и прогнозировании: [Докл. и дискус.] // Долго-
срочное планирование и прогнозирование: Материалы
конф. Междунар. экон. ассоц., Москва, дек. 1972 г.
— М., 1975. — С. 164–181, 414–415. — Соавт.: Мака-
ров В. Л.

[Выступления по докладам Н. П. Федоренко, И. Хэте-
ни, А. Г. Аганбегяна, Э. Мэнсфилда и Х. Ожака] //
Долгосрочное планирование и прогнозирование: Мате-
риалы конф. Междунар. экон. ассоц., Москва, дек.
1972 г. — М., 1975. — С. 360–361, 420–421, 483–484,
512–514.

Математические методы в экономике // Будущее науки.
Перспективы, гипотезы, нерешенные проблемы: Меж-
дунар. ежегодник. — М., 1975. — Вып. 8. — С. 224–234.
— Соавт.: Романовский И. В.

Динамические модели научно-технического прогресса//
Труды Международной конференции «Моделирование
экономических процессов», Ереван, апр. 1974 г. — М.,
1975. — С. 7–15. — Соавт.: Жиянов В. И.

Динамические модели научно-технического прогресса // Труды Шестой зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. — М., 1975. — С. 64–84.

[Выступление на Всесоюзной научной конференции «Итоги экономических экспериментов в отраслях народного хозяйства и перспективы дальнейшего совершенствования экономического механизма хозяйственной реформы», дек. 1974 г.: Крат. излож.] // Изв. АН СССР. Сер. экон. — 1975. — № 6. — С. 161–162.

Dynamic models of technological changes // Optimization Techniques: IFIP Techn. Conf., Novosibirsk, July 1–7, 1974. — Berlin etc., 1975. — P. 42–47. — (Lecture Notes in Computer Sci.; 27). — With Zhiyanov V. I.

Putting the achievements of economic science into practice // Problems of Economic Transition. — 1975. — Vol. 18, No. 6. — P. 3–9.

Математические методы — экономике: [К присуждению Л. В. Канторовичу и Т. Купмансу Нобелевской премии по экономике 1975 г. [Беседа] // Лит. газ. — 1975. — 22 окт. — С. 13.

Ред.: Математика и кибернетика в экономике: Слов.-справ. — 2-е изд., перераб. и доп. / Под ред. Федоренко Н. П., Канторовича Л. В., Данилова-Данильяна В. И. — М.: Экономика, 1975. — 700 с.

Предисловие [редколлегии] // Математика и кибернетика в экономике: Слов.-справ. — 2-е изд., перераб. и доп. / Чл. редкол. — М.: Экономика, 1975. — С. 3–4.

1976

Essays in Optimal Planning / Selected Works with an Introduction by L. Smolinski. — New York: International Arts and Sciences Press, 1976. — 251 p.

Optymalne Decyzje Ekonomiczne. — Warszawa: Państw. Wyd-wo Ekon., 1976. — 292 s. — With Gorstko A.

Problems of Application of Optimization Methods in Industry. — Stockholm: Tryckeriaktiebolaget Svea, 1976. — 35 p. — (Seminar at the Federation of Swedish Industries in Stockholm on December 15, 1975). — With Koopmans T. C.

Математика в экономике: достижения, трудности, перспективы: Лекция в Шведской королевской академии наук в связи с присуждением Нобелевской премии за 1975 год // Экономика и орг. пром. пр-ва (ЭКО). — 1976. — № 3. — С. 124–134.

Математические методы в управлении экономикой // Наука и человечество: Междунар. ежегодник, 1977. — М., 1976. — С. 279–287. — Соавт.: Романовский И. В.

К работе «Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений» // Чаплыгин С. А. Избранные труды: Механика жидкости и газа: Математика: Общая механика. — М., 1976. — С. 446–449.

К проблеме оптимизации взаимоотношения общества и природы // Взаимосвязь наук при решении экологических проблем: (Тез. к теорет. конф.). — Москва; Обнинск, 1976. — С. 27–29.

[Autobiography] // Les Prix Nobel en 1975. — Stockholm, 1976. — P. 261–264.

Concerning prices, rates, and economic effectiveness // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 212–221.

Depreciation charges and estimation of the effectiveness of new technology in a system of optimal planning // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 168–182.

A dynamic model of optimum planning // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 24–50.

A dynamic model of the economy // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 64–67. — With Globenko I. G.

Dynamic models of scientific-technical progress // Progress in Operations Research. — Amsterdam; London, 1976. — Vol. 2. — P. 537–546. — (Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai; **12**).

Economic problems of scientific and technical progress // Scand. J. Econ. — 1976. — Vol. 78, No. 1. — P. 521–541.

Economic problems of scientific and technical progress // Soc. Sci. — 1976. — Vol. 7, No. 3. — P. 82–101.

Economic problems of scientific-technical progress // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 183–211.

Estimating the effectiveness of capital expenditures // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 108–134. — With Bogachev V. N. and Makarov V. L.

Growth models and their application to long-term planning and forecasting // Methods of Long-Term Planning and Forecasting: Proc. of Conf. Held by the Int. Econ. Ass. at Moscow. — East Kilbride (Scotland), 1976. — P. 51–66. — With Makarov V. L.

Let us apply the achievements of economic science // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 9–15.

Mathematical methods in economics // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. ix–xxxii.

Mathematical methods in economics // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 3–8.

Mathematics in economics: Achievements, difficulties, perspectives: Nobel Memorial lecture, Dec. 11, 1975 // Les Prix Nobel en 1975. — Stockholm, 1976. — P. 265–272.

Mathematics in economics: Achievements, difficulties, perspectives: Nobel Memorial Lecture, Dec. 11, 1975 // Math. Programming. — 1976. — Vol. 11, No. 1. — P. 204–211.

A modern mathematical system of economic management // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 226–242. — With Gol'shtein E. G., Makarov V. L., and Romanovskii I. V.

On the calculation of the norm of effectiveness on the basis of a one-product model of the development of the economy // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 68–90. — With Vainshtein A. L.

Once again on calculating the norm of effectiveness on the basis of a one-product national economic development model // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 91–107. — With Vainshtein A. L.

A one-product dynamic model of the economy taking into account the change in the structure of capital under technological progress // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 135–141. — With Zhiianov V. I.

A one-product dynamic model with instantaneous transformation of capital // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 57–63. — With Globenko I. G.

Optimal mathematical models in planning the development of a branch and in technical policy // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 142–167.

Оптимально планиране: нерешени задачи // Социально управление. — 1976. — № 3. — С. 15–21.

Optimal planning: unresolved problems // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 16–23.

Optimal utilization of rolling and pipe mills // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 243–251.

Some functional relations which arise in analysis of a one-product economic model // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 51–56. — With Gor'kov L. I.

Theoretical aspects of policy studies//USA: Conference'76, May 10–13, 1976. — Laxenburg (Austria), 1976. — P. 233–236.

Ways to develop computing means for solving large optimal planning and control problems // Problems of Economic Transition. — 1976. — Vol. 19, No. 4. — P. 222–225.

[Выступление на сессии Междуведомственного научного совета по проблемам ценообразования, Москва, февр. 1975 г.: Крат. излож.] // Изв. АН СССР. Сер. экон. — 1976. — № 1. — С. 145–146.

[Доклад на Научном совете АН СССР по комплексной проблеме «Единая транспортная система СССР»: Крат. излож. // Вестн. АН СССР. — 1976. — № 10. — С. 124–125.

И все же — хозрасчетная фирма изобретений: [Беседа] // Изобретатель и рационализатор. — 1976. — № 10. — С. 14.

Математические методы в экономике // Zinätne un Tehnika. — 1976. — № 5. — С. 12–16. — Соавт.: Романовский И. В.

Алгебра экономики: [Беседа] // Неделя. — 1976. — 1–7 марта. — С. 10–11.

Время точных решений: [Беседа] // Комс. правда. — 1976. — 17 марта.

Ред.: Фет Я. И. Массовая обработка информации в специализированных однородных процессорах / Отв. ред. — Новосибирск: Наука, 1976. — 199 с.

1977

Функциональный анализ. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1977. — 742 с. — Соавт.: Акилов Г. П.

То же на англ. яз.: Functional Analysis. — 2nd ed. — Oxford and New York: Pergamon Press, 1982. — 589 p. — With Akilov G. P.

Essays in Optimal Planning. — Oxford: Blackwell, 1977. — XXXII, 251 p.

Optimálne Rozhodnutie v Ekonomike. — Bratislava: Pravda, 1977. — 240 s. — With Gorstko A. V.

Рациональное использование ресурсов и ценообразование // Теоретические проблемы ценообразования в условиях развитого социализма. — М., 1977. — С. 46–58.

Разработка математического аппарата для задач экономики // Фундаментальные исследования: (Физико-математические науки). — Новосибирск, 1977. — С. 12–16. — Совм. с др.

Развитие математической экономики в Сибирском отделении Академии наук СССР // Изв. СО АН СССР. — 1977. — № 6. Сер. обществ. наук, вып. 2. — С. 14–25. — Соавт.: Макаров В. Л.

Математика и экономика — взаимопроникновение наук // Вестн. ЛГУ. — 1977. — № 13. Математика. Механика. Астрономия, вып. 3. — С. 31–38. — Соавт.: Гавурин М. К.

Оптимизационные методы в экономике: результаты, трудности, перспективы // Кибернетика. — 1977. — № 2. — С. 68–72. — Соавт.: Романовский И. В.

Математика в экономике: достижения, трудности, перспективы // Обществ. науки.—1977.—№ 2.—С. 101–110.

Значение себестоимости в механизме хозяйствования // Вопр. ценообразования. — 1977. — Вып. 3. — С. 21–24.

Научно-технический прогресс и экономическая наука // Полит. самообразование. — 1977. — № 6. — С. 110–119.

[Plenarvortrag auf der VII: Internationale Tagung über Ergebnisse der ökonomischen Informationsverarbeitung] // MSR. — 1977. — No. 5. — S. 283.

Complexe vraagstukken // Impact. — 1977. — No. 108. — P. 39–40.

Экономика и транспорт: [Беседа] // Гудок. — 1977. — 2 апр.

Ред.: Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. А. Численные методы линейного программирования: (Специальные задачи). — М.: Наука, 1977. — 367 с.

1978

Об улучшении использования изобретений в народном хозяйстве // Управление и новая техника: (Исследования, разработки, внедрение). — М., 1978. — С. 15–24.

Планирование исследований, разработок и внедрения новой техники // Управление и новая техника: (Исследования, разработки, внедрение). — М., 1978. — С. 36–109.

Анализ динамики экономических показателей на основе однопродуктовых динамических моделей // Моделирование и анализ эффективности научно-технического прогресса. — М., 1978. — С. 5–25. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 9). — Соавт.: Жиянов В. И., Хованский А. Г.

Укрупненный расчет вклада науки и техники в национальный доход СССР // Моделирование и анализ эффективности научно-технического прогресса. — М., 1978. — С. 56–64. — Соавт.: Кругликов А. Г.

О совершенствовании методики оценки народно-хозяйственной эффективности новой техники // Моделирование и анализ эффективности научно-технического прогресса. — М., 1978. — С. 87–92. — Соавт.: Кругликов А. Г.

[Выступление на заседании Научного совета по проблеме экономической эффективности основных фондов, капитальных вложений и новой техники АН СССР (май 1977 г.) // Методы и практика определения эффективности капитальных вложений и новой техники: Сб. науч. информ. — М., 1978. — Вып. 29. — С. 39–42.

[Выступление по докладу К. Мотидзуки «Цена стоимости и система разрешающих множителей Л. В. Канторовича» // Материалы 11 Советско-японского симпозиума ученых-экономистов, Москва, 28 нояб. — 1 дек. 1977 г.: (Сокр. стеногр.). — М., 1978. — Ч. 2. — С. 288–290.

Об использовании оптимизационных расчетов в отраслях народного хозяйства // Системный анализ и управление научно-техническим прогрессом: (Тез. к теорет. конф.) — М., 1978. — С. 23–31. — Соавт.: Зорин Ю. М., Шепелев Г. И.

Экономическая эффективность совершенствования планирования и управления свеклосахарного производства с использованием экономико-математических методов и ЭВМ // Эффективность использования вычислительной техники и автоматизированных систем управления в народном хозяйстве республики: (Тез. докл. респ. совещ. 5 сент. 1978 г.). — Фрунзе, 1978. — С. 8–11. — Совм. с др.

Транспорт и народное хозяйство // Изв. АН СССР. Сер. экон. — 1978. — № 6. — С. 57–71. — Соавт.: Паенсон Н. В.

[Выступление на сессии МеждудеPARTMENTовенного научно-го совета по проблемам ценообразования Госкомцен Совета Министров СССР и АН СССР, Москва, 21–22 сент. 1977 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1978. — Т. 14, вып. 1. — С. 192–193.

Об использовании оптимизационных расчетов в АСУ отраслями народного хозяйства // Экономика и мат. методы. — 1978. — Т. 14, вып. 5. — С. 821–834. — Соавт.: Чешенко Н. И., Зорин Ю. М., Шепелев Г. И.

[Выступление на Всесоюзной научной конференции «Хозяйственный механизм 10 пятилетки» по проблеме рационального использования ресурсов и управления экономикой, Москва, 16–17 марта 1978 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1978. — Т. 14, вып. 5. — С. 1007.

[Выступление на Всесоюзной научной конференции «Хозяйственный механизм 10 пятилетки» по проблеме рационального использования ресурсов и управления экономикой, Москва, 16–17 марта 1978 г.: Крат. излож.] // Вопр. экономики. — 1978. — № 8. — С. 150.

[Выступление на Юбилейной сессии МеждудеPARTMENTовенного научно-го совета по проблемам ценообразования Госкомцен Совета Министров СССР и АН СССР, посвященной 60-летию Великой Октябрьской социалистической революции: Крат. излож.] // План. хоз-во. — 1978. — № 2. — С. 155–156.

[Выступление на сессии, посвященной проблемам дальнейшего совершенствования методологии и методов ценообразования на новую продукцию производственно-технического назначения: Крат. излож.] // План. хоз-во. — 1978. — № 12. — С. 144.

Принцип дифференциальной оптимизации в применении к однопродуктовой динамической модели экономи-

ки // Сиб. мат. журн. — 1978. — Т. 19, № 5. — С. 1053–1064. — Соавт.: Жиянов В. И., Хованский А. Г.

То же на англ. яз.: Principle of differential optimization applied to a single-product dynamical model of an economic structure // Siberian Math. J. — 1978. — Vol. 19, No. 5. — С. 744–751. — With Zhiyanov V. I. and Khovanskii A. G.

Григорий Яковлевич Лозановский (некролог) // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, вып. 1. — С. 199–202. — Соавт.: Бухвалов А. В., Векслер А. И., Владимиров Д. А., Вулих Б. З., Лозинский С. М., Семенов Е. М.

То же на англ. яз.: Grigorii Yakovlevich Lozanovskii (obituary) // Russian Math. Surveys. — 1978. — Vol. 33, No. 1. — P. 183–188. — With Bukhvalov A. V., Veksler A. I., Vladimirov D. A., Vulikh B. Z., Lozinskiĭ S. M., and Semenov E. M.

Соломон Григорьевич Михлин (к семидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, вып. 2. — С. 213–216. — Соавт.: Кошелев А. И., Олейник О. А., Соболев С. Л.

То же на англ. яз.: Solomon Grigor'evich Mikhlin (on his seventieth birthday) // Russian Math. Surveys. — 1978. — Vol. 33, No. 2. — P. 209–213. — With Koshelev A. I., Oleĭnik O. A., and Sobolev S. L.

Las matemáticas en la econom'ia: logros, dificultades, perspectivas // Los Premios Nobel de Econom'ia, 1969–1977. — Mexico, 1978. — P. 264–275. — (El Trimestre Economico. Lecturas; **25**).

The development of mathematical economics at the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences // Problems of Economic Transition. — 1978. — Vol. 20, No. 10. — P. 75–96. — With Makarov V. L.

Ökonomisch-mathematische Methoden: Zum Stand der Anwendung in der UdSSR und in der DDR [Interview] // RD. — 1978. — Bd 1. — S. 4–5.

Президенту США господину Дж. Картеру: [Обращение по поводу создания в США нейтрон. бомбы] // Правда. — 1978. — 14 марта; Труд. — 1978. — 14 марта. — Совм. с др.

Системный подход // Водный трансп. — 1978. — 29 июня.

Насущные проблемы транспорта // Сов. Россия. — 1978. — 24 окт. — (Ученые анализируют и предлагают). — Соавт.: Заглядимов М.

Ред.: Моделирование и анализ эффективности научно-технического прогресса / Отв. ред. — М.: ВНИИСИ, 1978. — 126 с. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 9).

1979

Ценообразование и технический прогресс // 60 лет планового ценообразования в СССР.—М., 1979.—С. 32–43.

[Выступление на заседании Научного совета по проблеме экономической эффективности основных фондов, капитальных вложений и новой техники АН СССР (май 1977 г.)] // Методы и практика определения эффективности капитальных вложений и новой техники: Сб. науч. информ. — М., 1979. — Вып. 30. — С. 88–91.

Борис Захарович Вулих (некролог) // Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, вып. 4. — С. 133–137. — Соавт.: Векслер А. И., Владимиров Д. А., Гавурин М. К., Лозинский С. М., Пинскер А. Г., Фаддеев Д. К.

То же на англ. яз.: Boris Zakharovich Vulikh (obituary) // Russian Math. Surveys.—1979.—Vol. 34, No. 4.—P. 145–150. — With Veksler A. I., Vladimirov D. A., Gavurin M. K., Lozinskiĭ S. M., Pinsker A. G., and Faddeev D. K.

Сергей Львович Соболев (к семидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, вып. 1. — С. 3–15. — Соавт.: Александров П. С., Александрян Р. А., Бабич В. М., Бахвалов Н. С., Бесов О. В., Лебедев В. И., Масленникова В. Н., Олейник О. А., Успенский С. В.

То же на англ. яз.: Sergei L'vovich Sobolev (on his seventieth birthday) // Russian Math. Surveys. — 1979. — Vol. 34, No. 1. — P. 3–17. — With Aleksandrov P. S., Aleksandryan R. A., Babich V. M., Bakhvalov N. S., Besov O. V., Lebedev V. I., Maslennikova V. N., Oleinik O. A., and Uspenskii S. V.

Глобальная оценка вклада науки и техники в экономику // Достижения и перспективы. — 1979. — Вып. 4. — С. 30–38. — Соавт.: Кругликов А. Г.

Математика в современной школе // Математика в шк. — 1979. — № 4. — С. 6–11. — Соавт.: Соболев С. Л.

Проблема человека // Искусство кино. — 1979. — № 10. — С. 23–29.

Предисловие // Пирогов Г. Г., Федоровский Ю. П. Проблемы структурного оценивания в эконометрии. — М., 1979. — С. 3–5.

Благодатная почва: [Ответы на анкету «Лит. газ.» «Мировой уровень советской науки»] // Лит. газ. — 1979. — 18 апр. — С. 13.

Приглашение к точности // Комс. правда. — 1979. — 26 дек. — (Прогнозы: вчера, сегодня, завтра).

Пат. 2150853. ФРГ: Divisions-Vorrichtung für ein serielles Vier-Spezies-Rechenwerk. Заявл. 12.10.71. — 26.4.73. — 5.4.79; Опубликовано. 5.04.79. — With Tolstjev V. P. and Fet Y. I.

1980

Analisi Funzionale. — М.: Mir, 1980. — 764 p. — (Nuova Biblioteca di Cultura. Ser. Scient.). — With Akilov G. P.

Транспорт в системе народного хозяйства: (Планово-экономические проблемы) // Развитие транспортного комплекса: Сборник. — М., 1980. — С. 5–49. — Соавт.: Паенсон Н. Е.

Математические методы в управлении экономикой // Наука стран социализма. 70-е гг. — М., 1980. — С. 309–319. — Соавт.: Романовский И. В.

Принципы формирования закупочных цен на сельскохозяйственную продукцию и возможные пути их исчисления // Основные направления совершенствования ценообразования на продукцию аграрно-промышленного комплекса в свете решений июльского (1978 г.) Пленума ЦК КПСС. — М., 1980. — С. 61–78. — Соавт.: Вирченко М. И.

Оптимизационные методы в текущем планировании // Использование методов оптимизации в текущем планировании и оперативном управлении производством: Материалы Всесоюз. конф., Москва, 17–19 окт. 1979 г. — М., 1980. — С. 12–21.

Некоторые вопросы системного анализа взаимосвязей транспортного и топливно-энергетического комплексов // Системное моделирование социально-экономических процессов: Материалы Всесоюз. семинара [22–28 мая 1978 г.]. — Воронеж, 1980. — С. 15–27. — Соавт.: Паенсон Н. В.

A few words on application of optimization methods to economic problems // Extremal Methods and System Analysis: An International Symposium on the Occasion of Prof. A. Charnes Sixtieth Birthday, Austin (Texas), Sept. 13–15, 1977. — Berlin etc., 1980. — P. 85–95. — (Lecture

Notes in Economics and Math. Systems; **174**). — With Romanovsky J. V.

Mathematical-economic modelling of scientific and technical progress // Optimization Techniques: Proc. 9th IFIP Conf., Warsaw, Sept. 4–8, 1979.—Berlin etc., 1980.—Pt. 1. — P. 30–36.—(Lect. Notes in Control and Inform. Sci.; **22**).

Проблемы совершенствования управления транспортной системой страны // Хоз-во и право. — 1980. — № 6. — С. 3–10. — Соавт.: Загладимов М.

[Выступление в дискуссии по проблеме народно-хозяйственного критерия оптимальности в СССР, Москва, 12–13 апр. 1979 г.: Крат. излож.] — Politická Ekonomie. — 1980. — Roč. 28, No. 10. — S. 1055–1056.

Ред.: Методические основы отраслевой оптимизации: [Аганбегян А. Г., Албегов М. М., Казакевич Д. М. и др. Основные методические положения оптимизации развития и размещения производства. М., 1978. 271 с. // План. хоз-во. — 1980. — № 5. — С. 126–128.

Необходим высокий уровень экономического анализа // За науку в Сибири. — 1980. — 12 июня. — С. 4–5.

Экономический механизм управления транспортом: [Беседа] // Гудок. — 1980. — 23 дек.

Ред.: Использование методов оптимизации в текущем планировании и оперативном управлении производством: Материалы Всесоюз. конф., Москва, 17–19 окт. 1979 г. / Отв. ред. — М.: ВНИИСИ, 1980. — 264 с.

Ред.: Развитие транспортного комплекса: Сборник / Отв. ред. — М.: Наука, 1980. — 192 с.

1981

Analyse Fonctionnelle. Т. 1. Operateurs et Fonctionnelles Linéaires. — М.: Mir, 1981. — 490 p. — With Akilov G. P.

Analyse Fonctionnelle. Т. 2. Equations Fonctionnelles. — М.: Mir, 1981. — 343 p. — With Akilov G. P.

Роль ценового механизма в повышении эффективности народного хозяйства // Материалы Всесоюзного совещания по вопросам ценообразования. — М., 1981. — С. 31–35.

Экономика и современные средства управления в решении задачи совершенствования советской торговли // Методологические проблемы совершенствования управления торговлей в свете решений XXVI съезда КПСС: Тез. сообщ. науч. разработ. и материалы к Всесоюз. симпоз. специалистов. — М., 1981. — Ч. 1. — С. 18–19.

Zur Nutzung von Optimierungsrechnungen in automatisierten Leitungssystemen durch die Volkswirtschaftszweige der UdSSR // Planungs und Prognosemodelle: Erfahrungen Probleme Entwicklungstendenzen.—Berlin, 1981.—S. 11–26. — With Cheshenko N. I., Zorin Yu. M., and Shepelev G. I.

Марк Александрович Красносельский (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1981. — Т. 36, вып. 2. — С. 215–220. — Соавт.: Боголюбов Н. Н., Ишлинский А. Ю., Садовский Б. Н., Соболев С. Л., Трапезников В. А., Бобылев Н. А.

То же на англ. яз.: Mark Aleksandrovich Krasnosel'skiĭ (on his sixtieth birthday) // Russian Math. Surveys. — 1981. — Vol. 36, No. 2. — P. 205–212. — With Bogolyubov N. N., Ishlinskiĭ A. Yu., Sadovskii B. N., Sobolev S. L., Trapeznikov V. A., and Bobylev N. A.

Математические модели в проблемах ценообразования // Успехи мат. наук. — 1981. — Т. 36, вып. 4. — С. 204–205. — Соавт.: Макаров В. Л.

[Выступление на учебно-методической конференции «Развитие экономико-математических методов и их использование в подготовке специалистов по экономической кибернетике», Таллинн, 8–11 окт. 1980 г.: Крат.

излож.] // Экономика и мат. методы. — 1981. — Т. 17, № 4. — С. 812.

[Разработка общетранспортной методики определения эффективности капитальных вложений: Выступление на 1 Всесоюз. семинаре «Пробл. функционирования и развития произв. инфраструктуры», Лобня, апр. 1981 г.: Крат. излож.] // Вопр. экономики. — 1981. — № 9. — С. 152.

[Цена и экономическая оценка ресурсов: Докл. на 6 сов.-амер. симпоз. экономистов, Алма-Ата, 8–11 июля 1981 г.: Крат. излож.] // Вопр. экономики. — 1981. — № 9. — С. 155.

Matematinial metodai ir ekonomika // Mokslas ir Technika. — 1981. — No. 9. — P. 6–7.

1982

Functional Analysis. — 2nd ed. — Oxford and New York: Pergamon Press, 1982. — 589 p. — With Akilov G. P.

Влияние превращаемости фондов и физического износа оборудования на экономическое развитие // Математические модели и статистический анализ научно-технического прогресса. — М., 1982. — С. 11–18. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 8). — Соавт.: Жиянов В. И.

О некоторых дискуссионных проблемах оценки эффективности капитальных вложений на транспорте // Определение эффективности капитальных вложений на транспорте. — М., 1982. — С. 51–67. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 8а). — Соавт.: Лившиц В. Н., Васильева Е. М., Фролова М. П.

О некоторых направлениях исследований в математической экономике // Итоги науки и техники. — М.,

1982. — С. 3–21. — (Сер. Современ. пробл. математики; Т. 19). — Соавт.: Катышев П. К., Кирута А. Я., Полтерович В. М.

То же на англ. яз.: Some research directions in mathematical economics // J. Soviet Mathematics. — 1984. — Vol. 26, No. 4. — P. 1935–1949. — With Katyshev P. K., Kiruta A. Ya., and Polterovich V. M.

Автобиография Леонида Витальевича Канторовича // Оптимизация: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1982. — Вып. 28. — С. 50–57.

Математические методы и экономика // Развитие экономико-математических методов и их использование в подготовке специалистов по экономической кибернетике: Материалы учеб.-метод. конф., Таллинн, 8–11 окт. 1980 г. — Тарту, 1982. — С. 13–19.

Математическая экономика // Математическая энциклопедия. — М., 1982. — Т. 3. — С. 584–591. — Соавт.: Макаров В. Л.

Транспортный фактор и тарифы в снижении ресурсоемкости и рациональном размещении производства // Роль цен и стандартов в ускорении научно-технического прогресса, улучшении качества продукции и снижении ее ресурсоемкости: (Тез. докл. и выступлений на Всесоюз. конф., Москва, 19–20 окт. 1982 г.). — М., 1982. — С. 11–13.

[Выступление в прениях на конференции Международной экономической ассоциации по актуальным транспортным проблемам, Москва, окт. 1979 г.: Излож.] // Транспорт на дальние расстояния: Материалы конф. — М., 1982. — С. 173–174.

[Выступление на пленуме Научного совета АН СССР по комплексной проблеме «Оптимальное планирование и

управление народным хозяйством»] // Проблемы народно-хозяйственного критерия оптимальности: Материалы дискус. — М., 1982. — С. 143–145. — (Пробл. соврем. экономики).

Planning, mathematics and economics // Current Developments in the Interface: Economics, Econometrics, Mathematics. — Dordrecht, Holland etc., 1982. — P. 201–209.

[Выступление на общем годичном собрании Отделения экономики АН СССР, 1 марта 1982 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1982. — Т. 18, вып. 4. — С. 730.

[Экономика и современные средства управления в решении задачи совершенствования советской торговли: Выступление на совещ. по методол. пробл. совершенствования упр. торговлей, 8–10 дек. 1981 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1982. — Т. 18, вып. 4. — С. 739.

[Об актуальных проблемах применения математических методов в экономике: Выступление на чествовании в связи с 70-летием со дня рождения Л. В. Канторовича, 10 февр. 1982 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1982. — Т. 18, вып. 4. — С. 742–743.

Ред.: Математические модели и стилистический анализ научно-технического прогресса / Отв. ред. Л. В. Канторович, А. Г. Кругликов. — М.: ВНИИСИ, 1982. — 94 с. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 8).

Ред.: Определение эффективности капитальных вложений на транспорте / Под ред. Л. В. Канторовича, В. Н. Лившица. — М.: ВНИИСИ, 1982. — 103 с. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 8а).

Предисловие // Определение эффективности капитальных вложений на транспорте — М.: ВНИИСИ, 1982. — С. 3–6. — Соавт.: Лившиц В. Н.

Ред.: Проблемы прогнозирования и оптимизации работы транспорта: Сборник / Под ред. Л. В. Канторовича, В. Н. Лившица. — М.: Наука, 1982. — 328 с.

1983

Оптимизационные задачи в условиях автоматизированных систем управления: (Докл. на Второй конф. по оптим. планир. и упр. нар. хоз-вом). — М.: ЦЭМИ, 1983. — 29 с.

Az árák és a termelés hatékonysága // Alkalmazkodás az új Árviszonyokhoz. — Budapest, 1983. — P. 31–52. — With Makarov V. L.

Системные идеи в математике // Философско-методологические основания системных исследований (системный анализ и системное моделирование). — М., 1983. — С. 56–82. — Соавт.: Плиско В. Е.

Системный подход в методологии математики // Системные исследования: Методол. пробл.: Ежегодник, 1983. — М., 1983. — С. 27–41. — Соавт.: Плиско В. Е.

Математические системы и моделирование // Оптимальные модели в системном анализе. — М., 1983. — С. 3–13. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 9). — Соавт.: Плиско В. Е.

Оптимизация потребления в непрерывной и дискретной моделях двухсекторной экономики // Оптимальные модели в системном анализе. — М., 1983. — С. 14–20. — Соавт.: Коркина Е. И., Хованский А. Г.

Взаимопроникновение наук в совершенствовании управления народным хозяйством // Диалектика в науках о природе и человеке: Тр. 3 Всесоюз. совещ. по философ. вопр. соврем. естествознания. — М.: 1983. — [Ч. 3]. Единство и многообразие мира, дифференциация и интеграция научного знания. — С. 342–348.

Пути использования математического моделирования и ЭВМ в планировании социалистической экономики // Совершенствование методологии народно-хозяйственного планирования в свете решений XXVI съезда партии и июньского [1983 г.] Пленума ЦК КПСС: Тез. докл. Всесоюз. науч. конф., Москва, окт. 1983 г.: Пленар. заседание. — М., 1983. — С. 28–32.

О направлениях совершенствования хозяйственного механизма на транспорте // Методологические проблемы совершенствования хозяйственного механизма: Сборник.—М., 1983.—С. 140–142.—Соавт.: Паенсон Н. В.

11 Международный симпозиум по математическому программированию [Бонн, 23–27 авг. 1982 г.] // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1983. — № 1. — С. 197–201. — Совм. с др.

[О результатах применения математических методов в экономике: Выступление на Пятых Немчиновских чтениях, 3 дек. 1982 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1983. — Т. 19, вып. 3. — С. 550–551.

[Выступление на общем годовичном собрании Отделения экономики АН СССР, 1 марта 1983 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1983. — Т. 19, вып. 4. — С. 725–726.

[Методологические проблемы оценки эффективности принципиально новой техники: Докл. на Всесоюз. науч.-практ. конф. по пробл. методологии и практики оценки эффективности хозяйств, мероприятий, Москва, 9–10 февр. 1983 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1983. — Т. 19, вып. 4. — С. 729.

[Выступление на пленарном заседании Второй конференции по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством, Москва, 20–22 апр. 1983 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1983. — Т. 19, вып. 5. — С. 930–931.

Асимптотическая оптимизация потребления в модели двухсекторной экономики // Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 24, № 5. — С. 71–75. — Соавт.: Коркина Е.И., Хованский А. Г.

То же на англ. яз.: Asymptotic optimization of consumption in a model of two-sector economy // Siberian Math. J. — 1983. — Vol. 24, No 5. — P. 704–708. — With Korkina E. I. and Khovanskij A. G.

Ред.: Зиядуллаев Н. С. Математические методы в системах управления региональной экономикой / Отв. ред. — Ташкент: Фан, 1983. — 200 с.

Ред.: Оптимальные модели в системном анализе / Отв. ред. Л. В. Канторович, А. Г. Кругликов. — М.: [ВНИИ-ИСИ], 1983. — 136 с. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 9).

1984

Функциональный анализ. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука, 1984. — 752 с. — Соавт.: Акилов Г. П.

Предисловие к 3-му и 2-му изд. // Функциональный анализ. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука, 1984. — С. 7–10. — Соавт.: Акилов Г. П.

Проблемы совершенствования системы внегородских пассажирских сообщений // Развитие системы пассажирских сообщений. — М., 1984. — С. 5–33.

Проблемы развития внутригородского пассажирского транспорта // Проблемы развития систем городского пассажирского транспорта: Материалы совмест. заседания Бюро Науч. совета АН СССР по комплекс. пробл. един. трансп. системы СССР и Ленингр. террит. секции Науч. совета АН СССР по комплекс. пробл. «Оптим. планир. и упр. нар. хоз-вом», состоявшегося в Ленинграде 29–30 июня 1982 г. — Л., 1984. — С. 4–10.

Экономические проблемы ускорения научно-технического прогресса // Управление экономическим и социальным развитием в регионе: (Сб. науч. тр.). — Донецк, 1984. — С. 10–16.

Раскроя задача // Математическая энциклопедия.—М., 1984. — Т. 4. — С. 868–870. — Соавт.: Залгаллер В. А.

Pianificazione ottimale e sviluppo economico // Gaetano D. di. L'Economia Sovietica: uno Squardo dall'interno — Milano, 1984. — P. 73–87.

The economics of earthquake prediction // Earthquake Prediction: Proc. of the Int. Sympos. on Earthquake Prediction [Paris, Apr. 2–6, 1979]. — Tokyo, 1984. — P. 703–711. — With Keilis-Borok V. I.

Prices and production efficiency // The Economics of Relative Prices: Proc. of a Conf. Held by the Int. Econ. Assoc. in Athens, Greecy. — London, 1984. — P. 3–23. — With Makarov V. L.

Некоторые экономические проблемы реализации Продовольственной программы СССР // Изв. АН СССР. Сер. биол. — 1984. — № 2. — С. 289–293.

Цены и эффективность производства // Экономика и мат. методы, — 1984. — Т. 20, вып. 1. — С. 28–41. — Соавт.: Макаров В. Л.

[Выступление на Всесоюзной научной конференции «Совершенствование методологии народно-хозяйственного планирования в свете решений XXVI съезда партии и июньского (1983 г.) Пленума ЦК КПСС», Москва, 19–21 окт. 1983 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1984. — Т. 20, вып. 2. — С. 361.

[Выступление на Ежегодных Немчиновских чтениях, 13 янв. 1984 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1984. — Т. 20, вып. 4. — С. 769.

Владимир Иванович Соболев (к семидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1984. — Т. 39, вып. 4. — С. 179–180. — Соавт.: Красносельский М. А., Семенов Е. М., Соболев С. Л., Яненко Н. Н.

То же на англ. яз.: Vladimir Ivanovich Sobolev (on his seventieth birthday) // Russian Math. Surveys. — 1984. — Vol. 39, No. 4. — P. 143–144. — With Krasnosel'skiĭ M. A., Semenov E. M., Sobolev S. L., and Yanenko N. N.

Рафаэль Арамович Александрян (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1984. — Т. 39, вып. 4. — С. 181–182. — Соавт.: Мержелян С. Н., Олейник О. А., Соболев С. Л.

То же на англ. яз.: Rafael' Aramovich Aleksandryan (on his sixtieth birthday) // Russian Math. Surveys. — 1984. — Vol. 39, No. 4. — P. 145–147. — With Mergelyan S. N., Oleĭnik O. A., and Sobolev S. L.

[Выступление на Советско-венгерском симпозиуме по проблемам экономики транспорта, Москва, дек. 1983 г.: Крат. излож.] // Вопр. экономики. — 1984. — № 5. — С. 156.

[Выступление на международном симпозиуме «Диалектика и системный анализ», Москва, 13–16 сент, 1983 г.: Крат. излож.] // Вопр. философии. — 1984. — № 9. — С. 139.

Советские ученые в защиту Пелтиера: [Письмо президенту США Р. Рейгану] // Известия. — 1984. — 26 июня. — Моск. веч. вып. — Совм. с др.

Ред.: Проблемы развития систем городского пассажирского транспорта: Материалы совмест. заседания Бюро Науч. совета АН СССР по комплекс. пробл. «Единая транспорт. система СССР» и Ленингр. террит. секции Науч. совета АН СССР по комплекс. пробл. «Оптим.

планир. и упр. нар. хоз-вом», состоявшегося в Ленинграде 29–30 июня 1982 г. / Отв. ред. — Л.: Наука, 1984. — 84 с. — Совм. с др.

Ред.: Развитие системы пассажирских сообщений: Сб. ст. / Отв. ред. Л. В. Канторович, Н. И. Бешева — М.: Наука, 1984. — 169 с.

Ред.: Совершенствование хозяйственного механизма на транспорте / Отв. ред. Л. В. Канторович, Е. Ф. Тихомиров. — М.: ЦЭМИ, 1984. — 223 с.

Ред.: Теория, методология и практика системных исследований: Всесоюз. конф., 29–31 янв. 1985 г. Секция 7. Систем. исслед. науч.-техн. развития: Тез. докл. / Отв. ред. вып. — М.: Наука, 1984. — 144 с.

1985

Ekonomski Račun Optimalnog Korištenja Resursa. — Zagreb: Izdanja Centra za Kulturnu Djelatnost, 1985. — 265 s.

Сопоставление моделей и оценка влияния сокращения лага строительства и лага НТП на динамику экономических показателей // Системное моделирование и оптимизационные методы в исследованиях научно-технического прогресса. — М., 1985. — С. 3–13. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 7). — Соавт.: Коркина Е.И., Хованский А.Г.

Пути использования математического моделирования и ЭВМ в планировании // Планирование, технический прогресс, эффективность. — М., 1985. — С. 211–217.

Die Entwicklung von Optimierungsmethoden in der UdSSR // Ökonomie und Optimierung. — Berlin, 1985. — S. 11–96.

The application of linear programming algorithms to some large scale problems // 12 International Symposium on

Mathematical Programming, Cambridge (Massachusetts) Aug. 5–9, 1985. — P. 50A. — With Romanovsky J. V.

Генерирование столбцов в симплекс-методе // Экономика и мат. методы. — 1985. — Т. 21, вып. 1. — С. 128–138. — Соавт.: Романовский И. В.

Работу АСУ — на условия экономического эксперимента // Экономика и мат. методы. — 1985. — Т. 21, вып. 4. — С. 740–741.

[Выступление на общем годовичном собрании Отделения экономики АН СССР, 11 марта 1985 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1985. — Т. 21, вып. 5. — С. 944.

[Выступление на Всесоюзном семинаре «Теория, методология и практика системных исследований», Москва, 21–31 янв. 1985 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1985. — Т. 21, вып. 5. — С. 946.

Научно-технический прогресс — экономические проблемы // Экономика и орг. пром. пр-ва (ЭКО). — 1985. — № 1. — С. 3–26.

То же на англ. яз.: Scientific-technical progress: Economic problems // Problems of Economic Transition. — 1986. — Vol. 28, No. 10. — P. 3–25.

В поисках нового: [О науч. деятельности В. Г. Болтянского] // Математика в шк. — 1985. — № 2. — С. 68–72. — Соавт.: Воронов А. А., Гришиани Д. М., Колмогоров А. Н., Новиков С. П.

Единая транспортная: [О развитии един. трансп. системы] // Соц. индустрия. — 1985. — 3 апр.

Ред.: Системное моделирование и оптимизационные методы в исследованиях научно-технического прогресса / Отв. ред. Л. В. Канторович, А. Г. Кругликов. — М.: ВНИИСИ, 1985. — 140 с. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 7).

1986

Системный анализ и некоторые проблемы научно-технического прогресса // Диалектика и системный анализ. — М., 1986. — С. 158–166.

О вкладе А. Г. Пинскера в теорию полуупорядоченных пространств и векторную оптимизацию // Оптимизация: Сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1986. — Вып. 37. — С. 7–12. — Соавт.: Акилов Г. П., Векслер А. И., Владимиров Д. А., Гавурин М. К., Кутателадзе С. С., Рубинштейн Г. Ш.

Арон Григорьевич Пинскер (некролог) // Успехи мат. наук. — 1986. — Т. 41, вып. 2. — С. 177–178. — Соавт.: Векслер А. И., Владимиров Д. А., Гавурин М. К., Ляпин Е. С., Фаддеев Д. К.

То же на англ. яз.: Aron Grigor'evich Pinsker (obituary) // Russian Math. Surveys. — 1986. — Vol. 41, No. 2. — P. 181–182. — With Veksler A. I., Vladimirov D. A., Gavurin M. K., Lyapin E. S., and Faddeev D. K.

Шире использовать оптимизационные методы в народном хозяйстве // Коммунист. — 1986. — № 9. — С. 44–54. — Соавт.: Албегов М., Безруков В.

То же на англ. яз.: Toward the wider use of optimizing methods in the national economy // Problems of Economic Transition. — 1987. — Vol. 29, No. 10. — P. 5–20. — With Albegov M. and Bezrukov V.

Архитектура будущих ЭВМ // Природа. — 1986. — № 7. — С. 3–15. — Соавт.: Фет Я. И.

Транспорт и экономика // НТР: Пробл. и решения. — 1986. — 4–17 марта. — С. 5.

Scientific-technical progress: Economic problems // Problems of Economic Transition. — 1986. — Vol. 28, No. 10. — P. 3–25.

Прогресс и цены: [О системе ценообразования. Беседа] // Известия. — 1986. — 15 февр. — Моск. веч. вып.

1987

Некоторые вопросы совершенствования механизма взаимодействия транспорта с другими отраслями народного хозяйства // Совершенствование хозяйственного механизма на железнодорожном транспорте. — М.: 1987. — С. 12–25. — Соавт.: Паенсон Н. В.

Фундаментальная идея оптимизации // Достижения фундаментальных наук — производству. — М., 1987. — С. 18–30. — (Ускорение науч.-техн. прогресса).

Роль ценового механизма в повышении эффективности народного хозяйства: (Тез. докл. на Всесоюз. совещ. по вопр. ценообразования, Москва, 1981) // Проблемы совершенствования системы транспортных тарифов: [Сб. ст.]. — М., 1987. — С. 11–16.

Некоторые теоретические вопросы построения системы пассажирских тарифов: (Докл. на науч.-техн. конф. «Система пассажир. тарифов на трансп. СССР и пути ее совершенствования», дек. 1966 г.) // Проблемы совершенствования системы транспортных тарифов: [Сб. ст.]. — М., 1987. — С. 17–22.

Транспортный фактор и тарифы в снижении ресурсоемкости и рациональном размещении производства: (Тез. докл. на Всесоюз. конф. «Роль цен и стандартов в ускорении науч.-техн. прогресса, улучшении качества продукции и снижении ее ресурсоемкости», Москва, сент. 1982 г.) // Проблемы совершенствования системы транспортных тарифов: [Сб. ст.]. — М., 1987. — С. 23–25.

Основные предложения по совершенствованию тарифов на железнодорожном транспорте: (Докл. на расшир.

засед. Бюро Науч. совета АН СССР по комплекс. пробл. единой трансп. системы СССР, июнь 1983 г.) // Проблемы совершенствования системы транспортных тарифов: [Сб. ст.]. — М., 1987. — С. 26–28.

Некоторые предложения по совершенствованию методики формирования автомобильных грузовых тарифов (май 1985) // Проблемы совершенствования системы транспортных тарифов: [Сб. ст.]. — М., 1987.—С. 29–30.

Мысли и соображения по тарифам // Проблемы совершенствования системы транспортных тарифов: [Сб. ст.]. — М., 1987. — С. 33–49.

Мой путь в науке: (Предполагавшийся докл. в Моск. мат. о-ве) // Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, вып. 2. — С. 183–213.

То же на англ. яз.: My journey in science (proposed report to the Moscow Mathematical Society) // Russian Math. Surveys. — 1987. — Vol. 42, No. 2. — P. 233–270.

Функциональный анализ (Основные идеи) // Сиб. мат. журн. — 1987. — Т. 28, № 1. — С. 7–16.

То же на англ. яз.: Functional analysis (basic ideas) // Siberian Math. J. — 1987. — Vol. 28, No. 1. — P. 1–8.

Оптимизационные методы и автоматизированные системы управления в задачах совершенствования хозяйственного механизма // Вестн. ЛГУ. Сер. 5. Экономика. — 1987. — Вып. 2. — С. 63–75.

Toward the wider use of optimizing methods in the national economy // Problems of Economic Transition. — 1987. — Vol. 29, No. 10. — P. 5–20. — With Albegov M. and Bezrukov V.

«Смотреть на правду открытыми глазами!»: Последнее интервью выдающегося ученого // Неделя. — 1987. — 3–9 авг. — С. 10.

Ред.: Пути совершенствования транспортного строительства: [Сб. ст.] / Отв. ред. Л. В. Канторович, Г. С. Переселенков. — М.: Наука, 1987. — 138 с.

1988

Основные проблемы развития пассажирского транспорта крупных городов // Городской пассажирский транспорт: Экономика, организация, транс.: Градостр. проектирование: Материалы Всесоюз. науч.-практ. конф. «Совершенствование сист. пассажир. сообщ. крупных городов и агломераций», сост. в Ленинграде 1–3 апр. 1986 г. — Л., 1988. — С. 8–11.

1989

Проблемы эффективного использования и развития транспорта. — М.: Наука, 1989. — 304 с.

Первая работа по линейному программированию / Экономико-математические модели и методы. Сб. науч. трудов. Памяти академика Леонида Витальевича Канторовича. — Воронеж: Изд-во Воронежск. унив., 1989. — С. 9–12.

О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта / Экономико-математические модели и методы. Сб. науч. трудов. Памяти академика Леонида Витальевича Канторовича. — Воронеж: Изд-во Воронежск. унив., 1989. — С. 13–19.

Выступление на Ученом совете университета Мартина Лютера в связи с присуждением степени почетного доктора / Экономико-математические модели и методы. Сб. науч. трудов. Памяти академика Леонида Витальевича Канторовича. — Воронеж: Изд-во Воронежск. унив., 1989. — С. 20–25.

Mathematics in economics: Achievements, difficulties, perspectives // American Economic Review, American Economic Association. — 1989. — Vol. 79, No. 6. — P. 18–22.

1990

О состоянии и задачах экономической науки // Экономика и мат. методы. — 1990. — Т. 26, № 1. — С. 5–14.

My journey in science // Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics. — New York; Oxford: Oxford University Press, 1990. — P. 8–45.

Ред.: Экономика и оптимизация: Пер. с немец. / Редакторы: Канторович Л. В., Лассман В., Шилар Х., Шварц К., Брентъес С. — М.: Наука, 1990. — 248 с.

1996

Selected Works. Part 1: Descriptive Theory of Sets and Functions. Functional Analysis in Semi-Ordered Spaces / Ed. by S. S. Kutateladze. — London: Gordon and Breach, 1996. — 374 p.

Selected Works. Part 2: Applied Functional Analysis. Approximation Methods and Computers / Ed. by S. S. Kutateladze and J. V. Romanovsky. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. — 394 p.

1999

Electronic computing machines // Mathematics: Its Content, Methods and Meaning / Ed. by A. D. Alexandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev. — Reprint of the 2nd 1969 ed. — Mineola; New York: Dover Publications, 1999. — XVIII, 372 p. — With Lebedev S. A.

2001

Принципы методики определения целесообразной степени рассредоточения и сравнительной оценки различных мер повышения живучести // Сиб. журн. индустр. мат. — 2001. — Т. 4, № 2(8). — С. 29–58.

2004

Функциональный анализ. — 4-е изд., испр. — СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004. — 816 с. — Соавт.: Акилов Г. П.

О перемещении масс // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2004. — Т. 312. — С. 11–14.

То же на англ. яз.: On mass transportation // J. Math. Sci., New York. — 2006. — Vol. 133, No. 4. — P. 1381–1382.

Об одной проблеме Монжа // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2004. — Т. 312. — С. 15–16.

То же на англ. яз.: On a problem of Monge // J. Math. Sci., New York. — 2006. — Vol. 133, No. 4. — P. 1383.

Honorary doctorate lecture (Festvortrag zur Verleihung der Ehrendoktorwürde.) / Lassmann W. (ed.) et al., Optimieren und entscheiden in der Wirtschaft. Gewidmet dem Nobelpreisträger Leonid W. Kantorowitsch. Mit seiner Nobelpreisrede vom Dezember 1975. — Leipzig: Edition am Gutenbergplatz Leipzig (EAGLE). EAGLE 13, 2004. — P. 27–34.

Mathematics in economics: achievement, difficulties, perspectives. Nobel prize lecture to the memory of Alfred Nobel, December 11, 1975 [Reprinted from Nobel lectures, Economic sciences 1969–1980] / Lassmann W. (ed.) et al., Optimieren und entscheiden in der Wirtschaft. Gewidmet dem Nobelpreisträger Leonid W. Kantorowitsch. Mit seiner

Nobelpreisrede vom Dezember 1975. — Leipzig: Edition am Gutenbergplatz Leipzig (EAGLE). EAGLE 13, 2004. — P. 113–124.

2009

Zur allgemeinen Theorie der halbgeordneten Räume (On the general theory of semiordered spaces) // J. Approx. Theory. — 2009. — Vol. 156, No. 1. — P. 28–51. — With Lorentz G. — Публикация рукописи 1939 года.

Reprints of the papers: On the translocation of masses (1958); Mathematical methods of organizing and planning production (1960); Further development of mathematical methods and the prospects of their application in economic planning (1964); Economic problems of scientific and technical progress (1976); Mathematics in economics: Achievements, difficulties, perspectives (1989) / Vane H. R. and Mulhearn C. (eds.) Wassily W. Leontief, Leonid V. Kantorovich, Tjalling C. Koopmans and J. Richard N. Stone (Pioneering Papers of the Nobel Memorial Laureates in Economics Series 4). — Northampton: Edward Elgar Publishing, 2009. — 735 p.

2011

Избранные сочинения. Математико-экономические работы. — Новосибирск: Наука, 2011. — 730 с.

Указатель основных соавторов

- А**килов Г. П. 1959, 1963
1964, 1967, 1970, 1977
1980, 1981, 1982, 1984
Албегов М. 1986
- Б**езруков В. 1986
Бицадзе А. В. 1968, 1969
Богачев В. Н. 1969, 1970
1972, 1974
- В**айнштейн А. Л. 1967, 1970
Васильева Е. М. 1982
Вилькович Е. В. 1970, 1971
Вирченко М. И. 1970, 1971
1980
Владимиров Д. А. 1963, 1966
Вулих Б. З. 1937, 1938, 1950
1951, 1958, 1960, 1963
1966, 1979
- Г**авурин М. К. 1948, 1949
1954, 1959, 1977
Глобенко И. Г. 1967
Гольштейн Е. Г. 1972, 1976
Горстко А. Б. 1964, 1967, 1968
1971, 1972, 1976, 1977
Горьков Л. И. 1959
Гурвич Ф. Г. 1974
- Ж**иянов В. И. 1973, 1975
1978, 1982
Журавель А. 1974
- З**аглядимов М. 1978, 1980
Залгаллер В. А. 1951, 1971
1972, 1984
- Зорин Ю. М. 1978, 1979, 1981
- И**ванов А. А. 1958, 1959
Иловайский И. В. 1966, 1968
- К**анторович И. Л. 1958
Катышев П. К. 1982
Кейлис-Борок В. И. 1970, 1971
1973, 1984
Кирута А. Я. 1982
Коркина Е. И. 1983, 1985
Кошелев А. И. 1978
Кругликов А. Г. 1978, 1979
Крылов В. И. 1933, 1936, 1941
1948–1958, 1962, 1964
Кутателадзе С. С. 1973, 1977
- Л**аврентьев М. А. 1968, 1969
Лебедев С. А. 1963, 1999
Лившиц В. Н. 1982
Люстерник Л. А. 1956
- М**акаров В. Л. 1965, 1967
1970–1973, 1975–1978
1981–1984
Мергелян С. Н. 1984
Можин В. П. 1971
Молчан Г. М. 1970, 1971, 1973
- Н**атансон И. П. 1941, 1948
1958, 1959, 1963
- О**лейник О. А. 1978, 1984
- П**аенсон Н. В. 1978, 1980
1983, 1987

- Петров Ю. П. 1959
Петрова Л. Т. 1956, 1958, 1974
Пинскер А. Г. 1938. 1939, 1950
1951, 1958, 1960
1966, 1971
Плиско В. Е. 1983
Полтерович В. М. 1982
Поснов Н. Н. 1959
- Р**омановский И. В. 1962, 1965
1966, 1971, 1972
1975, 1976, 1977
1980, 1985
Рубинштейн Г. Ш. 1957–1959
1967, 1970
- С**мирнов В. И. 1933, 1948
Соболев С. Л. 1956, 1978
1979, 1984
- Т**олстьев В. П. 1973, 1979
- Ф**аддеев Д. К. 1956
- Фаддеева В. Н. 1962
Фет Я. И. 1965, 1966, 1968
1969, 1973, 1974
1979, 1986
Фихтенгольц Г. М. 1934, 1938
Фролова М. П. 1982
Фрумкин П. В. 1937
- Х**ованский А. Г. 1978, 1983
1985
- Ч**ернин К. Е. 1956
Чешенко Н. И. 1978, 1979, 1981
- Ш**епелев Г. И. 1978, 1979, 1981
- Э**пштейн В. Л. 1954
- Я**ковлева М. А. 1958
- К**оорmans Т. С. 1976
- L**ivenson E. 1930, 1932
1933, 1937

Алфавитный указатель трудов

Год изд.

Автобиография	1982
Авторские свидетельства:	
Арифметическое устройство цифровой вычислительной машины	1968
Вычислительная система, состоящая из универсальной цифровой вычислительной машины и малой вычис- лительной машины	1965
Релейная клавишная вычислительная машина для авто- матического выполнения арифметических операций	1959
Сумматор для одновременного сложения нескольких двоичных слагаемых	1966
Устройство для умножения	1973
Функциональный преобразователь	1954
Электромеханическое запоминающее устройство	1974
Алгебра экономики	1976
Амортизационные отчисления и оценка эффективности новой техники в системе оптимального планирования	1966
Амортизационные отчисления и эффективность приме- нения новой техники в системе оптимального планиро- вания	1963
Амортизационные платежи при оптимальном использо- вании оборудования	1965
Анализ динамики экономических показателей на основе однопродуктовых динамических моделей	1978
Андрей Васильевич Бицадзе (к 50-летию со дня рождения)	1966
Арон Григорьевич Пинскер (к 60-летию со дня рождения)	1966
Арон Григорьевич Пинскер (некролог)	1986
Архитектура будущих ЭВМ	1986
Асимптотическая оптимизация потребления в модели двусекторной экономики	1983
Благодатная почва: [Ответы на анкету «Лит. газ.»: «Мировой уровень советской науки»]	1979
Борис Захарович Вулих (к пятидесятилетию со дня рождения)	1963

Борис Захарович Вулих (некролог)	1979
В поисках нового:	
[О научной деятельности В. Г. Болтянского]	1985
Вариационное исчисление	1933
Взаимопроникновение наук в совершенствовании управ- ления народным хозяйством	1983
Владимир Иванович Соболев (к шестидесятилетию со дня рождения)	1974
Владимир Иванович Соболев (к семидесятилетию со дня рождения)	1984
Влияние превращаемости фондов и физического износа оборудования на экономическое развитие	1982
Возможность применения математических методов в воп- росах производственного планирования	1957, 1958
Возраст открытий: Какой он — молодой ученый?	1972
Вопросы оптимального планирования	1970
Вопросы разработки и использования крупноагрегирован- ной модели оптимального перспективного планирова- ния	1967
Время точных решений	1976
Выступления:	
[в дискуссии по проблеме народно-хозяйственного кри- терия оптимальности в СССР, Москва, 12–13 апр. 1979 г.]	1980
[в прениях на конференции Международной экономи- ческой ассоциации по актуальным транспортным проблемам, Москва, окт. 1979 г.]	1982
[в прениях по докладам секции линейного программиро- вания на Научном совещании о применении матема- тических методов в экономических исследованиях и планировании]	1961
[на Всесоюзной научной конференции «Итоги экономи- ческих экспериментов в отраслях народного хозяйства и перспективы дальнейшего совершенствования экономического механизма хозяйственной реформы, дек. 1974 г.]	1975
на Всесоюзной научной конференции «Совершенствова- ние методологии народно-хозяйственного планирова- ния в свете решений XXVI съезда партии и июньско- го (1983 г.) Пленума ЦК КПСС»	1984

на Всесоюзной научной конференции «Хозяйственный механизм 10 пятилетки» по проблеме рационального использования ресурсов и управления экономикой, Москва, 16–17 марта 1978 г.	1978
на Всесоюзном семинаре «Теория, методология и практика системных исследований», Москва, 21–31 янв. 1985 г.	1985
на годичном собрании АН СССР, 6–7 февр. 1967 г.	1967
на Ежегодных Немчиновских чтениях, 13 янв. 1984 г. .	1984
на заседании «Кибернетика, планирование и социальная система» в редакции журнала «Вопросы экономики»	1964
на заседании Научного совета по проблеме экономической эффективности основных фондов, капитальных вложений и новой техники АН СССР (май 1977 г.) .	1978 1979
на конференции «Круглого стола» в Агентстве печати «Новости», посвященной применению математических методов в экономике	1964
на международном симпозиуме «Диалектика и системный анализ», Москва, 13–16 сент. 1983 г.	1984
на общем годичном собрании АН СССР 26–28 марта 1959 г.	1959
на общем годичном собрании Отделения экономики АН СССР, 1 марта 1982 г.	1982
на общем годичном собрании Отделения экономики АН СССР, 1 марта 1983 г.	1983
на общем годичном собрании Отделения экономики АН СССР, 11 марта 1985 г.	1985
на общем собрании АН СССР, 3–5 февр. 1964 г.	1964
на общем собрании АН СССР в прениях по докладам о ценообразовании, 14 дек. 1965 г.	1966
на пленарном заседании Всесоюзного совещания актива организаций Госснаба СССР, 30 июня–1 июля 1969 г.]	1969
[на пленарном заседании Второй конференции по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством, Москва, 20–22 апр. 1983 г.]	1983
[на пленарном заседании сессии АН СССР по научным проблемам автоматизации производства]	1957

- на пленуме Научного совета АН СССР по комплексной проблеме «Оптимальное планирование и управление народным хозяйством»] 1982
- на сессии Междугосударственного научного совета по проблемам ценообразования 1976
1978
- на сессии «Методологические проблемы долгосрочного экономического прогнозирования» Научного совета АН СССР по комплексной проблеме «Совершенствование методов и показателей народно-хозяйственного планирования», НИЭИ при Госплане СССР и журнала «Плановое хозяйство», дек. 1966 г. 1967
- на сессии, посвященной проблемам дальнейшего совершенствования методологии и методов ценообразования на новую продукцию производственно-технического назначения 1978
- на Советско-венгерском симпозиуме по проблемам экономики транспорта, Москва, дек. 1983 г. 1984
- на совещании в Агентстве печати «Новости», март 1964 г. 1965
- на совещании в Институте экономики АН СССР по проблеме товарного производства и использования закона стоимости при социализме 1959
- на учебно-методической конференции «Развитие экономико-математических методов и их использование в подготовке специалистов по экономической кибернетике», Таллинн, 8–11 окт. 1980 г. 1981
- на Ученом совете университета Мартина Лютера в связи с присуждением степени почетного доктора 1989
- на Юбилейной сессии Междугосударственного научного совета по проблемам ценообразования Государственного комитета цен Совета Министров СССР и Академии наук СССР, посвященной 60-летию Великой Октябрьской социалистической революции 1978
- по докладам Н. П. Федоренко, И. Хэтени, А. Г. Аганбегяна, Э. Мэнсфилда и Х. Ожака на конференции, Москва, дек. 1972 г. 1975
- [по докладу К. Мотидзуки «Цена стоимости» и система разрешающих множителей Л. В. Канторовича на 11 Советско-японском симпозиуме ученых-экономистов, Москва, 28 нояб.–1 дек. 1977 г.] 1978

Генерирование столбцов в симплекс-методе	1985
Глеб Павлович Акилов (к пятидесятилетию со дня рождения)	1970
Глобальная оценка вклада науки и техники в экономику .	1979
Город в зоне землетрясения	1970
Григорий Михайлович Фихтенгольц (к 60-летию со дня рождения)	1948
Григорий Михайлович Фихтенгольц (к 70-летию со дня рождения)	1958
Григорий Михайлович Фихтенгольц (некролог)	1959
Григорий Яковлевич Лозановский (некролог)	1978
Дальнейшее развитие математических методов и перспек- тивы их применения в планировании и экономике ..	1959
Динамическая модель оптимального планирования	1964
	1967
Динамическая модель экономики	1967
Динамические модели научно-технического прогресса ...	1975
Динамический подход и третья компонента	1969
Дифференциальные и функциональные уравнения, возни- кающие в моделях экономической динамики	1970
Доклад на Научном совете АН СССР по комплексной проблеме «Единая транспортная система СССР» ...	1976
Достижения экономической науки — в практику	1974
Единая транспортная	1985
Еще об исчислении нормы эффективности на основе одно- продуктовой модели развития народного хозяйства	1970
Заключительное слово [на научном совещании о примене- нии математических методов в экономических иссле- дованиях и планировании, 4–8 апр. 1960 г.]	1961
Значение себестоимости в механизме хозяйствования ...	1977
Значение электронно-вычислительной техники в деле со- вершенствования ценообразования	1971
Значение электронно-вычислительной техники для совер- шенствования ценообразования	1974
И все же — хозрасчетная фирма изобретений	1976
Игр теория	1958
Избранные сочинения. Математико-экономические работы	2011
Исидор Павлович Натансон (к 50-летию со дня рождения)	1956

Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям	1942
Используя способности каждого	1968
Исправления к статье Л. В. Канторовича «Об интегральных операторах»	1956
Исследование операций	1962
К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах	1936
К общей теории полуупорядоченных пространств	2009
К общей теории приближенных методов анализа	1948
К проблеме моментов для конечного интервала	1937
К проблеме оптимизации взаимоотношения общества и природы	1976
К работе «Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений»	1976
К теории интегралов Стильтьеса — Римана	1939
Коли наука достигает doskonałości!	1964
Комплексный подход к реализации массовых вычислений	1974
Конформное отображение круга на односвязную область	1937
Краткий очерк научной, научно-организационной, педагогической и общественной деятельности академика С. Л. Соболева	1969
Линейное программирование	1958, 1959, 1971
Марк Александрович Красносельский (к шестидесятилетию со дня рождения)	1981
Математика в современной школе	1979
Математика в экономике	1967
Математика в экономике: достижения, трудности, перспективы	1965, 1976, 1977
Математика и экономика	1965
Математика и экономика — взаимопроникновение наук	1977
Математика нужна всем	1969
Математико-экономический анализ плановых решений	1970
Математико-экономический анализ плановых решений и экономические условия их реализации	1971
Математическая экономика	1982
Математические методы — в народное хозяйство	1969
Математические методы в решении хозяйственных задач	1966
	1967

Математические методы в управлении экономикой	1976 1980
Математические методы в экономике	1975, 1976
Математические методы и экономика	1982
Математические методы оптимальной загрузки прокатных станов	1966
Математические методы организации и планирования производства	1939, 1959
Математические методы — экономике	1975
Математические модели в проблемах ценообразования . . .	1981
Математические оптимальные модели в планировании развития отрасли и в технической политике	1966 1967
Математические проблемы оптимального планирования .	1965 1966
Математические проблемы расчета и анализа оптимальных динамических моделей	1965
Математические системы и моделирование	1983
Математическое оптимальное программирование в экономике	1968
Математическое программирование	1971
Методические основы отраслевой оптимизации	1980
[Методологические проблемы оценки эффективности принципиально новой техники]	1983
Методы оптимизации и математические модели экономики	1970
Методы приближенного решения уравнений в частных производных	1936
[Модели роста и их применение в долгосрочном планировании]	1973
Модели роста и их применение в долгосрочном планировании и прогнозировании	1975
Модели роста управляемой экономики	1970
Модель оптимальной замены оборудования в условиях стационарной неравномерной нагрузки	1966
Мой путь в науке	1938, 1987
Мысли и соображения по тарифам	1987
На основе математических методов	1965
Насущные проблемы транспорта	1978
Научно-технический прогресс и экономическая наука . . .	1977

Научно-технический прогресс — экономические проблемы	1985
Некоторые вопросы системного анализа взаимосвязей транспортного и топливно-энергетического комплексов .	1980
Некоторые вопросы совершенствования механизма взаимодействия транспорта с другими отраслями народного хозяйства	1987
Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона для функциональных уравнений	1957
Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант .	1951
Некоторые замечания о методе Рунге	1941
Некоторые исправления к моей статье «О конформном отображении»	1934
Некоторые предложения по совершенствованию методики формирования автомобильных грузовых тарифов (май 1985 г.)	1987
Некоторые соображения по расстановке минных полей в связи с подсчетом вероятностей поражения	1944
Некоторые теоремы о линейных функционалах	1934
Некоторые теоремы о полуупорядоченных пространствах общего вида	1936
Некоторые теоремы о сходимости почти везде	1937
Некоторые теоретические вопросы построения системы пассажирских тарифов	1969, 1987
Некоторые частные методы расширения пространства Гильберта	1935
Некоторые экономические проблемы реализации Продовольственной программы СССР	1984
Необходим высокий уровень экономического анализа	1980
Несколько замечаний о приближении к функциям посредством полиномов с целыми коэффициентами	1931
Новое исследование по теоретическим основам оптимального планирования	1974
О вкладе А. Г. Пинскера в теорию полуупорядоченных пространств и векторную оптимизацию	1986
О возможности повышения производительности универсальных ЦВМ при решении экономико-математических задач	1969
О дифференциальных уравнениях вида $x''=f(x)$	1949
О конформном отображении	1933
О конформном отображении многосвязных областей	1934

О конформном отображении областей	1936
О математической подготовке экономистов и инженеров-экономистов	1966, 1971
О математической символике, удобной при вычислении на машинах	1956
О математическом обеспечении АСУ «Металл»	1972
О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач	1957
О методе наискорейшего спуска	1947
О методе Ньютона	1949
О методе Ньютона для функциональных уравнений	1948
О направлениях совершенствования хозяйственного механизма на транспорте	1983
О некоторых дискуссионных проблемах оценки эффективности капитальных вложений на транспорте	1982
О некоторых классах линейных операций	1936
О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта ...	1939 1989
О некоторых методах построения функции, совершающей конформное отображение	1933
О некоторых методах приближенного решения уравнений в частных производных	1936
О некоторых направлениях исследований в математической экономике	1982
О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений	1962
О некоторых новых приемах вычислений на табуляторе, связанных с использованием двоичных разложений чисел	1948
О некоторых общих методах расширения пространства Гильберта	1935
О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна: I, II	1930
О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели	1959
О перемещении масс	1942, 2004
О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций	1935
О полуупорядоченных пространствах	1937

О последовательностях линейных операций	1937
О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей	1934
[О применении вычислительной машинной техники в экономике и планировании]	1961
О применении современных математических методов при определении экономической эффективности капитальных вложений	1958 1959
О проведении численных и аналитических вычислений на машинах с программным управлением	1957
О продолжении семейств линейных функционалов	1935
О проективных множествах	1930
О путях дальнейшего совершенствования ценообразования	1968
[О развитии и современных задачах экономико-математических методов]	1966
[О развитии математических методов решения экономических задач учеными Сибирского отделения АН СССР]	1962
[О результатах применения математических методов в экономике]	1983
О совершенствовании методики оценки народно-хозяйственной эффективности новой техники	1978
О состоянии и задачах экономической науки	1990
О сходимости вариационных процессов	1941
О сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям	1941
О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала	1931
О функциональных уравнениях	1937
О ценах, тарифах и эффективности экономики	1971
[Об актуальных проблемах применения математических методов в экономике]	1982
Об интегральных операторах	1956
Об использовании математических моделей в ценообразовании на новую технику	1968
Об использовании оптимизационных расчетов в АСУ народного хозяйства	1978

Об использовании оптимизационных расчетов в отраслях народного хозяйства	1978
Об исчислении нормы эффективности на базе однопродуктовой модели развития хозяйства	1967
Об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития хозяйства	1967
Об исчислении производственных затрат	1960
Об обобщенных производных непрерывных функций	1932
Об общих методах улучшения сходимости в способах приближенного решения граничных задач математической физики	1934
Об одной математической символической, удобной при проведении вычислений на машинах	1957
Об одной проблеме Монжа	1948
	2004
Об одной системе программирования	1958
Об одном классе функциональных уравнений	1936
Об одном методе последовательных приближений для решения интегральных уравнений	1948
Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных	1934
Об одном методе решения задач о минимуме квадратичных функционалов	1946
Об одном обобщении интеграла Стильтьеса	1934
Об одном подходе к расчету цен и рентных оценок земли в условиях сложившегося размещения сельского хозяйства	1974
Об одном пространстве вполне аддитивных функций	1958
Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах	1957
Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем	1940
Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала	1945
Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций	1949
Об оценке эффективности капитальных затрат	1970
Об улучшении использования изобретений в народном хозяйстве	1978
Об универсальных функциях	1929

Общие формы некоторых классов линейных операций	1936
Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла	1933
11 Международный симпозиум по математическому программированию	1983
Однопродуктовая динамическая модель при наличии мгновенной превращаемости фондов	1967
Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса	1973
Операций исследование	1958
	1959
Определенные интегралы и ряды Фурье	1940
Оптимально планиране: нерешены задачи	1976
Оптимальное планирование и экономические показатели	1960
	1961
Оптимальное планирование: нерешенные задачи	1974
Оптимальное чередование основного и модифицированного процессов Ньютона — Канторовича	1970
Оптимальные модели перспективного планирования	1965
Оптимальные решения в экономике	1972
Оптимизационные задачи в условиях автоматизированных систем управления	1983
Оптимизационные методы в текущем планировании	1980
Оптимизационные методы в экономике: результаты, трудности, перспективы	1977
Оптимизационные методы и автоматизированные системы управления в задачах совершенствования хозяйственного механизма	1987
Оптимизация потребления в непрерывной и дискретной моделях двухсекторной экономики	1983
Опыт оптимальной загрузки прокатных и трубных станов	1970
Опыт оптимальной загрузки прокатных и трубных станов заказами на металлопродукцию и связанные с ним выводы об организации оптовой торговли средствами производства	1969
Основные предложения по совершенствованию тарифов на железнодорожном транспорте	1987
Основные проблемы развития пассажирского транспорта крупных городов	1988

Основы теории функций вещественного переменного со значениями, принадлежащими полуупорядоченному линейному пространству	1936
От редакторов в кн.: Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве	1971
[Ответы на вопросы издательства «Экономика»]	1965
Памяти В. С. Немчинова	1965
Патенты:	
Digital arithmetic units	1973
Digital serial arithmetic unit	1973
Divisions — Vorrichtung für ein serielles Vier — Spezies — Rechenwerk	1979
Rechenwerk	1972
Первая работа по линейному программированию	1989
Перспективы крупноблочного подхода в прикладной математике, программировании и вычислительной технике	1974
Перспективы применения методов оптимального программирования в сельскохозяйственном производстве ..	1964
Перспективы работы в области автоматизации программирования на базе крупноблочной системы	1968
Перспективы развития и использования электронных счетных машин	1956
Пинскер А.Г.	1966
Планирование исследований, разработок и внедрения новой техники	1978
Плодотворность взаимопроникновения естественных и общественных наук	1973
Победы «электронных экономистов»	1962, 1964
Подбор поставок, обеспечивающий максимальный выпуск пилородукции при заданном ассортименте	1949
Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства	1951
[Поправки к статьям: «О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач» и «Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах»]	1958
Предисловия к кн.:	
Линейные неравенства и смежные вопросы	1959
Математика и кибернетика в экономике	1975

Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост. Многоотраслевой анализ	1972
Определение эффективности капитальных вложений на транспорте	1982
Пирогов Г. Г., Федоровский Ю. П. Проблемы структурного оценивания в эконометрии	1979
Работы по автоматическому программированию, численным методам и функциональному анализу	1962
Работы по приближенному анализу	1959
Функциональный анализ	1977, 1984 2004
Представление произвольной измеримой функции в виде предела последовательности полиномов	1934
Президенту США господину Дж. Картеру: [Обращение по поводу создания в США нейтрон. бомбы]	1978
Приближенное решение функциональных уравнений	1956
Приближенные и численные методы	1959
Приближенные методы	1948
Приближенные методы высшего анализа	1941, 1949 1950, 1952 1962
Приглашение к точности	1979
Применение теории интегралов Стилтеса к расчету балки, лежащей на упругом основании	1934
Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков	1949
[Применение математических методов в экономике]	1966
Применение одного метода приближенного решения уравнений в частных производных к решению задачи о кручении призматических стержней	1937
Принцип дифференциальной оптимизации в применении к однопродуктовой динамической модели экономики	1978
Принцип мажорант и метод Ньютона	1951
Принцип оптимальности [в плановом ценообразовании] ..	1965
Принципы методики определения целесообразной степени рассредоточения и сравнительной оценки различных мер повышения живучести	2001
Принципы формирования закупочных цен на сельскохозяйственную продукцию и возможные пути их исчисления	1980

Проблема человека	1979
[Проблематика математических методов в оптимальном планировании]	1963
Проблемы математической экономики	1961 1963
Проблемы развития внутригородского пассажирского транспорта	1984
Проблемы совершенствования системы внегородских пассажирских сообщений	1984
Проблемы совершенствования управления транспортной системой страны	1980
Проблемы эффективного использования и развития транспорта	1989
Прогресс и цены	1986
Пути использования математического моделирования и ЭВМ в планировании	1985
Пути использования математического моделирования и ЭВМ в планировании социалистической экономики .	1983
Пути применения математических методов в сельскохозяйственном производстве	1968
Пути развития вычислительных средств для решения больших задач оптимального планирования и управления	1972
Работу АСУ — на условия экономического эксперимента .	1985
Развитие математических методов экономического анализа	1966
Развитие математической экономики в Сибирском отделе-нии Академии наук СССР	1977
Разработка математического аппарата для задач эконо-мики	1977
«Разработка общетранспортной методикоопределения эф-фективности капитальных вложений	1981
Раскрытая задача	1984
Расчет рационального раскрытия промышленных материалов	1951
Рафаэль Арамович Александрян (к шестидесятилетию со дня рождения)	1984
Рациональное использование ресурсов и ценообразование	1977
Рациональные методы раскрытия металла	1942
Рациональный раскрой промышленных материалов	1971

Редактирование:

Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. А. Численные методы линейного программирования (Специальные задачи)	1977
Булавский В. А., Рубинштейн Г. Ш. Несколько лекций по линейному программированию	1965
Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве. Ч. 1-2	1971 1972
Зиядуллаев Н. С. Математические методы в системах управления региональной экономикой	1983
Использование методов оптимизации в текущем планировании и оперативном управлении производством .	1980
Линейные неравенства и смежные вопросы	1959
Математика	1958
Математика и кибернетика в экономике	1975
Математические модели и методы оптимального планирования	1966
Математические модели и статистический анализ научно-технического прогресса	1982
Математическое программирование	1966
Моделирование и анализ эффективности научно-технического прогресса	1978
Общие вопросы применения математики в экономике и планировании	1961
Определение эффективности капитальных вложений на транспорте	1982
Оптимальное планирование	1966
Оптимальные модели в системном анализе	1983
Оптимальные модели орошения	1968
Проблемы прогнозирования и оптимизации работы транспорта	1982
Проблемы развития систем городского пассажирского транспорта	1984
Пути совершенствования транспортного строительства	1987
Работы по автоматическому программированию, численными методами и функциональному анализу	1962
Работы по приближенному анализу	1959
Развитие системы пассажирских сообщений	1984
Развитие транспортного комплекса	1980

Сборник работ по приближенному анализу Ленинградского отделения (Мат. ин-та им. В. А. Стеклова) . . .	1949
Системное моделирование и оптимизационные методы в исследованиях научно-технического прогресса	1985
Совершенствование хозяйственного механизма на транспорте	1984
Теория, методология и практика системных исследований	1984
Фет Я. И. Массовая обработка информации в специализированных однородных процессорах	1976
Чернин К. Е. Таблицы для численного решения граничных задач, связанных с уравнением Пуассона	1962
Экономика и оптимизация	1990
Рефераты:	
Вулих Б. З. K -нормированные пространства	1940
Вулих Б. З. О метризации сходимостей в линейных пространствах	1940
Гавурин М. К построению дифференциального и интегрального исчисления в пространствах Banach'a	1939
Гавурин М. О k -кратко-линейных операциях в пространствах Banach'a	1939
Пинскер А. Г. Аналитическое представление некоторых частично-аддитивных функционалов	1938
Пинскер А. Г. О некоторых свойствах расширенных k -пространств	1939
Пинскер А. Г. О расширении полуупорядоченных пространств	1939
Пинскер А. Г. Об одном функционале в пространстве Hilbert'a	1938
Юдин А. Решение двух проблем теории полуупорядоченных пространств	1939
Явец М. А. Классификация Borel-Young'a элементов полуупорядоченных пространств	1938
Рецензии:	
Аганбегян А. Г., Албегов М. М., Казакевич Д. М. и др. Основные методические положения оптимизации развития и размещения производства	1978
Волконский В. А. Принципы оптимального планирования	1973
Лурье А. Л. Экономический анализ моделей планирования социалистического хозяйства	1973

Люстерник Л. А., Соболев В. И.	
Элементы функционального анализа	1952
Немьцкий В., Слудская М., Черкасов А.	
Курс математического анализа	1941
Эльсгольд Л. Э. Вариационное исчисление	1953
Роль транспортного фактора	
при размещении производства	1974
Роль ценового механизма в повышении эффективности на-	
родного хозяйства	1981
	1987
Рубинштейн Геннадий Соломонович (Шлёмович):	
К 50-летию со дня рождения	1973
Сейсмический риск и принципы сейсмического райониро-	
вания	1973
Сергей Львович Соболев	
(к шестидесятилетию со дня рождения)	1968
Сергей Львович Соболев	
(к семидесятилетию со дня рождения)	1979
Симплексный метод	1971
Системные идеи в математике	1983
Системный анализ и некоторые проблемы научно-техни-	
ческого прогресса	1986
Системный подход	1978
Системный подход в методологии математики	1983
«Смотреть на правду открытыми глазами!»	1987
Советские ученые в защиту Пелтиера: [Письмо президен-	
ту США Р. Рейгану]	1984
Современные проблемы математической экономики	1970
Современный математический аппарат управления эконо-	
микой	1972
Соломон Григорьевич Михлин	
(к семидесятилетию со дня рождения)	1978
Сопоставление моделей и оценка влияния сокращения ла-	
га строительства и лага НТП на динамику экономи-	
ческих показателей	1985
Социология и экономика	1968
Статистическая модель сейсмичности и оценка основных	
сейсмических эффектов	1970
Статистические вопросы оценки поверхностных эффек-	
тов, связанных с сейсмичностью	1971

Структура амортизационных отчислений при стационарной нагрузке машинного парка	1966
Сфера обслуживания и наука	1967
Счетные комбайны	1956
Сякай сюги кэйдзай то сигэн хайбун	1965
Таблицы для численного решения граничных задач теории гармонических функций.....	1956
Теория вероятностей	1946
Теория функций вещественной переменной и функциональный анализ.....	1938
Транспорт в системе народного хозяйства	1980
Транспорт и народное хозяйство.....	1978
Транспорт и экономика.....	1986
Транспортный фактор и тарифы в снижении ресурсоемкости и рациональном размещении производства ...	1982 1987
Укрупненный расчет вклада науки и техники в национальный доход СССР	1978
Управляющие параметры в экономической системе	1971
Условие оптимального планирования.....	1963
Ученый, педагог, практик (к 50-летию со дня рождения Г. С. Рубинштейна) ..	1973
Формулы вторгаются в жизнь	1960
Фундаментальная идея оптимизации	1987
Функции воспитания научного мышления курса математики во втузе	1974
Функциональный анализ	1977, 1984, 2004
Функциональный анализ (основные идеи)	1987
Функциональный анализ в нормированных пространствах	1959 1967
Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах	1950, 1958, 1960
Функциональный анализ и вычислительная математика .	1956
Функциональный анализ и прикладная математика	1948
Цена времени	1969
Ценообразование и технический прогресс	1979
[Цена и экономическая оценка ресурсов]	1981
Цены и эффективность производства	1984

Шире использовать оптимизационные методы в народном хозяйстве	1986
Экономика и современные средства управления в решении задачи совершенствования советской торговли 1981,	1982
Экономика и транспорт	1977
Экономическая эффективность совершенствования планирования и управления свеклосахарного производства с использованием экономико-математических методов и ЭВМ	1978
Экономические проблемы научно-технического прогресса	1974
Экономические проблемы ускорения научно-технического прогресса	1984
Экономический механизм управления транспортом	1980
Экономический расчет наилучшего использования ресурсов	1959
	1960
Экстремальные состояния и экстремальные управления ..	1967
Эффективные методы в теории конформных отображений	1937
Analisi funzionale	1980
Analyse fonctionnelle. T. 1, 2	1981
Aron Grigor'evich Pinsker (obituary)	1986
The application of linear programming algorithms to some large scale problems	1985
Approximate methods of higher analysis	1958
	1964
Approximate solution of functional equations	1958
Aron Grigor'evich Pinsker (on his sixtieth birthday)	1966
Asymptotic optimization of consumption in a model of two-sector economy	1983
Az árák és a termelés hatékonysága	1983
La asignación óptima de los recursos económicos	1968
[Autobiography]	1976
Boris Zakharovich Vulikh (obituary)	1979
Boris Zakharovich Vulikh (on the occasion of his fiftieth birthday)	1963
The best use of economic resources	1965
Calcul économique et utilisation des ressources	1963

Calculul economic al folosirii optime a resurselor	1966
Complexe vraagstukken	1977
Concerning prices, rates, and economic effectiveness	1976
Control parameters in an economic system	1972
Croirea economică a materialelor în industrie	1972
Depreciation charges and estimation of the effectiveness of new technology in a system of optimal planning	1976
The development of mathematical economics at the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences	1978
Differential and functional equations arising in dynamic models of economy	1970
A dynamic model of the economy	1976
A dynamic model of optimum planning	1976
Dynamic models of scientific-technical progress	1976
Dynamic models of technological changes	1975
Economic problems of scientific and technical progress	1976
	2009
Economic problems of scientific-technical progress.....	1976
The economics of earthquake prediction	1984
Ein dynamisches Modell der optimalen Planung	1964
Ekonomski račun optimalnog korištenja resursa	1985
Electronic computing machines	1963
	1999
Die Entwicklung von Optimierungsmethoden in der UdSSR .	1985
Essays in optimal planning	1976, 1977
Estimating the effectiveness of capital expenditures	1976
Évaluation de l'efficacité d'investissements de capitaux	1972
Un exemple d'une fonction semicontinue universelle pour les fonctions continues	1932
Extremal states and extremal controls	1967
A felsőbb analízis közéleti módszerei	1953
A few words on application of optimization methods to eco- nomic problems	1980
Les formes générales des opérations linéaires qui transforment quelques espaces classiques dans un espace semi-ordonné linéaire arbitraire	1936
Let us apply the achievements of economic science	1976
Functional analysis	1982
Functional analysis and applied mathematics.....	1952

Functional analysis (basic ideas)	1987
Functional analysis in normed spaces	1964
Funktionalanalysis in normierten Räumen	1964
Further development of mathematical methods and the prospects of their application in economic planning ..	1964, 2009
Grigorii Yakovlevich Lozanovskii (obituary)	1978
Growth models and their application to long-term planning and forecasting	1976
Honorary doctorate lecture	2004
La représentation explicite d'une fonction mesurable arbitraire dans la forme de la limite d'une suite de polynômes	1934
Linear operations in semi-ordered spaces	1940
Linéaire halbgeordnete Räume	1937
Las matemáticas en la economía: logros, dificultades, perspectivas	1978
Mark Aleksandrovich Krasnosel'skii (on his sixtieth birthday)	1981
Matematiniāl metodai ir ekonomika	1981
Mathematical-economic modelling of scientific and technical progress	1980
Mathematical economics and optimal planning	1969
Mathematical methods in economics	1976
Mathematical methods of organizing and planning production	1960 2009
Mathematical methods of production planning and organization	1964
Mathematics and economics	1965
Mathematics in economics: Achievements, difficulties, perspectives	1976, 1989 2004, 2009
Memoir on the analytical operations and projective sets. I, II	1932 1933
My journey in science	1987, 1990
The method of successive approximations for functional equations	1939
Metode de aproximație ale analizei superioare	1956
Methods of optimization and mathematical models in economics	1970
Un modello dinamico di pianificazione ottimale	1965

A modern mathematical system of economic management . . .	1976
Näherungsmethoden der höheren Analysis	1956
O výpočte normy efekt'ivnosti na základe jednodukčného modelu rozvoja hospodárstva	1970
Ökonomisch-mathematische Methoden: Zum Stand der Anwendung in der UdSSR und in der DDR	1978
On the calculation of the norm of effectiveness on the basis of a one-product model of the development of the economy	1976
On the calculation of production inputs	1960
On the translocation of masses	1958, 2009
On mass transportation	2006
Once again on calculating the norm of effectiveness on the basis of a one-product national economic development model	1976
A one-product dynamic model of the economy taking into account the change in the structure of capital under technological progress	1976
A one-product dynamic model with instantaneous transformation of capital	1976
On a problem of Monge	2006
Optimal mathematical models in planning the development of a branch and in technical policy	1968
Optimal planning: unresolved problems	1976
Optimal utilization of rolling and pipe mills	1976
Optimālne decyzie ekonomiczne	1976
Optimālne rozhodnutie v ekonomike	1977
Optimālne využitie zdrojov	1969
Partially ordered groups and partially ordered linear spaces .	1963
Pianificazione ottimale e sviluppo economico	1984
Planning, mathematics and economics	1982
[Plenarvortrag auf der VII: Internationale Tagung über Ergebnisse der ökonomischen Informationsverarbeitung] . . .	1977
Der Preis der Zeit	1970
The price of time	1970
Prices and production efficiency	1984
Principle of differential optimization applied to a single-product dynamical model of an economic structure	1978
Problems of application of optimization methods in industry	1976
Putting the achievements of economic science into practice . .	1975

Rachunek ekonomiczny optymalnego wykorzystania zasobów	1961
Rafael' Aramovich Aleksandryan (on his sixtieth birthday)	1984
The role of the transport factor in the location of production	1974
Scientific-technical progress: Economic problems	1986
Selected works. Parts 1 and 2	1996
Sergei L'vovich Sobolev (on his sixtieth birthday)	1968
Sergei L'vovich Sobolev (on his seventieth birthday)	1978
A single-product dynamical model with instantaneous convertibility of funds	1967
Solomon Grigor'evich Mikhlin (on his seventieth birthday)	1978
Some functional relations which arise in analysis of a one-product economic model	1976
Some research directions in mathematical economics	1984
A statistical model of seismicity and an estimate of the basic seismic effects	1970
Sur deux classes des opérations sur les ensembles fermés	1932
Sur la continuité et sur le prolongement des opérations linéaires	1938
Sur la représentation des opérations linéaires	1937
Sur le théorème de M. Vitali	1929
Sur les ensembles projectifs de la deuxième classe	1929
Sur les ensembles projectifs de M. Luzin	1930
Sur les fonctionnelles partiellement additives dans les espaces semiordonnés	1938
Sur les fonctions du type (A)	1930
Sur les formes générales des fonctionnelles partiellement additives dans certains espaces semiordonnés	1939
Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées	1934
Sur les δ -fonctions de M. Hausdorff	1930
Sur les propriétés des espaces semi-ordonnés lineaires	1936
Sur les suites des fonctions presque partout continues	1930
Sur les suites des fonctions rentrant dans la classification de M. W. H. Young	1929
Sur quelques théorèmes concernant la théorie des ensembles projectifs	1937

Sur un espace des fonction à variation borneé et la différen- tiation d'une série terme à terme	1935
Sur un problème de M. Steinhaus	1929
Sur un théorème de M. N. Dunford	1938
Tables for the numerical solution of boundary value prob- lems of the theory of harmonic functions	1964
Theoretical aspects of policy studies	1976
Toward the wider use of optimizing methods in the national economy	1987
Trends of development in automatic programming based on large-block systems	1968
Über die Vollständigkeit eines Systems von Funktionen, die von einem stetigen Parameter abhängen	1935
Vladimir Ivanovich Sobolev (on his sixtieth birthday)	1974
Vladimir Ivanovich Sobolev (on his seventieth birthday)	1984
Ways to develop computing means for solving large optimal planning and control problems	1976
Zur allgemeinen Theorie der halbgeordneten Räume	2009
Zur Nutzung von Optimierungsrechnungen in automatisier- ten Leitungssystemen durch die Volkswirtschaftszweige der UdSSR	1981

Содержание

Вехи жизни Л. В. Канторовича.....	3
Функциональный анализ (основные идеи).....	5
Математика и экономика	
в наследии Л. В. Канторовича.....	25
Mathematics and Economics	
in the Legacy of L. V. Kantorovich.....	43
Обзор научных трудов Л. В. Канторовича....	60
Основная литература о жизни и трудах	
Л. В. Канторовича.....	90
Хронологический указатель трудов.....	98
Указатель основных соавторов.....	176
Алфавитный указатель трудов.....	178

Леонид Витальевич Канторович

(1912–1986)

Биобиблиографический указатель

Научный редактор С. С. Кутателадзе

Редактор издательства И. И. Кожанова

Подписано в печать 25.10.11. Формат 70x100 1/32. Усл. печ. л. 8,5.
Уч.-изд. л. 7,5. Тираж 300 экз. Заказ № 163.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
пр. Академика Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск