УДК 51(470):517.982.4

ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ: ИСТОКИ И ЗНАЧЕНИЕ

С. С. Кутателадзе

Теория обобщённых функций была открыта в 1935 г. Сергеем Львовичем Соболевым (1908–1989). В 1945 г. к аналогичным идеям независимо пришел Лоран Шварц (1915–2005), который синтезировал все имеющие подходы, предложил мощные и элегантные усовершенствования и упрощения. С 1950 г. под влиянием работ Шварца в науке установился термин «теория распределений».

Доклад посвящен некоторым истокам и перспективам теории распределений. Схематично изложены основы техники преобразования Фурье обобщённых функций в объёме, необходимом для доказательства теоремы Эренпрайса — Мальгранжа элементарным методом Н. Ортнера и П. Вагнера.

1. Пространства основных и обобщённых функций

1.1. Определение. *Основной* или *пробной* называют финитную гладкую функцию $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{F}$. При этом пишут $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) := \mathscr{D}(\mathbb{R}^N,\ \mathbb{F})$. Для $Q \Subset \mathbb{R}^N$ и $\Omega \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$ полагают $\mathscr{D}(Q) := \bigl\{f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) :\ \operatorname{supp}(f) \subset Q\bigr\}$ и $\mathscr{D}(\Omega) := \cup\{\mathscr{D}(Q) :\ Q \Subset \Omega\}$.

1.2. Справедливы утверждения:

(1) $\mathscr{D}(Q) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{int} Q = \varnothing$;

(2) пусть $Q \Subset \mathbb{R}^N$ и

$$\|f\|_{n,Q} := \sum_{|\alpha|\le n} \|\partial^\alpha f\|_{C(Q)} :=$$
$$:= \sum_{\alpha\in(\mathbb{Z}_+)^N;\alpha_1+\ldots+\alpha_N\le n} \sup|(\partial^{\alpha_1}\ldots\partial^{\alpha_n} f)(Q)|$$

для гладкой (в окрестности Q) функции f (как обычно, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$). Мультинорма $\mathfrak{M}_Q := \{\|\cdot\|_{n,Q} :\ n \in \mathbb{N}\}$ превращает $\mathscr{D}(Q)$ в пространство Фреше;

(3) пространство гладких функций $C_\infty(\Omega) := \mathscr{E}(\Omega)$ на $\Omega \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$ с мультинормой $\mathfrak{M}_\Omega := \{\|\cdot\|_{n,Q} :\ n \in \mathbb{N},\ Q \Subset \Omega\}$ — пространство Фреше. При этом $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в $C_\infty(\Omega)$;

(4) пусть $Q_1 \Subset \mathbb{R}^N$, $Q_2 \Subset \mathbb{R}^M$ и $Q \Subset Q_1 \times Q_2$. Линейная оболочка в $\mathscr{D}(Q)$ следов на Q функций вида $f_1 f_2(q_1,\ q_2) := f_1 \otimes f_2(q_1,\ q_2) := f_1(q_1) f_2(q_2)$, где $q_k \in Q_k$, $f_k \in \mathscr{D}(Q_k)$, плотна в $\mathscr{D}(Q)$;

(5) отображение $E \in \operatorname{Op}(\Omega) \mapsto \mathscr{D}(E) \in \operatorname{Lat}(\mathscr{D}(\Omega))$ сохраняет точные верхние границы:

$$\begin{gathered}\mathscr{D}(E' \cap E'') = \mathscr{D}(E') \cap \mathscr{D}(E''),\\ \mathscr{D}(E' \cup E'') = \mathscr{D}(E') + \mathscr{D}(E'');\\ \mathscr{D}(\cup\mathscr{E}) = \mathscr{L}(\cup\{\mathscr{D}(E) :\ E \in \mathscr{E}\}) \quad (\mathscr{E} \subset \operatorname{Op}(\Omega)).\end{gathered}$$

При этом точной является следующая последовательность:

$$0 \to \mathscr{D}(E' \cap E'') \xrightarrow{\iota_{(E',E'')}} \mathscr{D}(E') \times \mathscr{D}(E'') \xrightarrow{\sigma_{(E',E'')}} \mathscr{D}(E' \cup E'') \to 0.$$

1.3. Функционал $u \in \mathscr{D}(\Omega,\ \mathbb{F})^\#$ называют *обобщённой функцией* или *распределением* (иногда добавляют ссылку на природу поля $\mathbb{F}$) и пишут $u \in \mathscr{D}'(\Omega) := \mathscr{D}'(\Omega,\ \mathbb{F})$, если $u\,|_{\mathscr{D}(Q)} \in \mathscr{D}'(Q) := \mathscr{D}'$, как только $Q \Subset \Omega$. Используют обычные обозначения $\langle u,\ f\rangle := \langle f\,|\,u\rangle := u(f)$, а иногда и наиболее выразительный единый символ

$$\int f(x)u(x)\,dx := u(f) \quad (f \in \mathscr{D}(\Omega)).$$

1.4. Примеры.

(1) Пусть $g \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ — некоторая локально интегрируемая функция. Тогда отображение

$$u_g(f) := \int f(x)g(x)\,dx \quad (f \in \mathscr{D}(\Omega))$$

задаёт распределение u_g. Обобщённые функции такого вида называют *регулярными*. Для обозначения регулярной обобщённой функции u_g используют более удобный символ g. В этой связи, в частности, пишут: $\mathscr{D}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ и $u_g = |\,g\rangle$.

(2) Каждая мера Радона — распределение. Всякое *положительное распределение* u (т. е. такое, что $f \geq 0 \Rightarrow u(f) \geq 0$) задано положительной мерой.

(3) Говорят, что распределение u *обладает порядком не выше* m, если для любого $Q \Subset \mathbb{R}^N$ существует число t_Q такое, что

$$|u(f)| \le t_Q \|f\|_{m,Q} \quad (f \in \mathscr{D}(Q)).$$

Естественным образом вводят понятия *порядка распределения* и *распределения конечного порядка*. Разумеется, не каждое распределение обязано иметь конечный порядок.

(4) Пусть α — мультииндекс: $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N$ и u — распределение: $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Для $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ полагают $(\partial^\alpha u)(f) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha f)$. Возникающее распределение $\partial^\alpha u$ называют *производной* u (порядка α). Говорят также об *обобщённом дифференцировании*, о *производных в смысле теории распределения* и т. п., применяя обычные символы.

Производная (ненулевого порядка) меры Дирака — это не мера. В то же время $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ служит производной *функции Хевисайда* $\delta^{(-1)} := H$, где $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция $\mathbb{R}_+$. Если производная (регулярной) обобщённой функции u — регулярное распределение u_g, то g называют *производной u в смысле Соболева.* Для основной функции такая производная совпадает с обычной.

(5) Для $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ полагают $\bar{u}(f) := \overline{u(\bar{f})}$. Возникающее распределение $\bar{u}$ называют *(эрмитово) сопряжённым к* u. Наличие инволюции $\bar{\ }$ позволяет, как обычно, говорить о *вещественных распределениях* и о порождении с их помощью *комплексных обобщённых функций.*

(6) Пусть $E \in \mathrm{Op}\,(\Omega)$ и $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Для $f \in \mathscr{D}(E)$, очевидно, определён скаляр $u(f)$. Тем самым возникает распределение $u_E \in \mathscr{D}'(E)$, называемое *сужением u на E*. Очевидно, что функтор $\mathscr{D}'$ — это предпучок.

При $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ и $E \in \mathrm{Op}\,(\Omega)$ говорят, что в E *нет* u, если $u_E = 0$.

В силу 1.2 (5), распределения u нет и в объединении тех открытых подмножеств в Ω, в которых u отсутствует. Дополнение (до $\mathbb{R}^N$) наибольшего открытого множества, в котором нет u, называют *носителем* u и обозначают $\mathrm{supp}(u)$. Отметим, что $\mathrm{supp}(\partial^\alpha u) \subset \mathrm{supp}(u)$. Кроме того, распределение с компактным носителем имеет конечный порядок.

(7) Пусть $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ и $f \in C_\infty(\Omega)$. Для $g \in \mathscr{D}(\Omega)$ будет $fg \in \mathscr{D}(\Omega)$. Полагают $(fu)(g) := u(fg)$. Возникающее распределение fu называют *произведением f на u*. Пусть теперь $\mathrm{Tr}\,(\Omega)$ — направление срезывателей. Если существует предел $\lim_{\psi \in \mathrm{Tr}\,(\Omega)} u(f\psi)$, то говорят, что u *применимо к функции* f. Ясно, что распределение u с компактным носителем применимо к любой функции из $C_\infty(\Omega)$. При этом $u \in \mathscr{E}'(\Omega) := C_\infty(\Omega)'$. В свою очередь, каждый элемент $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, очевидно, однозначно определяет распределение $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ с компактным носителем.

Если $f \in C_\infty(\Omega)$ и $\partial^\alpha f\big|_{\operatorname{supp}(u)} = 0$ при всех α, для которых $|\alpha| \le m$, где u — распределение с компактным носителем порядка не выше m, то, как можно удостовериться, $u(f) = 0$. В частности, отсюда следует, что точечный носитель имеют только линейные комбинации меры Дирака и её производных.

(8) Пусть $\Omega_1, \Omega_2 \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$ и $u_k \in \mathscr{D}'(\Omega_k)$. На произведении $\Omega_1 \times \Omega_2$ существует, и притом единственное, распределение u такое, что для $f_k \in \mathscr{D}(\Omega_k)$ выполнено $u(f_1 f_2) = u_1(f_1) u_2(f_2)$. Это распределение обозначают $u_1 \times u_2$ или же $u_1 \otimes u_2$. Теперь мы видим, что для $f \in \mathscr{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ значение $u(f)$ можно найти последовательным применением u_1 и u_2. Точнее говоря,

$$u(f) = u_2(y \in \Omega_2 \mapsto u_1(f(\cdot,\ y))) =$$
$$= u_1(x \in \Omega_1 \mapsto u_2(f(x,\ \cdot))).$$

В более образных обозначениях имеем *теорему Фубини для распределений*:

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,\ y)(u_1 \times u_2)(x,\ y)\, dxdy =$$
$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,\ y) u_1(x)\, dx \right) u_2(y)\, dy =$$
$$= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,\ y) u_2(y)\, dy \right) u_1(x)\, dx.$$

Полезно отметить, что

$$\operatorname{supp}(u_1 \times u_2) = \operatorname{supp}(u_1) \times \operatorname{supp}(u_2).$$

(9) Пусть $u,\ v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$. Для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ положим $\overset{+}{\to} f := f \circ +$. Ясно, что $\overset{+}{\to} f \in C_\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Говорят, что распределения u и v *свёртываемы*, *конволютивны* или *сворачиваемы*, если *произведение* $u \times v$ применимо к любой функции $\overset{+}{\to} f \subset C_\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$. Легко видеть, что возникающий линейный функционал $f \mapsto (u \times v)(\overset{+}{\to} f)$ $(f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N))$ является распределением.

Его называют *свёрткой u и v* и обозначают $u * v$. Свёртки функций и мер на $\mathbb{R}^N$ представляют естественные частные случаи свёртки распределений. В некоторых множествах любая пара распределений сворачиваема. Например, *пространство $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^N)$ распределений с компактными носителями* с операцией свёртки в качестве умножения представляет собой (ассоциативную, коммутативную) алгебру с единицей — дельта-функцией δ. При этом $\partial^\alpha u = \partial^\alpha \delta * u$, $\partial^\alpha(u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v$. Кроме того, имеет место *теорема Лионса о носителях*:

$$\operatorname{co}(\operatorname{supp}(u * v)) = \operatorname{co}(\operatorname{supp}(u)) + \operatorname{co}(\operatorname{supp}(v)).$$

Подчеркнём, что попарная сворачиваемость распределений не обеспечивает, вообще говоря, ассоциативности свёртки ($(\mathbf{1} * \delta') * \delta^{(-1)} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{1} * (\delta' * \delta^{(-1)}) = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1} := \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$).

Каждое распределение u сворачиваемо с основной функцией f до регулярного распределения $(u * f)(x) = u(\tau_x(f\tilde{}))$, где $f\tilde{} := \widetilde{f}$ — *отражение* f, т. е. $f\tilde{}(x) := f(-x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$. Оператор $u* : f \mapsto u * f$ действует из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ в $C_\infty(\mathbb{R}^N)$, непрерывен и перестановочен со сдвигами: $(u*)\tau_x = \tau_x u*$ для $x \in \mathbb{R}^N$. Легко видеть, что названные свойства характеристические, т. е. если оператор T из $\mathscr{L}(\mathscr{D}(\mathbb{R}^N),\ C_\infty(\mathbb{R}^N))$ непрерывен и перестановочен со сдвигами, то существует, и притом единственное, распределение u такое, что $T = u*$ — именно $u(f) := (T'\delta)(\widetilde{f})$ для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$.

(10) Пусть f и g — локально суммируемые функции, определенные в открытом подмножестве Ω пространства $\mathbb{R}^n$, а α — некоторый мультииндекс. Функция g называется *обобщённой производной* функции f в смысле С. Л. Соболева или *слабой производной* порядка α и обозначается $D^\alpha f$, если для всякой пробной функции φ, т. е. такой что носитель φ компактен и лежит в Ω и φ непрерывно дифференцируема $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ раз в Ω, выполняется равенство

$$\int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x)\varphi(x)\, dx,$$

где $D^\alpha \varphi$ — классическая производная φ порядка α.

Подобное определение С. Л. Соболев предложил в 1935 г., став родоначальником теории распределений.

Векторное пространство W_p^l, составленное из (классов эквивалентных) локально суммируемых функций f на Ω, имеющих в Ω

все обобщённые производные $D^\alpha f$, при $|\alpha| \le l$ суммируемые в степени p, где $p \ge 1$, становится банаховым пространством относительно следующей нормы:

$$\|f\|_{W_p^l} = \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{1/p} + \sum\nolimits_{|\alpha|=l}\left(\int_\Omega |D^\alpha f|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Такого рода объекты вошли в математический тезаурус как *пространства Соболева.*

1.5. Пространства $\mathscr{D}(\Omega)$ и $\mathscr{D}'(\Omega)$ считают приведёнными в двойственность (индуцированную двойственностью $\mathscr{D}(\Omega) \leftrightarrow \mathscr{D}(\Omega)^\#$). При этом пространство $\mathscr{D}'(\Omega)$ наделяют *топологией пространства распределений* — $\sigma(\mathscr{D}'(\Omega),\ \mathscr{D}(\Omega))$, а $\mathscr{D}(\Omega)$ — *топологией пространства основных функций* — топологией Макки $\tau_{\mathscr{D}} := \tau_{\mathscr{D}(\Omega)} := \tau(\mathscr{D}(\Omega),\ \mathscr{D}'(\Omega))$.

1.6. Пусть $\Omega \in \mathrm{Op}\,(\mathbb{R}^N)$. Тогда

(1) топология $\tau_{\mathscr{D}}$ — сильнейшая из таких локально выпуклых топологий, что вложение $\mathscr{D}(Q)$ в $\mathscr{D}(\Omega)$ непрерывно при $Q \Subset \Omega$ (т. е. $\tau_{\mathscr{D}}$ — топология индуктивного предела);

(2) множество A в $\mathscr{D}(\Omega)$ ограничено в том и только в том случае, если для некоторого $Q \Subset \Omega$ множество A попадает в $\mathscr{D}(Q)$ и ограничено в $\mathscr{D}(Q)$;

(3) последовательность (f_n) сходится к f в $(\mathscr{D}(\Omega),\ \tau_{\mathscr{D}})$ в том и только в том случае, если имеется компакт $Q \Subset \Omega$ такой, что $\mathrm{supp}(f_n) \subset Q$, $\mathrm{supp}(f) \subset Q$ и $(\partial^\alpha f_n)$ равномерно на Q сходится к $\partial^\alpha f$ для всех мультииндексов α (символически: $f_n \twoheadrightarrow f$);

(4) оператор $T \in \mathscr{L}(\mathscr{D}(\Omega),\ Y)$, где Y — локально выпуклое пространство, непрерывен в том и только в том случае, если $Tf_n \to 0$, как только $f_n \twoheadrightarrow 0$;

(5) каждая дельтообразная последовательность (b_n) служит (свёрточной) аппроксимативной единицей как в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, так и в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, т. е. для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ и $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ верно: $b_n * f \twoheadrightarrow f$ (в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$) и $b_n * u \to u$ (в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$).

1.7. В связи с 1.6 (3) для $\Omega \in \mathrm{Op}\,(\mathbb{R}^N)$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ часто выделяют пространство $\mathscr{D}^{(m)}(\Omega) := C_0^{(m)}(\Omega)$, составленное из финитных функций f, все производные которых $\partial^\alpha f$ при $|\alpha| \le m$ непрерывны. Пространство $\mathscr{D}^{(m)}(Q) := \{f \in \mathscr{D}^{(m)}(\Omega) :\ \mathrm{supp}(f) \subset Q\}$ для $Q \Subset \Omega$ снабжают нормой $\|\cdot\|_{m,Q}$, превращая его в банахово. При этом

$\mathscr{D}^{(m)}(\Omega)$ наделяют топологией индуктивного предела. Таким образом, $\mathscr{D}^{(0)}(\Omega) = K(\Omega)$ и $\mathscr{D}(\Omega) = \cap_{m\in\mathbb{N}}\mathscr{D}^{(m)}(\Omega)$. Сходимость в $\mathscr{D}^{(m)}(\Omega)$ последовательности (f_n) к нулю означает равномерную сходимость с производными до порядка m на $Q \Subset \Omega$, где $\operatorname{supp}(f_n) \subset Q$ для всех достаточно больших n. Подчеркнём, что $\mathscr{D}^{(m)}(\Omega)'$ составлено *распределениями порядка не выше* m. Соответственно

$$\mathscr{D}'_F(\Omega) := \bigcup\nolimits_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{D}^{(m)}(\Omega)'$$

— *пространство всех обобщённых функций, имеющих конечный порядок.*

1.8. Пусть $\Omega \in \operatorname{Op}(\mathbb{R}^N)$. Тогда

(1) пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ бочечно, т. е. каждое абсолютно выпуклое замкнутое поглощающее множество (= бочка) в нём — окрестность нуля;

(2) любое ограниченное замкнутое подмножество $\mathscr{D}(\Omega)$ компактно, т. е. $\mathscr{D}(\Omega)$ — монтелево пространство;

(3) всякое абсолютно выпуклое множество в $\mathscr{D}(\Omega)$, поглощающее каждое ограниченное множество, является окрестностью нуля, т. е. $\mathscr{D}(\Omega)$ — борнологическое пространство;

(4) основные функции плотны в пространстве обобщённых функций.

1.9. Теорема Шварца. *Пусть $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность распределений и для каждого $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ имеется сумма $u(f) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(f)$. Тогда u — распределение, причём $\partial^\alpha u = \sum_{k=1}^{\infty} \partial^\alpha u_k$ для всякого мультииндекса α.*

1.10. Функтор $\mathscr{D}'$ — пучок.

Констатируемая возможность задания распределения локальными данными, т. е. *принцип локализации для обобщённых функций*, допускает уточнение ввиду паракомпактности $\mathbb{R}^N$. Именно, если $\mathscr{E}$ — открытое покрытие Ω и $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ — распределение с локальными данными $(u_E)_{E\in\mathscr{E}}$, то можно взять подчиненное $\mathscr{E}$ счётное (локально конечное) разбиение единицы $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Видно, что $u = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k u_k$, где $u_k := u_{E_k}$ и $\operatorname{supp}(\psi_k u_k) \subset E_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

1.11. Обобщённая функция u на Ω порядка не выше m допускает представление в виде суммы производных мер Радона: $u = \sum_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha \mu_\alpha$, где $\mu_\alpha \in \mathscr{M}(\Omega)$.

Приведенный факт часто называют *теоремой об общем виде распределений.* Она допускает разнообразные обобщения и уточнения.

Например, можно убедиться, что мера Радона с компактным носителем служит обобщённой производной (подходящего порядка) некоторой непрерывной функции, что позволяет локально рассматривать любую обобщённую функцию как результат обобщённого дифференцирования обычной функции.

2. Преобразование Фурье умеренных распределений

2.1 Пусть χ — ненулевой функционал, заданный на пространстве $L_1(\mathbb{R}^N) := L_1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Эквивалентны утверждения:

(1) χ — характер групповой алгебры $(L_1(\mathbb{R}^N), *)$, т. е. $\chi \neq 0$, $\chi \in L_1(\mathbb{R}^N)'$ и

$$\chi(f * g) = \chi(f)\chi(g) \quad (f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N))$$

(символически: $\chi \in \mathrm{X}(L_1(\mathbb{R}^N))$;

(2) существует, и притом единственный, вектор $t \in \mathbb{R}^N$ такой, что для каждого $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ выполнено

$$\chi(f) = \widehat{f}(t) := (f * e_t)(0) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{i(x,t)}\, dx.$$

2.2. Те же обстоятельства наблюдаются для любой локально компактной абелевой группы G. Характеры групповой алгебры из $\mathrm{X}(L_1(G))$ однозначно связаны с *(унитарными) групповыми характерами* G, т. е. с непрерывными отображениями $\psi : G \to \mathbb{C}$, для которых

$$|\psi(x)| = 1, \quad \psi(x+y) = \psi(x)\psi(y) \quad (x,\ y \in G).$$

Относительно поточечного умножения множество $\widehat{G} := \mathrm{X}(G)$ таких характеров представляет коммутативную группу. Поскольку по теореме Алаоглу — Бурбаки $\mathrm{X}(L_1(G))$ локально компактно в слабой топологии $\sigma((L_1(G))',\ L_1(G))$, то $\widehat{G}$ можно рассматривать как локально компактную абелеву группу. Её называют *группой характеров* G или *двойственной к* G *группой.* Каждый элемент $q \in G$ определяет характер $\widehat{\widehat{q}} : \widehat{q} \in \widehat{G} \mapsto \widehat{q}(q) \in \mathbb{C}$ двойственной группы $\widehat{G}$. Возникающее вложение G в $\widehat{\widehat{G}}$ — изоморфизм локально компактных абелевых групп G и $\widehat{\widehat{G}}$ — *теорема двойственности Понтрягина — ван Кампена.*

2.3. Для функции $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ отображение $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, определённое правилом

$$\widehat{f}(t) := f\widehat{\ }(t) := (f * e_t)(0),$$

называют *преобразованием Фурье* f.

Термин «преобразование Фурье» трактуют расширительно, допуская удобную вольностью. Во-первых, его сохраняют как для оператора $\mathscr{F} : L_1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}^N}$, действующего по правилу $\mathscr{F} f := \widehat{f}$, так и для модификаций этого оператора. Во-вторых, преобразование $\mathscr{F}$ отождествляют с оператором $\mathscr{F}_\theta f := \widehat{f} \circ \theta$, где θ — *автоморфизм* (= *изоморфизм на себя*) $\mathbb{R}^N$. Особенно часто используют функции: $\theta(x) := {}_\sim(x) := -x$, $\theta(x) := {}_{2\pi}(x) := 2\pi x$ и $\theta(x) := {}_{-2\pi}(x) := -2\pi x$ $(x \in \mathbb{R}^N)$. Иными словами, преобразование Фурье вводят одной из следующих формул:

$$\mathscr{F}_\sim f(t) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i(x,t)}\, dx,$$

$$\mathscr{F}_{2\pi} f(t) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{2\pi i(x,t)}\, dx,$$

$$\mathscr{F}_{-2\pi} f(t) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-2\pi i(x,t)}\, dx.$$

Поскольку группы характеров изоморфных групп изоморфны, есть основания, допуская вольность, применять единое обозначение $\widehat{f}$ для, вообще говоря, различных функций $\mathscr{F} f$, $\mathscr{F}_\sim f$, $\mathscr{F}_{\pm 2\pi} f$. Выбор символа $\widehat{\ }$ для $\mathscr{F}_{2\pi}$ (или $\mathscr{F}_{-2\pi}$) диктует подходящее обозначение для $\mathscr{F}_{-2\pi}$ (соответственно, для $\mathscr{F}_{2\pi}$).

2.4. Примеры.

(1) Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$ и $f_\varepsilon(x) := f(\varepsilon x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$. Тогда $\widehat{f_\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-N} \widehat{f}\,({}^t/_\varepsilon)$ $(t \in \mathbb{R}^N)$.

(2) $\mathscr{F}(\bar{f}) = \overline{\mathscr{F}_\sim f}$, $(\tau_x f)\widehat{\ } = e_x \widehat{f}$, $(e_x f)\widehat{\ } = \tau_x \widehat{f}$ $(f \in L_1(\mathbb{R}^N),\ x \in \mathbb{R}^N)$.

(3) Для $f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N)$ выполнено

$$(f * g)\widehat{\ } = \widehat{f}\, \widehat{g};\ \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f} g = \int_{\mathbb{R}^N} f \widehat{g}.$$

(4) Если $\widehat{f}$, f, $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, то $(\widehat{f} g)\widehat{\ } = f\widetilde{\ } * \widehat{g}$.

(5) Для $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ и $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N$ выполнено

$$\mathscr{F}(\partial^\alpha f) = i^{|\alpha|} t^\alpha \mathscr{F} f, \quad \partial^\alpha(\mathscr{F} f) = i^{|\alpha|} \mathscr{F}(x^\alpha f);$$
$$\mathscr{F}_{2\pi}(\partial^\alpha f) = (2\pi i)^{|\alpha|} t^\alpha \mathscr{F}_{2\pi} f, \quad \partial^\alpha(\mathscr{F}_{2\pi} f) = (2\pi i)^{|\alpha|} \mathscr{F}_{2\pi}(x^\alpha f)$$

(эти равенства используют широко распространенную вольность в обозначениях $x^\alpha := t^\alpha := (\cdot)^\alpha : y \in \mathbb{R}^N \mapsto y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_N^{\alpha_N}$).

(6) Если $f_N(x) := \exp\left(-1/2\,|x|^2\right)$ при $x \in \mathbb{R}^N$, то выполнено $\widehat{f}_N = (2\pi)^{N/2} f_N$.

2.6. *Пространством Шварца* принято называть множество *быстро убывающих* или *умеренных функций*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N) :=$$
$$:= \left\{ f \in C_\infty(\mathbb{R}^N) : \ (\forall \alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_+)^N) \ |x| \to +\infty \Rightarrow x^\alpha \partial^\beta f(x) \to 0 \right\}$$

(рассматриваемое как элемент решётки функций из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{C}$) с мультинормой $\{p_{\alpha,\beta} : \ \alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_+)^N\}$, где $p_{\alpha,\beta}(f) := \|x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty$.

2.7. Справедливы утверждения:

(1) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ — пространство Фреше;

(2) операторы умножения на многочлен и дифференцирования — непрерывные эндоморфизмы $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$;

(3) топологию $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ задаёт следующая (эквивалентная исходной) мультинорма $\{p_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, где

$$p_n(f) := \sum_{|\alpha| \le n} \|(1 + |\cdot|^2)^n \partial^\alpha f\|_\infty \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$$

(как всегда, $|x|$ — евклидова длина вектора $x \in \mathbb{R}^N$);

(4) пространство $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ плотно в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$; помимо этого, вложение $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ непрерывно и $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)' \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$;

(5) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N) \subset L_1(\mathbb{R}^N)$.

(6) Преобразование Фурье — непрерывный эндоморфизм $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$.

(7) Повторное преобразование Фурье, рассматриваемое в пространстве Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, пропорционально отражению.

(8) $\mathscr{F}_{2\pi}^2$ — отражение и $(\mathscr{F}_{2\pi})^{-1} = \mathscr{F}_{-2\pi}$.

(9)$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ — свёрточная алгебра.

2.8. Теорема обращения. *Преобразование Фурье $\mathfrak{F} := \mathscr{F}_{2\pi}$ служит топологическим автоморфизмом пространства Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$.*

При этом свёртка переходит в произведение. Обратное преобразование $\mathfrak{F}^{-1}$ *совпадает с* $\mathscr{F}_{-2\pi}$ *и переводит произведение в свёртку. Кроме того, имеет место равенство Парсеваля:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\,\bar{g} = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}\,\overline{\widehat{g}} \quad (f,\ g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)).$$

2.9. В связи с 2.7 (8) наряду с $\mathfrak{F}$ рассматривают следующие взаимнообратные операторы:

$$\overline{\mathfrak{F}}f(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{i(x,t)}\,dx;$$
$$\overline{\mathfrak{F}}^{-1}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(t)e^{-i(x,t)}\,dt.$$

При этом имеет место аналог 2.8 при условии переопределения свёртки $f \mathbin{\overline{*}} g := (2\pi)^{-N/2} f * g \quad (f,\ g \in L_1(\mathbb{R}^N))$. Удобства $\overline{\mathfrak{F}}$ и $\overline{\mathfrak{F}}^{-1}$ связаны с небольшими упрощениями формул 2.41.5 (8). В случае $\mathfrak{F}$ аналогичную цель достигают введением для $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N$ следующего дифференциального оператора: $D^\alpha := (2\pi i)^{-|\alpha|}\partial^\alpha$.

2.10. Теорема Планшереля. *Продолжение преобразования Фурье в* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ *до изометрического автоморфизма пространства* $L_2(\mathbb{R}^N)$ *существует, и притом единственно.*

2.11. За продолжением, обеспеченным 2.10, сохраняют прежние название и обозначения. Реже (при желании подчеркнуть различия и тонкости) говорят о *преобразовании Фурье — Планшереля* или же об L_2*-преобразовании Фурье* и уточняют понимание интегральных формул для $\mathfrak{F}f$ и $\mathfrak{F}^{-1}f$ при $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ как результатов подходящего предельного перехода в $L_2(\mathbb{R}^N)$.

2.12 Определение. Пусть $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N) := \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)'$. Наименование u — *медленно растущее распределение* (варианты: *обобщённая функция умеренного роста*, *умеренное распределение* и т. п.). Пространство $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$, составленное из всех умеренных обобщённых функций, наделяют слабой топологией $\sigma(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N),\ \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$ и иногда называют *пространством Шварца* (как и $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$).

2.13. Примеры.

(1) $L_p(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ при $1 \le p \le +\infty$.

(2) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ плотно в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$.

(3) Пусть $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^N)$ — *мера Радона умеренного роста*, т. е. такая, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d|\mu|(x)}{(1+|x|^2)^n} < +\infty.$$

Мера μ — это, бесспорно, умеренное распределение.

(4) Если $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ и $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N$, то $fu \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ и $\partial^\alpha u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ю Действуя похожим образом и полагая $D^\alpha u(f) := (-1)^{|\alpha|} u D^\alpha f$ при $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, мы видим, что $D^\alpha u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ и $D^\alpha u = (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial^\alpha u$.

(5) Каждое распределение с компактным носителем умеренно.

(6) Пусть $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$. Если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, то u сворачиваемо с f, причём $u * f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. Можно проверить, что u сворачиваемо также и с любым распределением v из $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^N)$, причём $u * v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$.

(7) Пусть $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ и $\tau_x u := (\tau_{-x})' u = u \circ \tau_{-x}$ — соответствующий *сдвиг* u. Распределение u называют *периодическим* (с периодом x), если $\tau_x u = u$. Периодические распределения имеют умеренный рост. Периодичность сохраняется при дифференцировании и свёртывании.

(8) Если $u_n \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ $(u \in \mathbb{N})$ и для каждого $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ имеется сумма $u(f) := \sum_{n=1}^\infty u_n(f)$, то $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ и при этом $\partial^\alpha u = \sum_{n=1}^\infty \partial^\alpha u_n$.

(9) Любое умеренное распределение — сумма производных умеренных мер.

2.14. *Преобразованием Фурье* или, полнее, *преобразованием Фурье — Шварца* умеренного распределения u из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ называют распределение $\mathfrak{F}u$, действующее по правилу: $\langle f \mid \mathfrak{F}u \rangle = \langle \mathfrak{F}f \mid u \rangle$ для всех $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$.

2.15. Теорема. *Преобразование Фурье — Шварца $\mathfrak{F}$ — это единственное продолжение преобразования Фурье в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ до топологического автоморфизма $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$. Обратное отображение $\mathfrak{F}^{-1}$ — единственное непрерывное продолжение обратного преобразования Фурье в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$.*

2.16. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a_\alpha \in \mathbb{F}$ для всех $|\alpha| \le n$. Пусть, далее, $P := \sum_{|\alpha|\le n} a_\alpha \partial^\alpha$ — *линейный дифференциальный оператор* порядка не выше n в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$. Тогда для некоторого $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ будет $Pu = \delta$. Распределение u именуют *фундаментальным решением* P. Факт существования фундаментального решения у произвольного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами был обнаружен в середине прошлого века и известен как *теорема Мальгранжа — Эренпрайса.* Эта теорема стала триумфом абстрактной теории локально выпуклых пространств. Явная форма фундаментального решения в терминах преобразования Фурье была найдена спустя сорок лет Н. Ортнером и П. Вагнером.

2.17. Теорема Ортнера — Вагнера. *Пусть $P(\partial) \in \mathbb{C}[\partial]$, $m := \deg P$ – степень многочлена P, $\eta \in \mathbb{R}^n$ и $P_m(\eta) \ne 0$, где P_m — главная часть P. Тогда распределение E, задаваемое формулой*

$$E := \frac{1}{\overline{P_m(\eta)}} \int_{\mathbb{T}} \lambda^m e^{\lambda\eta x} \mathfrak{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda\eta)}}{P(i\xi+\lambda\eta)}\right)\frac{d\lambda}{2\pi i\lambda},$$

является фундаментальным решением оператора $P(\partial)$, причем $E/\operatorname{ch}(\eta x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\frac{\overline{P(i\xi+\lambda\eta)}}{P(i\xi+\lambda\eta)} \in L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$$

для фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$. (Множество нулей $\mathbb{R}^n$ не тождественно нулевого многочлена имеет нулевую меры Лебега.) Далее, по теореме Лебега о предельном переходе будет непрерывным следующее отображение:

$$\mathbb{T}^1 \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n_\xi) : \lambda \mapsto \frac{\overline{P(i\xi+\lambda\eta)}}{P(i\xi+\lambda\eta)}.$$

поскольку каждую непрерывную функцию со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ можно интегрировать по любому компакту, отображение E определено корректно. Очевидно, что распределение $E/\operatorname{ch}(\eta x)$ — это умеренное распределение. Наконец,

$$
\begin{aligned}
P(\partial)E &= \frac{1}{\overline{P_m(\eta)}} \int_{\mathbb{T}^1} \lambda^m P(\partial)\left(e^{\lambda\eta x}\mathscr{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda\eta)}}{P(i\xi+\lambda\eta)}\right)\right)\frac{d\lambda}{2\pi i\lambda}\\
&= \frac{1}{\overline{P_m(\eta)}} \int_{\mathbb{T}^1} \lambda^m e^{\lambda\eta x}\left(P(\partial+\lambda\eta)\mathscr{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda\eta)}}{P(i\xi+\lambda\eta)}\right)\right)\frac{d\lambda}{2\pi i\lambda}\\
&= \frac{1}{\overline{P_m(\eta)}} \int_{\mathbb{T}^1} \lambda^m e^{\lambda\eta x}\mathscr{F}^{-1}_{\xi\to x}(\overline{P(i\xi+\lambda\eta)})\frac{d\lambda}{2\pi i\lambda}\\
&= \frac{1}{\overline{P_m(\eta)}} \int_{\mathbb{T}^1} \lambda^m e^{\lambda\eta x}\overline{P(\partial+\lambda\eta)}\,\delta\frac{d\lambda}{2\pi i\lambda}.
\end{aligned}
$$

По теореме Тейлора

$$
\overline{P(\partial+\lambda\eta)}\,\delta = \overline{\lambda^m}\,\overline{P_m(\eta)}\,\delta + \sum\nolimits_{k=0}^{m-1}\overline{\lambda^k}Q_k(\partial)\,\delta,
$$

где Q_k — подходящие многочлены. По интегральной формуле Коши, интегралы всех членов с сомножителями $\overline{\lambda^k}$, $k=0,\dots,m-1$, равны нулю, а интеграл главного члена равен δ. Теорема доказана полностью.

4. Успехи теории распределений

В основе теории распределений лежит стремление применить технологии функционального анализа для исследования дифференциальных уравнений в частных производных. Функциональный анализ характеризуется алгебраизацией, геометризацией и социализацией аналитических задач. Под социализацией обычно понимают включение конкретной задачи в целый класс аналогичных проблем. Социализация позволяет стереть «случайные черты» — избавиться от трудностей, привносимых чрезмерной спецификой задачи. К началу 1930-х годов достоинства функционального анализа уже были продемонстрированы в сфере интегральных уравнений. На повестке дня стояли уравнения дифференциальные.

Следует подчеркнуть, что размышления над природой интегрирования и дифференцирования лежат в основе большинства теорий современного функционального анализа. Это неудивительно ввиду особой роли этих замечательных линейных операций. Общеизвестно, что интегрирование обладает более привлекательными свойствами по сравнению с дифференцированием: эта операция монотонна и повышает гладкость. Указанные приятные свойства начисто отсутствуют у оператора дифференцирования. Всем известно, что классическое дифференцирование — это замкнутый, но не непрерывный оператор. в естественной топологии, порожденной метрикой Чебышева). Ряды гладких функций, вообще говоря, нельзя дифференцировать почленно, что существенно затрудняет применение аналитических средств для решения дифференциальных уравнений.

Центральным в теории распределений является понятие обобщённой производной. Производная рассматривается теперь как оператор, действующий на негладкие функции по тем же интегральным законам, которым подчиняется процедура взятия классической производной. Именно такой подход был впервые явно сформулирован С. Л. Соболевым. На предложенном пути стало возможным капитально расширить запас формул дифференцирования. В частности, оказалось, что любые распределения обладают производными любых порядков — поточечно сходящиеся ряды распределений можно сколь угодно раз дифференцировать почленно (см. 1.9).

Развернутые изложения достижений новой теории появились в свет практически одновременно 1950 г.

Предложенные теорией распределений новые методы оказались столь сильными, что позволили выписать в некотором явном виде общее решение произвольного дифференциального уравнения в частных производных в случае, когда коэффициенты при производных постоянны. Дело сводится к наличию фундаментальных решений — частных решений, отвечающих случаю, когда в правой части уравнения поставлена дельта-функция П. Дирака. Существование таких решений было установлено уже в 1953–1954 гг. независимо в работах Б. Мальгранжа и Л. Эренпрайса. Но лишь в 1994 г. фундаментальное решение было выписано явно сначала Х. Кёнигом, а затем несколько позже и в более элементарном виде Н. Ортнером и П. Вагнером (см. 2.17).

Факт существования фундаментального решения у произвольного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами по праву носит название *теоремы Мальгранжа — Эренпрайса.* Трудно переоценить это замечательное достижение, ставшее одним из триумфов абстрактной теории топологических векторных пространств.

Путь от обобщённых решений к классическим лежит через пространства Соболева. Исследование вложений и следов пространств Соболева и их обобщений стало одним из основных направлений современной теории функций вещественной переменной. Десятки книг упоминают в своем названии пространства Соболева, что бывает не так уж часто в нашей науке.

Широкий пласт современных исследований связан с применением обобщённых функций в математической и теоретической физике, в комплексном анализе, в теории псевдодифференциальных операторов, тауберовой теории и в других разделах математики.

Физические источники теории распределений и связи последней с теоретической физикой — предметы большой важности, требующие специального и подробного анализа. Н. Н. Боголюбов использовал соболевские классы основных и обобщённых функций при построении своей аксиоматической квантовой теории поля. Более того, как указывает В. С. Владимиров, без обобщённых функций нельзя построить аксиоматику квантовой теории поля. В теории дисперсионных соотношений обобщённые функции и гиперфункции выступают как граничные значения голоморфных функций многих комплексных переменных.

Дифференциальное исчисление XVII века неотделимо от общих воззрений классической механики. Теория обобщённых функций связана с механикой квантовой. Следует особо подчеркнуть, что квантовая механика не является простым обобщением классической механики. Квантовая механика представляет научное мировоззрение, основанное на новых законах. Классические детерминизм и непрерывность уступили место квантованию и неопределенности. В XX веке человечество вышло на совершенно иной уровень понимания природных процессов.

Теория распределений, ставшая исчислением нашего времени, коренным образом преобразила всю технологию математического описания физических процессов с помощью дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Soboleff S. L.* Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionnelles// C. R. Acad. Sci. URSS.—1935.—V.3, No. 7.—P. 291–294.
2. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Т.1.—Новосибирск: Институт математики, 2003.—693 с.
3. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Т.2.—Новосибирск: Институт математики, 2006.—690 с.
4. *Schwartz L.* Théorie des Distributiones. Tome I.— Paris: Hermann, 1950.— 148 P.
5. *Schwartz L.* Théorie des Distributiones. Tome II.— Paris: Hermann, 1951.— 169 P.
6. *Ortner N. and Wagner P.* A Survey on Explicit Representation Formulae for Fundamental Solutions of Linear Partial Differential Operators// Acta Appl. Math.—Vol. 47, No. 1.—1997.—P. 101–104.
7. *Lützen J.* The Prehistory of the Theory of Distributions.—Springer-Verlag: New York etc., 1982.—232 P.
8. *Владимиров В. С.* Обобщённые функции в математической физике. Изд. 2.—М.: Наука, 1979.—319 С.

Кутателадзе Семён Самсонович, д. ф.-м. н.

Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

sskut@math.nsc.ru