Российская академия наук

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН

(ИМ СО РАН)

УДК 519.7

№ госрегистрации   01201064560

Инв. №

УТВЕРЖДАЮ
И.о. директора
член-корреспондент РАН
_____________ Гончаров С.С.
«___»_________ ______ г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

В рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы

по государственному контракту № 14.740.11.0362
шифр заявки «2010-1.1-113-130-032
по теме:

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Наименование этапа: «Проведение фундаментальных исследований»
(промежуточный, этап № 2)

Руководитель НИР,
член-корреспондент РАН   В.Д. Мазуров

____

Новосибирск 2011

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Рук. темы, зав. отделом ИМ СО РАН, член-корр. РАН	___________________	В.Д. Мазуров (Введение, Заключение)
Отв. исполнитель темы, исп. директор НОЦ, д.т.н.	___________________	С.М. Лавлинский (Реферат, Приложения А-В)
проф. НГУ, д.ф.-м.н.	___________________	Береснев В.Л. (раздел 1.9)
проф. НГУ, д.ф.-м.н.	___________________	Гимади Э.Х. (раздел 1.1)
зав. кафедрой НГУ, д.ф.-м.н.	___________________	Ерзин А.И. (раздел 1.8)
гл.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.	___________________	Кельманов А.В. (раздел 1.3)
в.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.	___________________	Севастьянов С.В. (раздел 1.2)
в.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.	___________________	Соловьева Ф.И. (раздел 1.6)
зав. лабораторией ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	___________________	Августинович С.В. (раздел 1.5)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	___________________	Токарева Н.Н. (раздел 1.7)
доц. НГУ, к.ф.-м.н.	___________________	Кротов Д.С. (раздел 1.6,1.5)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	___________________	Глебов А.Н. (раздел 1.1)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	___________________	Потапов В. Н. (раздел 1.5)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.	___________________	Могильных И.Ю. (раздел 1.4)
н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	___________________	Алексеева Е.В. (раздел 1.9)
асс. НГУ, к.ф.-м.н	___________________	Салимов П.В (раздел 1.5)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.		Рыков И.А. (раздел 1.1)

	__________________	
		Алдын-оол Т.А. (раздел 1.8)
инж. ИМ СО РАН	__________________	
		Лось А.В. (раздел 1.5)
вед. инж. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	__________________	
		Горкунов Е.В. (раздел 1.7)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	__________________	
аспирант ИМ СО РАН	__________________	Козлов А.С. (раздел 1.2)
аспирант ИМ СО РАН	__________________	Павлов С.В. (раздел 1.2)
аспирант ИМ СО РАН	__________________	Сухорослов А.А. (раздел 1.2)
аспирант НГУ	__________________	Долгушев А.В. (раздел 1.3)
инж. ИМ СО РАН	__________________	Плотников Р.В. (раздел 1.8)
аспирант ИМ СО РАН	__________________	Курочкин А.А. (раздел 1.8)
аспирант ИМ СО РАН	__________________	Истомин А.М. (раздел 1.1)
аспирант ИМ СО РАН	__________________	Хорошилова Д.Б. (раздел 1.5)
студент НГУ	__________________	Романченко С.М. (раздел 1.3.1)
студент НГУ	__________________	Мельников А.А. (раздел 1.9.2)
студент НГУ	__________________	Корпич Д.В. (раздел 1.3.2)
студент НГУ	__________________	Коломиец Н. А. (раздел 1.7)
Нормоконтролер	__________________	Кравченко С.В.

Реферат

Отчет 84 с., 1 ч., 79 источников, 1 табл., 3 прил.

Тема: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Ключевые слова: ТЕОРИЯ РАСПИСАНИЙ С ПРЕРЫВАНИЯМИ; КЛАСТЕРНЫЙ АНАЛИЗ; ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ КОДЫ; СОВЕРШЕННЫЕ 2-РАСКРАСКИ ГИПЕРКУБА; N-АРНЫЕ КВАЗИГРУППЫ; ПОКРЫТИЯ СЕНСОРАМИ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ; ИГРА ШТАКЕЛЬБЕРГА; МОДЕЛИ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ.

Основным объектом исследования являются актуальные проблемы теоретической кибернетики.

Основной целью проекта является получение научных результатов мирового уровня, позволяющих закрепить приоритет российской школы теоретической кибернетики, повысить уровень подготовки и способствовать закреплению в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров, а также формированию эффективных и жизнеспособных научных коллективов.

В процессе работ использовались классические методы кластерного анализа, методы теории кодирования, методы оптимизации и дискретного анализа, аппарат теории расписаний.

В результате фундаментальных исследований 2 этапа получены новые результаты мирового уровня.

1. Разработаны новые эффективные алгоритмы с оценками для задачи 2-PSP-max**,** обоснована полиномиальность и выяснены условия асимптотической точности алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве R^k.

2. Исследованы задачи на построение расписаний с разрешением прерываний операций, в которых каждая операция может быть прервана и возобновлена позднее без какого-либо штрафа. Изучены фундаментальные свойства оптимальных решений таких задач – существование, конечность/полиномиальность числа прерываний и целочисленность/рациональность моментов прерываний в оптимальном решении. Для двух специальных классов целевых функций (включающих, тем не менее, все классические целевые функции) доказано существование оптимального решения, обладающего специальной «рациональной» структурой.

3. Для цеховых задач и задач на параллельных машинах исследованы структурные свойства оптимальных расписаний и приведены условия существования оптимального решения с целочисленными прерываниями. Построены примеры, в которых такие решения

не существуют, если хотя бы одно из достаточных условий нарушено. Получены новые улучшенные по сравнению с известными верхние оценки на число прерываний в оптимальном решении.

4. Доказана NP-полнота нескольких актуальных задач кластеризации конечного множества векторов евклидова пространства. Предложен 2-приближённый алгоритм для труднорешаемой задачи, к которой сводится одна из проблем разбиения множества векторов евклидова пространства на два подмножества (кластера) по критерию минимума суммы квадратов расстояний.

5. Доказан признак разделимости n-арных квазигрупп произвольного порядка в терминах разделимости ретрактов. Охарактеризованы классы сублинейных n-арных квазигрупп порядков *5* и *7*. Установлены новые нижняя и верхняя оценки числа n-арных квазигрупп конечного порядка, при помощи них установлена нижняя оценка числа q-ичных совершенных кодов.

6. Получена полная характеризация возможных распределений локальных экстремумов произвольной целевой функции на вершинах произвольного связного графа.

7. Для всех транзитивных кубических графов с числом вершин, не превосходящим 18, получено полное описание допустимых параметров совершенных 2-раскрасок. Перечислены параметры всех дистанционно регулярных раскрасок бесконечной квадратной решетки. Как следствие, получена полная классификация дистанционно регулярных кодов в бесконечной квадратной решетке

8. Изучена проблема наименее плотного покрытия полосы кругами одного, двух и трёх радиусов. Предложены и исследованы новые регулярные покрытия, построен инструментарий для энергоэффективного мониторинга протяженных объектов сенсорными сетями.

9. Предложен способ сведение задач конкурентного размещения предприятий к задаче максимизации псевдобулевой функции.

Степень внедрения - результаты используются в образовательном процессе Новосибирского государственного университета при чтении таких курсов лекций, как «Исследование операций», «Совершенные структуры», «Теория расписаний», «Анализ данных и распознавание образов».

Полученные результаты фундаментального характера, прежде всего, являются вкладом в общую математическую теорию. Результаты исследований могут быть использованы в практической сфере, связанной с процессами управления.

Эффективность и значимость работ, помимо чисто научных результатов, заключается в подготовке молодых ученых, непосредственно участвовавших в работах наряду с признанными специалистами, и способствуют закреплению в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров.

В развитии результатов второго этапа в последующих работах этого направления следует ожидать формирование эффективного инструментария исследования проблем теоретической кибернетики, использующего сформулированные подходы и новые постановки ключевых задач.

В результате исследований по ряду направлений получены новые фундаментальные результаты мирового уровня, которые доложены на различных научных форумах и опубликованы в монографиях и статьях.

Обозначения и сокращения

ИМ СО РАН - Институт математики Сибирского отделения Российской академии наук.

НГУ – Новосибирский государственный университет.

НОЦ – научно-образовательный центр.

СБИС – сверхбольшие интегральные схемы.

Содержание

Введение

Выполнение НИР направлено на проведение фундаментальных исследований в области теоретической кибернетики, с целью получения научных результатов мирового уровня, на подготовку и закрепление в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров, а также формирование эффективных и жизнеспособных научных коллективов.

Запланированные исследования 2 этапа посвящены проведению фундаментальных исследований и играют важную роль в рамках всей НИР. В ходе работ предполагается определить основные контуры инструментария анализа свойств оптимальных решений в задачах теории расписаний с прерываниями. Важная роль отведена исследованию возможности оценки сложностного статуса и построению эффективных алгоритмов с оценками точности для некоторых труднорешаемых задач анализа данных. Базовые свойства транзитивных кубических графов и дистанционно регулярных кодов в бесконечной квадратной решетке – объект исследований значительной части работ 2 этапа. Планируется также исследовать отдельные классы n-арных квазигрупп и изучить поведение жадного алгоритма относительно целевой функции общего вида на двусвязных обыкновенных графах.

Намечена общирная программа работ по геометрическому анализу эффективности покрытий сенсорами плоских областей, играющему ключевую роль в проблематике маршрутизации в современных беспроводных сенсорных сетях. Совместно с исследованиями возможности сведения задач конкурентного размещения к задачам максимизации псевдобулевой функции, эти исследования определяют фронт работ 2 этапа.

1. Проведение фундаментальных исследований

В рамках работ второго этапа НИР основной акцент сделан на конкретныъ проблемах размещения и маршрутизации, теории расписаний с прерываниями, дискретного анализа и теории графов в задачах хранения, обработки, передачи и защиты информации, анализа данных и распознавания образов.

В отчете приведено описание работ по пунктам календарного плана в соответствии с техническим заданием.

1.1. Задача коммивояжера для двух и более коммивояжёров

Одним из естественных обобщений классической задачи коммивояжера (Traveling Salesman Problem – TSP) является задача об m коммивояжерах (m-Peripatetic Salesman Problem – m-PSP), состоящая в поиске в полном взвешенном неориентированном графе m реберно непересекающихся гамильтоновых циклов с минимальным или максимальным суммарным весом ребер. С тех пор как задача 2-PSP была впервые упомянута в работе [Krarup,1974], появилось множество публикаций, посвященных ее исследованию. Было доказано [DeKort,1991], что задача о существовании двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов в неориентированном графе NP-полна, что влечет NP-трудность задачи 2-PSP как на минимум так и на максимум даже в случае, если веса ребер принимают лишь значения 1 и 2. Рассматривались некоторые полиномиально разрешимые случаи задачи на минимум (2-PSP-min) [DeBrey,Volgenant, 1997]. В статьях [DeKort, 1991], [Duchenne, 2005] были предложены и проанализированы некоторые способы нахождения нижних и верхних оценок для применения в методе ветвей и границ. В работе [Duchenne, 2005] был представлен также полиэдральный подход к решению m-PSP.

Ввиду NP-трудности известных модификаций задач TSP и m-PSP большинство работ, посвященных их исследованию, связано с анализом полиномиально разрешимых случаев, а также с построением приближенных эвристических алгоритмов и полиномиальных алгоритмов (как детерминированных, так и рандомизированных) с гарантированными оценками точности полученного решения.

За последние годы при участии авторов проекта был построен ряд полиномиальных алгоритмов с гарантированными оценками точности для задач одного и двух коммивояжеров на максимум. Рассматривался как общий случай задачи, когда веса ребер принимают произвольные неотрицательные значения, так и метрический случай (выполняется неравенство треугольника), а также случай весов ребер из отрезка (1,q) (при заданном q>1).

Задача двух и более коммивояжеров на максимум рассматривалась в случае графов в многомерном евклидовом пространстве.

В случае задачи одного коммивояжера на максимум (TSP-max) наилучшим полиномиальным алгоритмом с гарантированной оценкой точности 3/4 в течение длительного времени оставался алгоритм Сердюкова [Сердюков, 1984]. За последние годы этот результат был незначительно усилен разными авторами за счет построения рандомизированных алгоритмов с оценками (25/33-eps) [Hassin, Rubinstein, 2000] и (251/331-eps) [Chen, Wang, 2005] (для любой константы eps>0), а также детерминированных алгоритмов с оценками 61/81-eps [Chen, Okamoto, Wang, 2005] и 25/33-eps [Van Zuylen, 2010], основанных на дерандомизации алгоритма [Hassin, Rubinstein, 2000]. Для задачи о двух коммивояжерах на максимум (2-PSP-max) был построен полиномиальный с такой же оценкой 3/4, как и в случае одного коммивояжера [Агеев, Бабурин, Гимади, 2006]. Для задачи 2-PSP-max на графах в многомерном евклидовом пространстве был представлен асимптотически точный алгоритм с временной сложностью $O(n^3)$ [Гимади, 2008].

Результаты, полученные за время выполнения второго этапа проекта

1) Задача 2-PSP-max. Алгоритм $A_{7/9}$ ([Глебов, Замбалаева, 2011]).

В настоящее время оценка 3/4 в [Агеев, Бабурин, Гимади, 2006] для задачи о двух коммивояжерах на максимум (2-PSP-max) улучшена до 7/9 Глебовым и Замбалаевой за счет развития структурных идей, ранее использованных в работе [Гимади, Глазков, Глебов, 2007] при построении приближенного алгоритма с оценкой 6/5 для задачи о двух коммивояжерах на минимум с весами ребер 1 и 2 (задача 2-PSP-min(1,2)). Интересно отметить, что оценка точности 7/9 для задачи 2-PSP-max превосходит наилучшую на сегодняшний день оценку (25/33-eps) для аналогичной задачи одного коммивояжера, полученную в [Van Zuylen, 2010]. Отправной точкой алгоритма $A_{7/9}$ является построение алгоритмом [Gabow,1983] остовного 4-регулярного подграфа G_4 с максимальным суммарным весом ребер. Затем, используя процедуру из статьи [Гимади, Глазков, Глебов, 2007], в каждой компоненте связности G_4 выделяются пары реберно непересекающихся туров специального вида с большим числом ребер. Далее найденные туры преобразуются в реберно непересекающиеся гамильтоновы циклы H_1 и H_2 .

Теорема 1. Алгоритм $A_{7/9}$ находит в полном n-вершинном графе G пару реберно непересекащихся гамильтоновых циклов H_1, H_2, для которых выполняется оценка $W(H_1)+W(H_2) >= 7/9$ OPT. Временная сложность алгоритма равна $O(n^3)$.

2) Алгоритм с оценкой (3q+2)/(4q+1) для 2-PSP-max(1,q) ([Гимади, Ивонина,2011]).

Важным подклассом задачи 2-PSP-max на полном неориентированном графе является случай, когда веса ребер графа принимают значения из заданного промежутка (1,q). Ранее для этой подзадачи авторами проекта был построен ряд приближенных алгоритмов для решения соответствующей задачи на минимум. Так для задачи 2-PSP-min(1,q) алгоритм из [Гимади, Глазков, Глебов, 2007] дает оценку точности (q+4)/5, что позволяет построить на его основе алгоритм с оценкой 5/(q+4) для задачи 2-PSP-max(1,q). Совместное применение результатов работ [Агеев, Бабурин, Гимади, 2006] и [Гимади, Глазков, Глебов, 2007] позволило получить для этой же задачи алгоритм А2 с улучшенной оценкой (3q+2)/(4q+1).

Теорема 2. Алгоритм А2 за время $O(n^3)$ находит допустимое решение 2-PSP-max с весами ребер на отрезке [1,q], вес которого составляет не менее (3q+2)/(4q+1) от веса оптимального решения.

Следствие. Для соответствующей подзадачи 2-PSP-max с весами ребер 1 и 2 из теоремы следует оценка 8/9.

С другой стороны, использование алгоритма из пункта 1 дает для указанной задачи оценку точности (7q+2)/9q, что лучше чем (3q+2)/(4q+1) при q>2, но уступает при q<2 ([Глебов, Замбалаева, Ивонина, 2011]). Наконец, модификация этого алгоритма, с учетом структурных свойств, доказанных в [Гимади, Глазков, Глебов, 2007], позволяет обосновать наилучшую на сегодняшний день оценку (7q+3)/(9q+1) для 2-PSP-max(1,q). В частности, для соответствующей подзадачи 2-PSP-max с весами ребер 1 и 2 построенный алгоритм имеет оценку точности 17/19, что на 1/153 лучше оценки 8/9.

3) Обоснование полиномиальности и условий асимптотической точности алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве R^k ([Baburin, Gimadi, 2011]**)**.

Для задачи об m реберно непересекающихся маршрутах коммивояжера на графах в многомерном евклидовом пространстве построен приближенный алгоритм А3 с временной сложностью $O(n^3)$ и установлены условия асимптотической точности алгоритма. Результаты построения алгоритма и его анализа существенно опираются на прежние работы, связанные с обоснованием возможности асимптотически точного решения в пространстве R^k задачи коммивояжера на максимум [Сердюков, 1984], [Гимади, 2000], а также задачи 2-PSP-max [Гимади, 2008]. Отправной точкой алгоритма А3 является построение максимального взвешенного паросочетания, которое представляется в виде совокупности [n/2] прямолинейных отрезков в многомерном евклидовом пространстве R^k. Ребра максимального взвешенного паросочетания используются как бы в качестве "строительных лесов", с помощью которых происходит построение искомых реберно непересекающихся маршрутов коммивояжера $H_1, H_2, \ldots, H_m$.

Теорема 3. При $m=o(n)$ алгоритм A3 находит асимптотически точное решение задачи m-PSP на максимум в графе G с расстояниями в R^k. При этом, если $m<n^{1/2}$, то алгоритм имеет временную сложность $O(n^3)$.

4) Улучшение оценок точности для задачи 2-PSP(1,2) с разными весовыми функциями ребер в маршрутах ([Гимади, Ивонина 2011]).

Отметим, что все рассмотренные до этого алгоритмы и оценки корректны лишь в том случае, когда весовые функции ребер у первого и второго маршрутов коммивояжера одинаковы. Построение соответствующих алгоритмов в случае, когда весовые функции различны, представляет из себя существенно более трудную задачу. Это, в частности, объясняется невозможностью свободного обмена ребрами между строящимися гамильтоновыми циклами (частичными турами) по ходу работы алгоритма. В силу этих трудностей, авторами проекта построены алгоритмы с гарантированными оценками точности лишь в случае весов ребер 1 и 2 (задача 2-PSP-max(1,2)).

Теорема 4. Если имеется алгоритм с оценкой r для задачи 2-PSP-min(1,2) с двумя весовыми функциями, принимающими значениями 1 и 2, то на его основе можно построить алгоритм A4 с оценкой 1-7(r-1))/(18r-15) для соответствующей задачи на максимум.

С одной стороны, результат основан на очевидной связи между 2-PSP-max(1,2) и 2-PSP-min(1,2). С другой стороны, идеи работы [Baburin и др., 2009] вместе с алгоритмом для TSP-min(1,2) с оценкой 7/6 [Papadimitriou, Yannakakis, 1993] позволили получить оценку точности 1-7(r-1)/(18 r-15) для 2-PSP-max(1,2). Исходя из известных алгоритмов решения 2-PSP-min(1,2) с двумя весовыми функциями и оценками r = 11/7 [Бабурин и др., 2009], 7/5 [Глебов, Гордеева, Замбалаева, 2011] и анонсированной оценкой 4/3 [Глебов, Замбалаева, 2010], можно получить следующие соответствующие оценки точности для комбинированного алгоритма A4 решения 2-PSP-max(1,2): 65/113 < 37/51 < 20/27.

1.2. Анализ свойств оптимальных решений в задачах теории расписаний с прерываниями

Под задачей теории расписаний с прерываниями подразумевается задача на построение оптимального расписания какого-либо процесса, где любая операция в любой момент времени может быть прервана и возобновлена позднее (без какого-либо штрафа либо с таковым).

Следует отметить, что прерывания возникают естественным образом во многих реальных процессах. Простейшим примером такого процесса является передача данных в сети Интернет. Когда мы хотим послать большой файл, то не имеет смысла посылать его единым куском. Проще разделить его на более мелкие части, варьируя канал и время передачи для различных частей. Другими примерами являются дрель или мотор, которые «имеют обычай» нагреваться во время работы. Такой инструмент нуждается в остановке на некоторое время с целью охлаждения. Аналогично, человек, выполняющий некоторую работу, время от времени нуждается в отдыхе либо в переключении на другую работу. Во всех этих ситуациях операция, выполняемая таким «инструментом», должна быть прервана и возобновлена позднее.

Точнее было бы сказать, что трудно придумать какую-либо механическую операцию, которая НЕ может быть прервана. Такие неразрывные процессы чаще всего возникают в химии и металлургии. (Также понятно, что когда мы выпекаем хлеб в духовке, то этот процесс лучше не прерывать, пока хлеб не будет испечён.)

Таким образом, мы можем заметить, что процессы, допускающие прерывания, являются более естественными и чаще возникают в реальной жизни, чем процессы, где прерывания невозможны. Тем не менее, следует признать, что в теории расписаний главным образом исследуются модели и задачи без прерываний. И эта странная ситуация имеет простое объяснение.

Дело в том, что, как правило, задачи с прерываниями характеризуются более сложной (и зачастую, — трудно предсказуемой) структурой их оптимальных расписаний. В ситуации, когда общее число прерываний не ограничено, а множество допустимых для прерывания точек каждой операции имеет континуальную мощность, мы не можем предложить точных переборных алгоритмов решения задачи, если не выполнен нетривиальный предварительный анализ свойств её оптимальных решений. Такой анализ имеет целью редуцировать исходное бесконечное множество возможных точек прерывания до некоторого множества конечной мощности, допускающего его прямой перебор. Однако для большинства задач теории расписаний такой анализ трудно осуществим. Лишь для достаточно простых задач мы имеем представление о том, как выглядят их оптимальные расписания, и эти знания помогают нам при разработке эффективных алгоритмов их решения.

Среди хорошо известных примеров таких «простых» задач – задачи на минимум длины расписания для параллельных машин (P|pmtn}|C_$_{max}$, алгоритм Мак'Нотона [Naughton, 1959] и для задачи open shop (O|pmtn}|C_$_{max}$, алгоритм Гонзалеза и Сани [Gonzalez and Sahni, 1976]. Обе задачи имеют дело с простейшим классическим критерием, оптимальное значение которого легко вычисляется для любого примера за линейное время. Для большинства других задач с прерываниями ситуация не столь оптимистична, и даже простейших переборных алгоритмов их точного решения до сих пор не известно. Вот почему задачи с прерываниями представляют на сегодняшний день мало исследованную область теории расписаний.

В этой ситуации возникает «крамольный» вопрос: а почему мы уверены, что оптимальное решение всегда существует? (Имеется в виду ситуация, когда множество допустимых решений непусто, но среди них нет наилучшего решения.) Рассмотрим следующие два примера.

Пример 1. Имеется одна работа единичной длительности, которая выполняется на единственной машине; целевая функция $f_1(C_1)$ зависит от момента C_1 завершения работы J_1 как $f_1(x) = x$, для x≤1 и $f_1(x) = x - 1$, для x>1. Инфимум целевой функции по всем допустимым расписаниям равняется нулю, но он не достигается ни на каком допустимом расписании — ни с прерываниями, ни без прерываний.

Как можно заключить из приведённого примера, отсутствие в нём оптимального решения проистекает из-за нарушения свойства неубывания целевой функции. Теперь рассмотрим пример другой задачи, где указанная причина устранена.

Пример 2. В стандартной системе обозначений [Lawler et al., 1993] данная задача может быть записана как $Q2 \,|\, p_j = 1, pmtn \,|\, \sum f_j(C_j)$. В рассматриваемом примере этой задачи имеется две работы J_1 и J_2 с единичными длительностями. Требуется построить расписание их выполнения на двух подобных машинах M_1 и M_2 с заданными скоростями $s_1 = 1$ и $s_2 = 2$ с разрешением прерываний, минимизирующее аддитивную целевую функцию $F(C_1, C_2) = f_1(C_1) + f2(C_2)$ от переменных C_1 и C_2, где $f_1(x) = 2x$, $f2(x) = x$, для x<3/4 и $f2(x) = x + 1$, для x≥3/4.

Как можно заметить, целевая функция является теперь неубывающей (хотя и не непрерывной), и инфимум её значений по всем допустимым расписаниям с разрешением прерываний равняется 7/4. Однако это значение не может быть достигнуто, и таким образом, оптимального решения для данного примера не существует. В то же время, оптимальное решение для соответствующей задачи без прерываний существует.

Во втором примере нашу неудачу в достижении оптимума можно связать с отсутствием свойства непрерывности целевой функции. В связи с этим было бы интересно отыскать некоторые минимальные условия на целевую функцию, выполнение которых в задаче с допущением прерываний гарантировало бы существование по крайней мере одного оптимального решения. Конечно, едва ли возможно отыскание неких универсальных условий, подходящих для всех задач на построение расписаний. Мы, однако, показываем, что существуют некоторые минимальные довольно универсальные требования к целевой функции, которые для широкого круга задач теории расписаний гарантируют существование оптимального решения заданного примера, при условии что множество его допустимых решений непусто. (Забегая вперёд, мы можем сказать, что для многих задач для существования оптимального решения достаточно целевой функции быть неубывающей и непрерывной слева.)

Имеются и другие интересные вопросы, характерные лишь для задач с прерываниями. Например, для каких задач гарантировано конечное/полиномиальное число прерываний в оптимальном расписании (и таким образом, задача алгоритмически/полиномиально разрешима)? В каких случаях можно гарантировать, что все прерывания в оптимальном расписании происходят в целые (или рациональные) моменты времени? Вопросы такого типа исследуются нами для широкого круга моделей теории расписаний и широкого спектра целевых функций.

Новые результаты. Прежде всего, нами получены некоторые общие результаты для задач на построение расписаний с прерываниями, касающиеся существования оптимального расписания, а также — существования оптимального расписания с конечным числом прерываний. Такие результаты установлены для широкого круга моделей, включая как большинство классических, так и нетрадиционных моделей теории расписаний и календарного планирования с ресурсными ограничениями, а также — для широкого спектра целевых функций, включая все классические.

Далее, для достаточно общей расписательной модели и достаточно общих целевых функций мы получили две Теоремы о Рациональной Структуре (для двух различных классов целевых функций, в совокупности покрывающих все классические целевые функции), согласно которым для любого примера с непустым множеством допустимых решений существует оптимальное расписание со следующими свойствами:

(1) суммарное число прерываний не превосходит полинома от числа операций и от числа фиксированных дат, заданных на входе;
(2) все точки переключения в расписании (т.е. моменты начала, завершения, прерывания и возобновления операций) совпадают с моментами времени, кратными некоторому рациональному числу $\delta>0$; при этом длина записи числа δ ограничена полиномом от длины записи входа задачи;
(3) оптимальное значение целевой функции является числом, кратным числу δ, при этом длина записи коэффициента кратности также ограничена полиномом от длины записи входа.

Важным теоретическим следствием этих теорем о рациональной структуре является заключение о том, что распознавательные аналоги оптимизационных задач с прерываниями принадлежат классу NP. Действительно, для любого заданного примера такой задачи и заданного ограничения сверху на значение целевой функции существует сертификат полиномиального размера, подтверждающий положительный ответ на вопрос о существовании допустимого решения со значением целевой функции не более заданной величины (в том случае, когда ответ действительно положительный). Такой сертификат предоставляется оптимальным расписанием, обладающим свойствами (1)-(3) (при этом значение оптимума не превосходит заданной границы).

Известные результаты. В литературе, посвящённой задачам теории расписаний с прерываниями, встречается не так много систематических исследований подобных общих вопросов, и большинство известных результатов о структурных свойствах оптимальных решений следуют либо из (i) доказанного факта, что прерывания не дают какого-либо преимущества [Baptiste&Timkovski, 2001], [Brucker et al., 2003], либо из (ii) существования полиномиального алгоритма (либо из каких-то его свойств). Результаты, следующие из (i), являются, очевидно, сильнейшими структурными результатами, на которые только можно надеяться при решении задач на построение расписаний с прерываниями. Многие из этих классических результатов могут быть найдены в стандартной литературе по теории расписаний (например, в [Lawler et al., 1993]; другим богатым источником подобных результатов является книга Танаева, Гордона и Шафранского [Танаев и др., 1984].

Структурные результаты, вытекающие из (ii), были получены в основном для задач с параллельными машинами и для задачи open shop. Мак'Нотон [Naughton, 1959] разработал алгоритм построения оптимального расписания с не более чем m-1 прерываниями для задачи $P|pmtn|C_{max}$ на m идентичных параллельных машинах на минимум длины расписания. Гонзалез и Сани [T. Gonzalez and S. Sahni, 1978] построили оптимальное расписание с не более чем 2(m-1) прерываниями для версии этой задачи с подобными параллельными машинами ($Q|pmtn|C_{max}$). Оценки на число прерываний (и на число моментов прерываний), полученные Мак'Нотоном и Гонзалезом и Сани, точны. Лабетул и др. [Labetoulle et al., 1984] доказал, что простой жадный алгоритм для задачи $Q|r_j,pmtn|\Sigma C_j$ с m машинами и n работами находит оптимальное решение с не более чем 2n-m прерываниями. Для задачи $R|pmtn|C_{max}$ с неродственными параллельными машинами Лолэ и др. [Lawler et al., 1993] установили, что алгоритм Лолэ и Лабетула [Lawler and J. Labetoulle, 1978] может быть усовершенствован, гарантируя построение оптимальных расписаний с не более чем $O(m^2)$ прерываниями. Возвращаясь к задаче open shop, мы можем упомянуть результат Гонзалеза и Сани [Gonzalez and Sahni, 1976], которые построили оптимальное расписание для задачи $O|pmtn|C_{max}$ с m машинами, n работами и ξ операциями, имеющее не более ξ+n+m моментов прерываний. Ду и Льюнг [Du and Leung, 1993] получили соответствующий результат для $O2|pmtn|\Sigma C_j$. Для других цеховых задач с прерываниями подобные структурные вопросы не получили достаточного внимания со стороны специалистов по теории расписаний, о чём свидетельствуют пробелы в литературе.

Некоторые общие структурные результаты были получены Сауэром и Стоуном [Sauer&Stone, 1987] (см. также [Sauer&Stone, 1989]). Они доказали, что для задачи на параллельных машинах на минимум длины расписания выполнения n работ единичной длины с разрешением прерываний в процессе их выполнения и ограничениями предшествования всегда существует оптимальное расписание с не более чем n-1 моментами прерываний. Они также показали, что длина временного интервала между двумя последовательными моментами прерываний есть рациональное число, и получили нижнюю оценку его значения. Мы обобщаем технику, используемую в [Sauer&Stone, 1989], для доказательства наших Теорем о Рациональной Структуре, применимых к существенно более общему классу задач на построение расписаний и для более общих целевых функций.

Далее мы сформулируем некую общую модель процесса выполнения операций с допущением их прерываний. На основе этой модели формулируется несколько оптимизационных задач, различающихся критериями оптимальности. Наиболее общей из них является Общая Задача, или задача GP, на отыскание лексикографического минимума заданной последовательности произвольных функций от моментов окончания операций. Для этой задачи мы доказываем Теорему о конечности числа прерываний в оптимальном расписании. Для несколько менее общей задачи, являющейся спецификацией задачи GP на случай последовательности регулярных целевых функций, доказывается Теорема о существовании оптимального решения. Наконец, далее рассматривается та же модель с двумя специальными классами регулярных целевых функций, покрывающими в совокупности все классические критерии. Для неё доказаны две теоремы О рациональной структуре оптимальных расписаний.

Общие определения

Дадим определения используемых понятий.

Для двух векторов x'=(x_1',…,x_n') и x"=(x_1",…,x_n") пишется x'≤x", если покомпонентно выполняются неравенства x_i'≤x_i".

Мы говорим, что функция $F(x)$ $(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n)$, определённая в области $D \subseteq R^n$, является неубывающей, если неравенство F(x')≤F(x") выполняется для любой пары векторов x',x"∈ D, такой что x'≤x".

Мы говорим, что функция $F(x)$ $(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n)$, определённая в области $D \subseteq R^n$, является непрерывной слева, если для любой точки x∈D и любого ε >0 существует число δ>0 такое, что неравенство |F(x)-F(x')|< ε выполняется для всех x'∈D, таких что x'≤x и x_i-x_i'≤ δ, для всех i=1,…,n.

Вещественнозначная функция $F(x)$ $(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n)$ называется *регулярной*, если она является неубывающей и непрерывной слева.

Если рассматривается задача с ξ операциями на минимум регулярной функции F(C), зависящей от вектора $C = (C_1, \ldots, C_\xi)$ моментов завершения операций, то мы говорим, что рассматриваем задачу с регулярным критерием.

Если в задаче определены K регулярных функций $F_1(C), \ldots, F_K(C)$, зависящих от вектора моментов завершения операций, и целью является отыскание лексикографического минимума заданной приоритетной последовательности $(F_1(C), \ldots, F_K(C))$ этих функций, то мы говорим, что рассматривается задача с *лексикографическим регулярным критерием*.

Формулировка Общей Задачи

Рассматривается производственная система, состоящая из конечного Множества $O = \{o_1, \ldots, o_\xi\}$ операций, представленных для выполнения. Каждая операция $o_j \in O$ характеризуется объёмом $q_j \geq 0$ и может выполняться в различных режимах (в частности, на различных машинах, с различными скоростями, с потреблением различного количества ресурсов, и т.п.). Пусть $M(o_j)$ обозначает конечное множество всевозможных режимов выполнения операции $o_j \in O$. Каждый режим $\mu \in M(o_j)$ характеризуется скоростью

$s_\mu > 0$, такой, что при полном выполнении Операции o_j в режиме μ потребуется q_j / s_μ единиц времени. Мы предполагаем, что операция может выполняться одновременно в нескольких режимах. Кроме того, выполнение любой операции может *прерываться* и возобновляться любое число раз. (Более строгое определение прерывания будет приведено ниже.)

Пусть $M = \bigcup_{o_j \in O} M(o_j)$ обозначает множество всех режимов. Без ограничения общности нашей модели будем полагать, что режимы, используемые разными операциями, различны, т.е. $M(o_i) \cap M(o_j) = \varnothing$ для любой пары $o_i \neq o_j$, что даёт возможность по заданному режиму $\mu \in M$ однозначно определять операцию $\omega(\mu) \in O$, к которой он относится.

Далее предполагаем, что задана конечная последовательность $\tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \le \tau_D$ фиксированных (т.е. независимых от расписания) *дат* τ_k, такая, что выполнение всего проекта должно осуществляться в интервале времени $[\tau_1, \tau_D]$, называемом далее горизонтом планирования. Типичными примерами фиксированных дат являются моменты появления работ в системе и директивные сроки завершения работ, а также точки переключения в определениях целевых функций (например, желаемые моменты завершения работ, нарушение которых наказывается штрафом) и функций, задающих ресурсные ограничения. Так например, τ_1 может быть наиболее ранним моментом появления работ, либо моментом начала выделения ресурсов; в большинстве случаев мы можем предполагать, что $\tau_1 = 0$. В качестве последней даты τ_D может выступать любая разумная (но при этом конечная) верхняя точка горизонта планирования; обычно такая верхняя точка легко вычисляется по исходным данным задачи. Ситуация равенства $\tau_k = \tau_{k+1}$ может потребоваться для моделирования ситуаций, когда для какой-то операции нулевой длины задан единственно возможный момент её выполнения.

Чтобы сформулировать технологические требования, предъявляемые к расписаниям, необходимо для начала понять, что представляет собой расписание в модели, где разрешаются прерывания операций.

Ясно, что расписание должно изображать процесс выполнения во времени всех заданных на входе операций. Этот процесс будем представлять кусочно постоянным: весь интервал планирования делится на конечное либо счётное число интервалов времени, в течение которых расписание постоянно. Последнее означает, что в течение заданного интервала времени остаётся неизменным не только набор выполняемых операций, но и набор режимов, в которых эти операции выполняются.

Набор режимов, одновременно используемых в текущем расписании в момент времени t, называется шаблоном.

Частичное расписание $\hat{S}$, определённое в некотором временном Интервале $[t',t''] \subseteq [\tau_1, \tau_D]$ путём задания единственного (возможно, пустого) шаблона P, используемого во всём интервале $[t',t'']$, называется слайсом, или *P*-слайсом. Таким образом, каждый слайс характеризуется (и ассоциируется с) тройкой (t',t''; P). Слайс положительной длины будем для краткости называть положительным слайсом, а слайс нулевой длины — нулевым слайсом. Слайс, в котором выполняется пустой шаблон, будем называть пустым слайсом.

Следующее замечание представляется нам важным для понимания целесообразности использования в расписании нулевых слайсов.

Замечание о нулевых слайсах. В нашей модели допускается существование операций нулевой длины. Это даёт возможность моделирования более общих ситуаций в едином стиле, а также предоставляет удобный инструмент для задания сложных ограничений посредством введения нескольких нулевых (фиктивных) операций. За эти удобства мы вынуждены расплачиваться допущением существования нулевых слайсов, так же как и существованием в расписании S нескольких таких слайсов, приписанных к одному и тому же моменту времени. Последнее допущение является естественным обобщением общепринятого в теории расписаний соглашения о том, что несколько нулевых операций могут выполняться на одной и той же машине в один и тот же момент времени (хотя это и противоречит широко распространённой формулировке, присутствующей во многих статьях и книгах по теории расписаний, согласно которой «разрешается выполнение не более одной операции на каждой машине в каждый момент времени»). Кроме того, поскольку разрешены прерывания, слайс нулевой длины не обязан содержать какую-либо операцию нулевой длины, но вместо этого может состоять из нулевых фрагментов операций. Это даёт возможность поместить нулевой слайс с заданной операцией o (т.е. с шаблоном P, содержащим хотя бы один режим $\mu \in M(o)$) в любую точку t, где шаблон P является допустимым. В частности, данный «трюк» может помочь в ситуации, когда мы пытаемся достичь желаемого момента завершения операции (если этому не препятствуют какие-либо ограничения задачи).

Нулевой слайс называется существенным, если хотя бы одна нулевая операция выполняется в нём целиком. В противном случае нулевой слайс называется несущественным.

Пусть $I = \{1,2,\dots\}$ — некоторое вычислимое (конечное или счётное) множество индексов. Семейство слайсов $S = \{\hat{S}_i = (t_i', t_i''; P_i) \mid i \in I\}$ называется (правильным) расписанием для заданного примера задачи GP, если для любых двух слайсов $\hat{S}_i, \hat{S}_j \in S$ $(i \neq j)$ их Интервалы $[t_i', t_i'']$, $[t_j', t_j'']$ пересекаются не более чем в одной точке; при этом точка пересечения должна быть крайней для обоих интервалов (здесь мы будем рассматривать лишь правильные расписания). Расписание называется полным, если каждый момент времени в интервале планирования $[\tau_1, \tau_D]$ покрыт хотя бы одним (возможно, пустым) слайсом.

Далее, рассматривая какое-либо расписание для всего множества операций, без ограничения общности будем считать его полным, представляя непокрытые слайсами промежутки времени в виде пустых слайсов.

Концевые точки слайсов $\{t_i', t_i''\}$ будут далее называться *точками переключения*. В этих точках либо происходит смена текущего шаблона, либо находится одна из фиксированных дат τ_i, свидетельствующих об изменениях каких-то параметров системы.

Из свойства «правильности» расписания следует, что в любом допустимом расписании S слайсы следуют друг за другом, в том смысле, что для любых двух слайсов $\hat{S}_i$ и $\hat{S}_j$ всегда можно определить, какой из слайсов идёт первым. А именно, полагаем, что слайс $\hat{S}_i$ предшествует слайсу $\hat{S}_j$ (и обозначаем это $\hat{S}_i \prec \hat{S}_j$), если $t_i'' \le t_j'$. (Для слайсов нулевой длины $\hat{S}_i$ и $\hat{S}_j$, приписанных к одному и тому же моменту времени t, одновременно имеем $\hat{S}_i \prec \hat{S}_j$ и $\hat{S}_j \prec \hat{S}_i$.)

Однако из правильности расписания не следует, что мы можем перенумеровать все слайсы $\{\hat{S}_i \mid i \in I\}$ «слева-направо», обеспечивая $\hat{S}_i \prec \hat{S}_j$ для любой пары i < j. Например, такая нумерация невозможна, если существует точка накопления $t \in [\tau_1, \tau_D)$, т.е. такая точка, что любая из её окрестностей содержит бесконечное число слайсов.

Момент завершения и момент начала операции $o_j \in O$ в расписании с прерываниями $S = \{(t_i', t_i''; P_i) \mid i \in I\}$ определяются как $C_j = \sup\{t_i'' \mid i \in I,\ P_i \cap M(o_j) \neq \varnothing\}$ и $S_j = \inf\{t_i' \mid i \in I,\ P_i \cap M(o_j) \neq \varnothing\}$ соответственно.

Мы говорим, что операция $o_j \in O$ имеет прерывание в момент времени t в расписании $S = \{(t_i', t_i''; P_i) \mid i \in I\}$, если

(a) существует $i \in I$, такое что $t_i'' = t$ и $P_i \cap M(o_j) \neq \varnothing$;

(b) для любого $\varepsilon > 0$ существует $i' \in I$, такое что $t_{i'}' \in [t, t+\varepsilon]$ и $P_{i'} \cap M(o_j) \neq P_i \cap M(o_j)$;

(c) существует $i'' \in I$, такое что $t_{i''}'' > t$ и $P_{i''} \cap M(o_j) \neq \varnothing$.

Теперь мы можем сформулировать технологические требования, предъявляемые к расписаниям. В модели рассматриваются три типа ограничений: ограничения совместности режимов, ограничения предшествования между операциями и требование полного выполнения операций.

Ограничения совместности определяются для каждого временного интервала $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ $(k = 1, \ldots, D-1)$ путём задания множества $P(k) \subseteq 2^M$ допустимых шаблонов, т.е. подмножеств совместимых режимов $P \subseteq M$, которые могут использоваться совместно в любой момент времени $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$.

Слайс $(t', t''; P)$ называется выполнимым, если для некоторого $k \in \{1, \ldots, D-1\}$ выполнено $[t', t''] \subseteq [\tau_k, \tau_{k+1}]$, $P \in P(k)$.

Следует заметить, что в большинстве практических ситуаций семейства $P(k)$ замкнуты по включению, т.е. из $P \subset P'$ и $P' \in P(k)$ следует $P \in P(k)$. Однако в нашей модели мы не будем требовать выполнения этого свойства, тем самым, допуская существование таких ситуаций, когда технологические ограничения требуют одновременного использования заданного набора режимов (или определённого подмножества операций) или хотя бы одного набора из заданного семейства допустимых наборов. Будем предполагать, что среди допустимых шаблонов имеется и «пустой» шаблон $\varnothing \in P(k)$, допуская, что в какие-то промежутки времени в интервале планирования $[\tau_1, \tau_D]$ все операции и все ресурсы могут простаивать. (Например, такая ситуация типична для конца интервала планирования.)

Требование полного выполнения. Пусть задано полное расписание с прерываниями $S = \{(t_i', t_i''; P_i) \mid i \in I\}$, и пусть $s_{ji} = \Sigma\, \{\mu \in P_i \cap M(o_j)\}\; s_\mu$ обозначает суммарную скорость выполнения операции o_j в шаблоне P_i. Тогда должны выполняться равенства

$$\sum_{i \in I} s_{ji}(t_i'' - t_i') = q_j \text{, по всем } o_j \in O.$$

Кроме того, для любой операции o_j нулевого объёма $(q_j = 0)$ должен быть хотя бы один слайс $\hat{S}_i \in S$, такой что $P_i \cap M(o_j) \neq \varnothing$.

Ограничения предшествования на множестве операций O задаются ориентированным взвешенным графом $G = (O, U)$, вершинами которого являются операции заданного примера, а каждой дуге $(o_i, o_j) \in U$ приписан вес $p_{ij} \in R$ (который может быть отрицательным). Наличие дуги $(o_i, o_j) \in U$ накладывает ограничения

$$C_i + p_{ij} \leq S_j. \qquad (1.2.1)$$

В случае, когда все веса неотрицательны $(p_{ij} \geq 0)$, они обычно называются *задержками*. Мы, однако, будем допускать и отрицательные веса p_{ij}.

Полное расписание S, построенное для заданного примера задачи GP, называется допустимым, если оно удовлетворяет ограничениям совместности, предшествования и требованию полноты выполнения каждой операции.

Целевые функции**.** Пусть K целевых функций $F_1(C), \ldots, F_K(C)$, зависящих от вектора $C = (C_1, \ldots, C_\xi)$ моментов завершения операций, заданы в каждой точке ξ-мерной области $[\tau_1, \tau_D]^\xi$. Целью решения задачи является построение допустимого расписания S, лексикографически минимизирующего заданную последовательность $(F_1(C), \ldots, F_K(C))$ целевых функций.

Суммируя вышесказанное, задача GP может быть сформулирована следующим образом.

Задача GP — это задача лексикографической минимизации заданной последовательности $(F_1(C), \ldots, F_K(C))$ целевых функций (каждая из которых зависит от вектора $C = (C_1, \ldots, C_\xi)$ моментов завершения операций) на множестве полных расписаний с прерываниями $S = \{(t_i', t_i''; P_i) \mid i \in I\}$, удовлетворяющих требованию полного выполнения операций и ограничениям совместности режимов и предшествования на множестве операций.

Приведём несколько примеров известных задач теории расписаний, являющихся частными случаями задачи GP.

Ограничения совместности могут препятствовать одновременной реализации (выполнению):

- двух различных режимов μ, μ' одной и той же операции, если эти режимы не принадлежат одновременно шаблону $P \in \mathcal{P}$;
- двух операций o и o', принадлежащих одной и той же работе J_j, как в классических цеховых моделях (см. [Lawler et al., 1993]), если $M(o) \cap P \neq \varnothing$ влечёт $M(o') \cap P = \varnothing$;

- двух операций, выполняемых на одной и той же машине (процессоре) единичной мощности;
- более общо, — любого подмножества режимов Q, требующего большего количества ресурса, чем доступно в любой точке t интервала $(\tau_k, \tau_{k+1}]$, если Q не содержится целиком ни в одном из шаблонов $P \in P(k)$.
- Соглашение о непересекаемости наборов режимов, относящихся к разным операциям, даёт нам возможность моделировать ситуации персональной несовместимости. Рассмотрим следующий пример: операции 1,2,3 обозначают сдачу экзаменов студентами A,B,C; при этом есть два экзаменатора: D and E, выполняющих роль ``машин'', на которых эти операции должны быть выполнены. Пусть режимы 1 и 2 соответствуют сдаче экзамена студентом A (экзаменаторам D и E соответственно); аналогично, режимы 3,4 соответствуют студенту B, а режимы 5,6 — студенту C. Может возникнуть ситуация, когда каждый из экзаменаторов может принимать экзамен одновременно у двух студентов, за исключением персонального случая, когда студентами являются A и B, а экзаменатором — E (по причине их несовместимых личных отношений). Другими словами, комбинация режимов 2+4 запрещена. Очевидно, было бы трудно отразить это ограничение, если бы выполнение всякой операции на одной и той же машине считалось бы одним и тем же режимом, и таким образом, мы не могли бы различать режимы 2,4,6.

Разрешение семейству допустимых шаблонов $P(k)$ изменяться во времени позволяет нам моделировать:

- директивные интервалы использования режимов, с помощью которых режим $\mu \in M$ не может использоваться до заданного момента r_μ включения режима μ и после момента $\bar{d}_\mu$ его выключения; такие временные ограничения могут быть использованы для моделирования моментов появления *работ* и директивных сроков их окончания;
- календарь доступности какого-либо ресурса; как следствие, выполнение любой операции в режиме, использующем данный ресурс, ограничивается одним или несколькими временными интервалами;
- более общо, — ограничение для любого заданного подмножества режимов быть используемым в заданном конечном подмножестве временных интервалов.

Календари доступности ресурсов могут быть использованы для планирования технического ремонта и замены оборудования, для моделирования изменяющихся во времени (но кусочно-постоянных) скоростей машин и функций количества произведённого продукта, а также для моделирования определённых форм невозобновимых ресурсов. Примерами классических задач теории расписаний, попадающих в рамки рассматриваемой общей задачи, являются: задача job shop с прерываниями и ограничениями предшествования $J \mid prec, pmtn \mid F$ и задача на параллельных неродственных машинах $R \mid r_j, \bar{d}_j, prec, pmtn \mid F$ с заданными моментами появления работ, жёсткими директивными сроками и ограничениями предшествования.

Далее, ограничения предшествования вида (1) дают возможность моделирования многих интересных ограничений на порядок выполнения операций. Например:

- ...чтобы заставить две операции стартовать (или завершиться) в один и тот же момент времени в любом допустимом расписании. Для простоты рассмотрим случай, когда каждая операция o_i имеет фиксированную длину p_i. Тогда, чтобы обеспечить данное свойство для операций o_i, o_j, достаточно добавить в граф G две дуги: (o_i, o_j) и (o_j, o_i); если этим дугам присвоить веса $p_{ij} = -p_i$, $p_{ji} = -p_j$, то операции всегда будут стартовать одновременно. Наоборот, если положить $p_{ij} = -p_j$, $p_{ji} = -p_i$, то операции будут одновременно завершаться в любом допустимом расписании;
- ...чтобы заставить несколько операций выполняться в любом допустимом расписании ``в одной связке", так что никакая операция в связке не слишком опережает и не слишком отстаёт от других. Например, операции o_1, o_2, o_3 должны быть выполнены на одной машине подряд, без задержек и без простоев машины; при этом порядок выполнения операций не фиксирован (т.е. следует обеспечить возможность выбора любого из шести порядков). Для обеспечения этого свойства достаточно для каждой пары $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, обеспечить существование в графе G дуги (o_i, o_j) длины $p_{ij} = -p_1 - p_2 - p_3$ и обеспечить требование несовместности любых двух операций o_i, o_j $(i, j \in \{1,2,3\})$ при задании допустимых шаблонов. Если же мы хотим зафиксировать порядок $o_1 \to o_2 \to o_3$, то достаточно положить $p_{12} = p_{23} = 0$,.. $p_{31} = -p_1 - p_2 - p_3$;
- ...чтобы заставить операцию o_i выполняться внутри временного интервала заданной длины ℓ_i (при этом не фиксированного во времени), добавляем в граф G петлю (o_i, o_i) длины $p_{ii} = -\ell_i$. В частности, для предотвращения какого-либо простоя при

выполнении данной операции, следует положить $\ell_i = p_i$ (хотя это не может предотвратить возможности прерывания операции каким-либо слайсом нулевой длины).

Следует иметь в виду, что такие ограничения не могут быть реализованы без использования контуров и дуг отрицательного веса в графе G.

Общие результаты

Этот раздел мы начинаем с Теоремы о Конечности, согласно которой каждый раз, когда для задачи GP существует оптимальное расписание, существует и оптимальное расписание с конечным (и даже полиномиально ограниченным от размера входа) числом прерываний. Следующая Теорема о Существовании Оптимума устанавливает существование оптимального расписания для заданного примера задачи GP, на котором достигается лексикографический минимум вектора значений K приоритетно упорядоченных *регулярных* целевых функций, при условии, что множество допустимых решений для этого примера не пусто.

Конечность числа прерываний

Будем говорить, что нулевой слайс $(t_i', t_i''; P_i)$, $t_i' = t_i''$, визирует завершение операции o_j в расписании S, если он выполняется в точке окончания операции o_j, его шаблон P_i является допустимым для этой точки и содержит хотя бы один режим $\mu \in M(o_j)$ операции o_j.

Лемма **(**о конечности числа слайсов**).** Если для заданного примера задачи GP существует допустимое полное расписание S, то существует допустимое полное расписание S' с такими же значениями моментов окончания операций и с не более чем $(2\xi + D - 1)H + \xi$ слайсами, из которых не более ξ нулевых, где ξ — число операций, D — число фиксированных дат, H — число допустимых шаблонов.

Из доказанной леммы непосредственно следует

Теорема 1 (о конечности числа прерываний). Если для заданного примера задачи GP существует оптимальное расписание, то существует и оптимальное расписание с не более чем $(2\xi + D - 1)H + \xi$ слайсами, где ξ — число операций, D — число фиксированных дат, H — число допустимых шаблонов.

Следует заметить, что критическим фактором, обеспечивающим конечность числа слайсов в оптимальном расписании, является конечность числа фиксированных дат и числа операций. В следующем примере с бесконечным числом фиксированных дат любое оптимальное расписание имеет бесконечное число слайсов (и, следовательно, бесконечное число прерываний), в то время как существуют допустимые расписания, не имеющие прерываний.

Рассмотрим пример с единственной операцией единичной длины на минимум длины расписания. Операция потребляет ресурс, доступный во временных интервалах $[5/2^i, 6/2^i]$, $(i = 0,1,\ldots)$. Хотя возможно полное выполнение операции в интервале [5,6] без единого прерывания, для достижения оптимального значения $C_{\max} = 3$ мы вынуждены сделать бесконечное число прерываний этой операции.

В следующей теореме устанавливаются достаточные условия существования оптимального решения в задаче с прерываниями операций и несколькими (лексикографически упорядоченными) критериями.

Теорема 2 (о существовании оптимального расписания). Если все целевые Функции $F_1(C),\ldots,F_K(C)$ задачи GP являются регулярными, то для любого примера задачи GP, имеющего непустое множество допустимых расписаний, существует оптимальное расписание S, лексикографически минимизирующее вектор-функцию $(F_1(C(S)),\ldots,F_K(C(S)))$.

Далее для двух подзадач GP’ и GP’’ задачи GP мы устанавливаем две теоремы о структурных свойствах оптимальных расписаний (при условии их существования). Подзадачи GP’ и GP’’ базируются на той же общей модели, что и задача GP, но сформулированы для более специальных критериев. Прежде всего, вместо лексикографической минимизации нескольких функций будет рассматриваться случай минимизации единственной целевой функции (K=1). В качестве таковой будут рассматриваться функции не от моментов окончания операций (как это было в предыдущих разделах), а от моментов окончания заданных подмножеств операций.

Для заданного расписания S определяем момент окончания подмножества операций $B \in 2^O$ как $\hat{C}(B,S) = \max_{o_j \in B} C_j(S)$.

Постановки задач с подобными критериями являются довольно типичными для раздела теории расписаний, изучающего многостадийные системы, где в качестве подмножеств операций чаще всего рассматриваются множества операций отдельных работ. Кроме того, при наличии в системе нескольких машин целевая функция может зависеть от моментов завершения работы отдельных машин, определяемых на множествах операций каждой машины.

Следует заметить, что само по себе различие между функциями, зависящими от моментов окончания подмножеств операций, и функциями, зависящими от моментов окончания операций, не ограничивает общности, поскольку всякая функция $F(\hat{C}(S)) = F(\hat{C}_1(S),\dots,\hat{C}_N(S))$ от моментов окончания подмножеств операций $B_1,\dots,B_N$ после подстановки $\hat{C}_i(S) = \max_{o_j \in B_i} C_j(S)$ становится функцией $F'(C_1(S),\dots,C_\xi(S))$ от моментов окончания операций. (Более того, если $F(x)$, $x \in R^N$ регулярна, то и функция $F'(y)$, $y \in R^\xi$, будет регулярной — неубывающей и непрерывной слева.) Более существенным ограничением общности наших результатов является то, что будут рассматриваться специальные классы функций $F(\hat{C}(S))$. В первой теореме это будут функции вида

$$F(\hat{C}(S)) = \sum_{i=1}^{N} f_i(\hat{C}_i(S)), \tag{1.2.2}$$

а во второй теореме — функции вида

$$F(\hat{C}(S)) = \max_{i=1,\dots,N} f_i(\hat{C}_i(S)) \tag{1.2.3}$$

В обоих случаях в качестве функций $f_i(x)$ рассматриваются неубывающие кусочно-линейные функции на отрезке $[\tau_1, \tau_D]$, определяемые соотношениями

$$f_i(x) = \alpha_{i0}, \text{ для } x = \tau_1; \quad f_i(x) = \alpha_{ik} + \beta_{ik} x, \text{ для } x \in (\tau_k, \tau_{k+1}],\ k = 1,\dots,D-1. \tag{1.2.4}$$

Неубываемость функций $f_i(x)$ обеспечивается соотношениями

$$\alpha_{i1} \ge \alpha_{i0}, \text{ для всех } i; \quad \beta_{ik} \ge 0,\ \alpha_{ik} - \alpha_{i,k+1} \le (\beta_{i,k+1} - \beta_{ik})\tau_{k+1}, \text{ для всех } i,k.$$

Следует заметить, что, несмотря на специальный вид целевых функций задач GP’ и GP’’, определяемых соотношениями (1.2.2),(1.2.4) и (1.2.3),(1.2.4), они, тем не менее, покрывают значительную часть классических целевых функций, рассматриваемых в теории расписаний. Так, например, класс аддитивных функций вида (1.2.2),(1.2.4) включает в себя взвешенные суммы таких параметров расписания как: временное смещение работы J_j (lateness, L_j), запаздывание (tardiness, T_j), время нахождения в системе (flow time, F_j), и даже представляемый разрывной функцией параметр опоздание (U_j). Кроме того, такая классическая целевая функция как длина расписания (makespan, $C_{\max}$) легко представляется в виде единственной функции $f_1(\hat{C}_1(S))$, где $f_1(x) = x$, а единственное множество операций B_1 совпадает со всем множеством операций.

В то же время, класс функций, определяемых соотношениями (1.2.3),(1.2.4), покрывает такие целевые функции как: максимальное временное смещение $(L_{\max})$, максимальное запаздывание $(T_{\max})$, максимальное время нахождения в системе $(F_{\max})$, а также их обобщения на случай максимального взвешенного временного смещения

$(WL_{\max} = \max_j w_j L_j)$, максимального взвешенного запаздывания $(WT_{\max} = \max_j w_j T_j)$, максимального взвешенного времени нахождения в системе $(WF_{\max} = \max_j w_j F_j)$, максимального штрафа за опоздание $(WU_{\max} = \max_j w_j U_j)$ и максимального взвешенного времени завершения работы $(WC_{\max} = \max_j w_j C_j)$.

В совокупности оба класса покрывают практически всё множество классических целевых функций, зависящих от моментов завершения работ.

В первой теореме будет рассматриваться задача GP’ с целевой функцией из класса неубывающих аддитивных кусочно-линейных функций вида (1.2.2),(1.2.4), зависящих от вектора $\hat{C}(S) = (\hat{C}_1(S),\ldots,\hat{C}_N(S))$ моментов завершения заданных подмножеств операций. Как уже упоминалось ранее, данная теорема обобщает результаты из [Sauer&Stone, 1987], [Sauer&Stone, 1989] для параллельных машин с ограничениями предшествования.

Теорема 3 (о рациональной структуре I). Пусть рассматривается задача GP’ с ξ операциями, D фиксированными датами и аддитивной целевой функцией $F(\hat{C}(S)) = \sum_{i=1}^{N} f_i(\hat{C}_i(S))$, от моментов завершения подмножеств операций $B_1,\ldots,B_N$, где $f_i(x)$ — неубывающие кусочно-линейные функции, определяемые согласно (1.2.4). Тогда для любого примера этой задачи, имеющего непустое множество допустимых решений, существует оптимальное расписание S' со следующими свойствами:

- Расписание содержит не более $\xi^2 + \xi + D - 1$ положительных слайсов. Если во всех ограничениях предшествования (1.2.1) Выполнено $p_{ij} = 0$, т.е. между последовательно выполняемыми операциями нет ни положительных, ни отрицательных задержек, то имеется не более $\xi + D - 1$ положительных слайсов.
- Если все длительности операций, величины скоростей и все фиксированные даты являются целыми числами, то существует рациональное число δ, длина записи которого ограничена полиномом от длины записи входа, и такое что каждая точка переключения в расписании S' кратна δ.
- Если, дополнительно, все коэффициенты $\{\alpha_{ik}, \beta_{ik}\}$ целевой функции (1.2.2),(1.2.4) целые, то оптимум целевой функции также кратен δ.

Аналогичная теорема имеет место для задачи GP’’ с целевой функцией, определяемой соотношениями (1.2.3),(1.2.4).

Теорема 4 (о рациональной структуре II). Пусть рассматривается задача GP’’ с ξ операциями, D фиксированными датами и целевой функцией $F(\hat{C}(S)) = \max_{i=1,\ldots,N} f_i(\hat{C}_i(S))$ от моментов завершения подмножеств операций $B_1,\ldots,B_N$, где $f_i(x)$ — неубывающие кусочно-линейные функции, определяемые согласно (1.2.4). Тогда для любого примера этой задачи, имеющего непустое множество допустимых решений, существует оптимальное расписание S'' со следующими свойствами:

- Расписание содержит не более $\xi^2+\xi+D+N-2$ положительных слайсов. Если во всех ограничениях предшествования (1.2.1) выполнено $p_{ij}=0$, т.е. между последовательно выполняемыми операциями нет ни положительных, ни отрицательных задержек, то имеется не более $\xi+D+N-2$ положительных слайсов.
- Если все входные данные являются целыми числами, то существует рациональное число δ, длина записи которого ограничена полиномом от длины записи входа, и такое что каждая точка переключения в расписании S'', а также оптимум целевой функции кратны δ.

Далее мы рассмотрим более частные по сравнению с задачей GP (и в то же время, достаточно общие) задачи с прерываниями операций, для которых устанавливаются более сильные структурные свойства оптимальных решений. Наиболее сильным таким свойством является свойство редукции прерываний, когда показывается, что можно вообще обойтись без прерываний, т.е. для любого примера данной задачи существует оптимальное расписание, в котором ни одна из операций не прерывается. Такое свойство будет показано нами для задачи на идентичных параллельных машинах, с неодновременным поступлением работ и ограничениями предшествования на множестве работ в виде изолированных цепей. При этом предполагается, что длительности всех работ единичны, т.е. каждая работа состоит из единственной единичной операции. В случае, когда это не так, т.е. когда длительности работ — произвольные целые числа, свойство редукции прерываний преобразуется в свойство целочисленности моментов прерываний. В качестве критерия оптимальности рассматривается минимизация произвольной регулярной единично-вогнутой функции от моментов окончания работ. В стандартной системе нотации такая задача кратко записывается как $\langle P \mid r_j, pmtn, chains, p_j = 1 \mid F(C_1,\ldots C_n)\rangle$.

Определение**.** Функция $F(x)$ $(x \in R^n)$ называется единично-вогнутой, если для любого $\lambda \in [0,1]$ и любых векторов $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$, где $x_i, y_i \in [t_i, t_i+1]$ для некоторого единичного целочисленного интервала $[t_i, t_i+1]$, $i=1,\ldots,n$ (t_i — целые), выполняется неравенство

$$F(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda F(x)+(1-\lambda)F(y).$$

Теорема 5. Для любого примера задачи $\langle P \mid r_j, pmtn, chains, p_j=1 \mid F(C_1,\ldots C_n)\rangle$ с целочисленными длительностями и моментами появления работ, на минимум произвольной регулярной единично-вогнутой функции $F(C_1,\ldots C_n)$ от моментов завершения работ, существует оптимальное расписание, в котором все прерывания, также как и моменты начала и завершения работ происходят в целочисленные моменты времени.

Непосредственным следствием данного результата является свойство редукции прерываний для широкого класса задач теории расписаний с единичными длительностями работ. В частности, это закрывает две открытые проблемы о выполнимости свойства редукции прерываний для задач $\langle P \mid r_j, pmtn, chains, p_j=1 \mid \sum w_j T_j\rangle$ и $\langle P \mid r_j, pmtn, chains, p_j=1 \mid \sum w_j U_j\rangle$. Из этого свойства также следует, что каждая такая задача (с единичными длительностями и прерываниями операций) эквивалентна своей «беспрерывной» версии как с точки зрения значений их оптимумов, так и с точки зрения сложности этих задач. Эта эквивалентность предоставляет также новое, более простое доказательство некоторых известных результатов по сложности. В частности, из нашей Теоремы 5 следует NP-трудность задач $\langle Pm \mid pmtn, chains, p_j=1 \mid \sum w_j C_j\rangle$ и $\langle Pm \mid pmtn, chains, p_j=1 \mid \sum U_j\rangle$ (доказанная ранее в работах [Baptiste et al., 2004], [Du, Leung, and Young, 1991] и [Timkovsky, 2003]) и полиномиальная разрешимость задачи $\langle P \mid r_j, pmtn, p_j=1 \mid \sum w_j T_j\rangle$, установленная Баптистом [Baptiste, 2002].

Аналогичное свойство целочисленности всех прерываний в оптимальном расписании устанавливается нами для так называемых цеховых задач теории расписаний, рассматривающих проблемы оптимизации работы многостадийных производств со специализированными цехами. Задачи из данного класса также являются частными случаями рассмотренной нами общей задачи GP и включают в себя такие известные классические задачи как задачи job shop, flow shop и open shop. В общем виде модель цехового производства представляется следующим образом.

Цеховая задача**.** Заданы множество *работ* $J=\{J_1,\ldots,J_n\}$, множество машин $M=\{M_1,\ldots,M_m\}$ и множество операций $O=\{O_1,\ldots,O_\eta\}$. Каждая операция $o_k \in O$ принадлежит определённой работе $J(o_k)\in J$ и должна быть выполнена на определённой машине $M(o_k)\in M$ в течение заданного времени p_k (где p_k — неотрицательное целое). В любой момент времени (за исключением, быть может, конечного их числа) может выполняться не более одной операции на каждой машине и не более одной операции каждой работы. Каждая операция может быть прервана в любой момент времени и возобновлена позднее без какого-либо штрафа. На множестве операций каждой работы могут быть установлены предписанные ограничения предшествования.

Дальнейшая классификация цеховых задач основана на детализации вида ограничений предшествования. В общем виде эти ограничения могут быть заданы ориентированным ациклическим графом $G=(O,U)$, вершинами которого являются операции, а наличие дуги $(o_i,o_j)\in U$ между двумя вершинами графа G, задающими операции одной и той же работы, означает, что операция o_j может начаться только после завершения операции o_i. Если не задаётся каких-либо дальнейших ограничений на граф G, то мы имеем дело с наиболее общей цеховой задачей dag shop. Её частный случай, когда граф G пуст (и следовательно, операции каждой работы могут выполняться в произвольном порядке), известен как задача open shop. В другом (противоположном) частном случае, известном как задача job shop, на множестве операций каждой работы задан полный (линейный) порядок. Используя стандартные трёхпольные обозначения для этих задач, мы будем писать в первом поле одну из букв $J,F,\hat{O}$ для обозначения задач job shop, flow shop и open shop, соответственно, оставляя букву O для обозначения классического варианта задачи open shop, в котором каждая работа имеет в точности одну операцию на каждой машине.

Для сформулированных выше задач нами получены результаты двух типов. Во-первых, мы получаем верхние оценки на число прерываний в оптимальном расписании задачи dag shop. После этого мы устанавливаем свойство целочисленности прерываний для общей задачи job shop и двухмашинной задачи dag shop для целевых функций довольно общего вида. Мы также показываем, что для трёхмашинной задачи dag shop свойство целочисленности прерываний не выполняется уже для такого частного критерия как минимум длины расписания, причём – уже в частном случае, когда каждая работа имеет не более двух операций.

Теорема 6. Для любого примера задачи dag shop с разрешением прерываний операций, m машинами и регулярным критерием $F(C_1,\dots,C_\eta)$ существует активное оптимальное расписание с не более чем $O(\min\{\xi^2 m,\xi m^3\})$ прерываниями, где ξ — число ненулевых операций.

Теорема 7. Пусть $F(x_1,\ldots,x_\eta)$ — неубывающая функция, принимающая лишь конечное число значений. Тогда для любого примера задачи dag shop с разрешением прерываний операций и m машинами, на минимум функции $F(C_1,\ldots,C_\eta)$ от моментов окончания работ существует активное оптимальное расписание с не более чем $O(\min\{\xi^2 m, \xi m^3\})$ прерываниями, где ξ — число ненулевых операций.

Нетрудно убедиться, что все классические целевые функции удовлетворяют условиям, налагаемым на целевую функцию в Теореме 6. Более того, такая целевая функция как суммарное взвешенное число опоздавших работ $\sum w_j U_j$ удовлетворяет как условиям Теоремы 6 (она неубывающая и непрерывна слева), так и условиям Теоремы 7 (поскольку она может принимать лишь конечное число значений).

Далее мы рассматриваем классическую задачу job shop на минимум произвольной регулярной функции от моментов окончания операций. Мы показываем, что для этой общей задачи выполнено свойство целочисленности прерываний.

Теорема 8. Для любого примера задачи job shop с разрешением прерываний операций и регулярным критерием $F(C_1,\ldots,C_\eta)$ существует оптимальное S расписание со следующими свойствами:

(a) *S* является активным расписанием с прерываниями;

(b) Множество всех точек переключения в расписании *S* совпадает с множеством моментов окончания операций;

(c) Если все длительности операций – целые числа, то все точки переключения в расписании *S* – также целые.

Замечание**.** Из свойства (b) предыдущей теоремы следует, что для любого примера рассматриваемой задачи с не более чем ξ ненулевыми операциями существует оптимальное расписание с не более чем ξ точками переключения.

К сожалению, нам не удалось доказать свойство целочисленности прерываний для более общей задачи dag shop с произвольным регулярным критерием (даже если рассматривается задача с не более чем двумя машинами). Это свойство доказывается нами для более ограниченного класса функций (включающего, тем не менее, многие интересные классические критерии).

Определение**.** Пусть D – выпуклая область в R^n. Мы говорим, что функция *F(x)*, определённая в области *D*, является квази-вогнутой, если для любых $x', x'' \in D$ и любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполняется неравенство $F(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \ge \min\{F(x'), F(x'')\}$.

Теорема 9. Для любого примера двухмашинной задачи dag shop с разрешением прерываний операций, ξ ненулевыми операциями и произвольной регулярной квази-вогнутой целевой функцией от моментов окончания заданных подмножеств операций существует оптимальное расписание, в котором:

(a) имеется не более ξ слайсов и не более ξ прерываний операций;

(b) если все длительности операций – целые числа, то все точки переключения в расписании – также целые.

Усматривая некоторую двойственность понятий «работа» и «машина» в доказательстве сформулированной выше теоремы, удаётся доказать следующую теорему.

Теорема 10. Для любого примера задачи dag shop с двумя работами, разрешением прерываний операций, ξ ненулевыми операциями и произвольной регулярной квази-вогнутой целевой функцией от моментов окончания заданных подмножеств операций существует оптимальное расписание, в котором:

(c) имеется не более ξ слайсов и не более ξ прерываний операций;

(d) если все длительности операций – целые числа, то все точки переключения в расписании – также целые.

Как показывает следующий пример задачи dag shop на минимум длины расписания, свойство целочисленности прерываний не может быть распространено на случай трёхмашинной задачи dag shop или задачи с тремя работами.

В примере имеется три работы, выполняющиеся на трёх машинах. Каждая работа имеет две операции.

Работа J_1 выполняется по технологии job shop. Её первая операция выполняется на машине M_1 и имеет длительность 1. Вторая операция выполняется на машине M_2 и имеет длительность 2.

Работа J_2 (также выполняющаяся по технологии job shop) имеет две единичных операции. Первая операция выполняется на машине M_1, вторая – на машине M_3.

Работа J_3 выполняется по технологии open shop (т.е. её операции могут выполняться в любом порядке). Первая операция длительности 1 выполняется на машине M_2, вторая – длительности 2 на машине M_3.

Критерием оптимальности является минимум длины расписания. Для данного примера нетрудно построить расписание выполнения работ с одним прерыванием за 3.5 единицы времени. Как показывает анализ, не существует расписания меньшей длины, как и не существует оптимального расписания без прерываний операций.

1.3. Оценка сложностного статуса и построение эффективных алгоритмов с оценками точности для некоторых труднорешаемых задач анализа данных

1.3.1. О сложности некоторых задач кластерного анализа

Предмет исследования настоящего раздела – некоторые актуальные задачи кластеризации конечного множества векторов евклидова пространства. Цель исследования – анализ алгоритмической сложности этих задач.

Проблемы кластерного анализа исследуются более полувека. Из недавно опубликованного обзора [Anil&Jain, 2010] видно, что принципы, критерии, модели, задачи, методы и алгоритмы кластеризации рассматривались в тысячах публикаций. При этом скорость разработки алгоритмов (как правило, эвристических и не имеющих теоретических гарантий по точности) для решения разнообразных прикладных задач значительно опередила скорость изучения алгоритмической сложности редуцированных оптимизационных задач, к которым сводятся прикладные проблемы. Статус сложности многих редуцированных задач до настоящего времени остается невыясненным, хотя интуитивно и гипотетически они считаются NP-трудными. Между тем, выяснение сложностного статуса позволяет решить вопросы о существовании, как точного полиномиального алгоритма решения редуцированной экстремальной задачи, так и эффективного алгоритма, гарантирующего оптимальность решения соответствующей прикладной проблемы. Поэтому изучение алгоритмической сложности задач кластерного анализа и их систематизация является важным направлением исследований.

В данном разделе анализируется алгоритмическая сложность нескольких похожих по постановке задач кластерного анализа. Мотивацией исследований послужил тот факт, что статус сложности этих задач не был известен. В постановочном плане они близки к хорошо известной ([Aloise&Hansen, 2007], [Aloise et al, 2008], [Mahajan et al, 2009],[Долгушев и Кельманов, 2010]) NP-полной задаче MSSC (Minimum-Sum-of-Squares Clustering) – кластеризации множества векторов евклидова пространства по критерию минимума суммы квадратов расстояний от элементов кластеров до их центров. В некоторых публикациях ([Anil&Jain, 2010], [Mahajan et al, 2009], [MacQueen, 1967]) эта же задача фигурирует под названием k-Means. Рассматриваемые задачи по постановке близки также к тем задачам кластерного анализа, NP-полнота которых была установлена в [Кельманов и Пяткин, 2008,2009,2010]. Для пояснения отличий задач, исследуемых в настоящей работе, от задач, изученных ранее, рассмотрим одну из возможных содержательных трактовок анализируемой проблемы.

Имеется совокупность (таблица), включающая несколько результатов измерения набора (вектора) каких-либо характеристик для элементов из некоторого множества материальных объектов. Каждый объект может находиться в двух состояниях: активном и пассивном. В пассивном состоянии значения всех измеряемых характеристик из набора равны нулю, а в активном – значение хотя бы одной характеристики не равно нулю. Для активных состояний одной части объектов из множества известен алфавит эталонных наборов значений всех характеристик. Для активных состояний другой части объектов этого множества аналогичные данные отсутствуют (неизвестны). В каждом результате измерения имеется ошибка, причем соответствие между объектом и результатом измерения его характеристик неизвестно. Требуется, используя критерий минимума суммы квадратов расстояний, разбить совокупность наборов на три семейства непересекающихся подмножеств так, что: 1) первое семейство состоит из единственного множества, содержащего наборы, соответствующие пассивному состоянию всех объектов, 2) второе семейство состоит из подмножеств, каждое из которых содержит наборы, соответствующие активному состоянию одного объекта, имеющего известные характеристики, 3) третье семейство состоит из подмножеств, каждое из которых содержит наборы, соответствующие активному состоянию одного объекта с неизвестными характеристиками. Одновременно с разбиением требуется оценить неизвестные характеристики для части объектов в активном состоянии, учитывая, что данные содержат ошибку измерения. Судя по обзору [Anil&Jain, 2010], сформулированная содержательная проблема характерна и актуальна для широкого спектра приложений, связанных с анализом данных и распознаванием образов.

Отличие рассматриваемых ниже задач, к которым сводится сформулированная проблема, от близких аналогов состоит в следующем. Задача MSSC ориентирована на случай, когда анализируемая совокупность наборов (данных) состоит лишь из третьего семейства. В задачах, изучавшихся в [Кельманов и Пяткин, 2008,2009], предполагалось, что заданная на входе совокупность наборов состоит только из первого и третьего семейства. В [Кельманов и Пяткин, 2010] анализировалась еще более простая задача, когда во множестве наборов требовалось найти всего один многоэлементный кластер или подмножество фиксированной мощности в предположении, что входная совокупность наборов включает, во-первых, соответствующее подмножество результатов измерения только для одного объекта, который может находиться лишь в активном состоянии, а во-вторых, эта совокупность содержит произвольные и не «похожие» между собой наборы.

Раздел имеет следующую структуру. В первой части приведены формулировки и дан мини обзор тех известных NP-полных задач кластеризации по критерию минимума суммы квадратов расстояний, которые наиболее близки к рассматриваемым задачам. Формулировки возможных вариантов задач, соответствующих содержательной проблеме, изложенной во введении, даны в следующем разделе. Далее доказано, что эти задачи относятся к классу труднорешаемых задач дискретной оптимизации. Возможные подходы, методы и эффективные алгоритмы с оценками для решения этих задач не являются предметом настоящего исследования, но их изучение представляются делом ближайшей перспективы.

1.3.1.1. Некоторые близкие аналоги задачи MSSC

Одна из самых известных задач кластеризации имеет следующую формулировку в форме верификации свойств.

Задача MSSC.

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральное число $J>1$ и положительное число A. Вопрос: существует ли разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества (кластеры) $C_1,C_2,\ldots,C_J$ такое, что имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{\mathbf{y}\in C_j}\|\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}(C_j)\|^2\le A, \tag{1.3.1.1.1}$$

где $\overline{\mathbf{y}}(C_j)=\dfrac{1}{|C_j|}\sum_{\mathbf{y}\in C_j}\mathbf{y}$, $j=1,2,\ldots,J$, – центр j-го кластера?

NP-полнота различных вариантов этой задачи (обусловленных тем, что размерность пространства и число кластеров могут являться и не являться частью входа задачи) была установлена совсем недавно в ([Aloise&Hansen, 2007], [Aloise et al, 2008], [Mahajan et al, 2009],[Долгушев и Кельманов, 2010]. Более ранние публикации содержали ошибки в доказательстве, что было отмечено в [Aloise&Hansen, 2007], [Aloise et al, 2008].

К числу менее изученных в алгоритмическом плане NP-полных задач [Кельманов и Пяткин, 2008,2009,2010] относятся следующие разновидности задачи кластеризации по критерию минимума суммы квадратов расстояний.

Задача MSSC-Case.

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральное число $M>1$ и положительное число A. Вопрос: существует ли разбиение множества $\mathcal{Y}$ на $J=N-M+1$ непустых кластеров $C_1,C_2,\ldots,C_{N-M+1}$ такое, что мощность одного из кластеров равна M и справедливо неравенство (1.3.1.1.1).

Из формулировки легко видеть, что эта задача соответствует ситуации (упомянутой во введении), когда во множестве векторов требуется найти всего один M-элементный кластер и $N-M$ одноэлементных кластеров [Кельманов и Пяткин, 2010].

Задача MSSC-N

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральное число J и положительное число A. Вопрос: существует ли разбиение множества $\mathcal{Y}$ на кластеры $C_1,C_2,\dots,C_J$ и $\mathcal{B}=\mathcal{Y}\setminus(\cup_j C_j)$ такое, что справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{\mathbf{y}\in C_j}\|\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}(C_j)\|^2+\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\|\mathbf{y}\|^2\le A, \qquad (1.3.1.1.2)$$

где $\overline{\mathbf{y}}(C_j)=\frac{1}{|C_j|}\sum_{\mathbf{y}\in C_j}\mathbf{y}$, $j=1,2,\dots,J$, – центр j-го кластера?

Задача MSSC-F

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральные числа $M_1,M_2,\dots,M_J$ и положительное число A. Вопрос: существует ли разбиение множества $\mathcal{Y}$ на кластеры $C_1,C_2,\dots,C_J$ и $\mathcal{B}=\mathcal{Y}\setminus(\cup_j C_j)$ такое, что имеет место неравенство (1.3.1.1.2), при ограничениях $|C_j|=M_j$, $j=1,2,\dots,J$, на мощности кластеров?

Задачи MSSC-N и MSSC-F, изучавшиеся в [Кельманов и Пяткин, 2008,2009], соответствуют описанной во введении ситуации, когда центр одного из кластеров (это кластер $\mathcal{B}$ в формуле (1.3.1.1.2)) определять не требуется. В практических задачах этот кластер ассоциируется либо с измерительным шумом, который может содержаться в таблице с данными, либо с пассивными состояниями объектов. Символы F и N в названиях задач образованы от английских слов Fixed и Nonfixed для обозначения двух возможных вариантов одной общей проблемы. Эти варианты индуцируются наличием (Fixed) или отсутствием (Nonfixed) ограничений на мощности искомых кластеров $C_1,C_2,\dots,C_J$. Следует отметить, что задачи MSSC-N и MSSC-F являются NP-полными даже в простейшем случае, когда J=1 [Кельманов и Пяткин, 2008].

1.3.1.2. Неизученные задачи кластерного анализа

Задачи кластеризации, сформулированные ниже, соответствуют содержательной проблеме, изложенной во введении.

Задача MSSC-NN

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_N\}$ и алфавит $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_K\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральное число J и положительное число A. Вопрос: существует ли разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые кластеры $C_1,C_2,\dots,C_J$, $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\dots,\mathcal{B}_K$ и $\mathcal{B}=\mathcal{Y}\setminus((\cup_j C_j)\cup(\cup_k \mathcal{B}_k))$ такое, что имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{\mathbf{y}\in C_j}\|\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}(C_j)\|^2+\sum_{k=1}^{K}\sum_{\mathbf{y}\in \mathcal{B}_k}\|\mathbf{y}-\mathbf{v}_k\|^2+\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\|\mathbf{y}\|^2\le A? \qquad (1.3.1.2.1)$$

где $\overline{\mathbf{y}}(C_j)=\frac{1}{|C_j|}\sum_{\mathbf{y}\in C_j}\mathbf{y}$, $j=1,2,\ldots,J$, – центр j-го кластера?

Задача MSSC-FN

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ и алфавит $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_K\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральные числа $M_1,M_2,\ldots,M_J$ и положительное число A. *Вопрос*: существует ли разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые кластеры $C_1,C_2,\ldots,C_J$, $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\ldots,\mathcal{B}_K$ и $\mathcal{B}=\mathcal{Y}\setminus((\cup_j C_j)\cup(\cup_k \mathcal{B}_k))$ такое, что справедливо неравенство (1.3.1.2.1), при ограничениях $|C_j|=M_j$, $j=1,2,\ldots,J$, на мощности кластеров?

Задача MSSC-NF

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ и алфавит $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_K\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральные числа $N_1,N_2,\ldots,N_K$ и положительное число A. Вопрос: существует ли разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые кластеры $C_1,C_2,\ldots,C_J$, $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\ldots,\mathcal{B}_K$ и $\mathcal{B}=\mathcal{Y}\setminus((\cup_j C_j)\cup(\cup_k \mathcal{B}_k))$ такое, что имеет место неравенство (1.3.1.2.1), при ограничениях $|\mathcal{B}_k|=N_k$, $k=1,2,\ldots,K$, на мощности кластеров?

Задача MSSC-FF

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ и алфавит $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_K\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральные числа $M_1,M_2,\ldots,M_J$, $N_1,N_2,\ldots,N_K$ и положительное число A. Вопрос: существует ли разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые кластеры $C_1,C_2,\ldots,C_J$, $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\ldots,\mathcal{B}_K$ и $\mathcal{B}=\mathcal{Y}\setminus((\cup_j C_j)\cup(\cup_k \mathcal{B}_k))$ такое, что справедливо неравенство (1.3.1.2.1), при ограничениях $|C_j|=M_j$, $j=1,2,\ldots,J$, и $|\mathcal{B}_k|=N_k$, $k=1,2,\ldots,K$, на мощности кластеров?

Комбинации последних двух символов – FF, NF, FN и NN – в кратких названиях сформулированных выше задач обозначают четыре возможных варианта одной общей проблемы. Они обусловлены наличием или отсутствием ограничений на мощности элементов из пары семейств $\{C_1,C_2,\ldots,C_J\}$ и $\{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\ldots,\mathcal{B}_K\}$ искомых кластеров. Эта пара семейств кластеров в содержательной трактовке проблемы (см. введение) соответствует двум совокупностям результатов измерения для объектов с неизвестными и известными наборами характеристик в активном состоянии. Кластер $\mathcal{B}$ ассоциируется с пассивным состоянием любого объекта из множества.

Основным результатом настоящей работы является установление статуса NP-полноты сформулированных выше задач.

1.3.1.3. Анализ сложности задач

Для доказательства факта труднорешаемости задач напомним следующие NP-полные [Кельманов, 2010] задачи выбора подмножеств. Символы SVS в кратких названиях этих задач образованы от английского словосочетания Searching Vector Subsets, а комбинации двух последних символов, как и ранее, обозначают возможные варианты проблемы, обусловленные ограничениями на мощности искомых подмножеств.

Задача SVS-NN

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_N\}$ и алфавит $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_K\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральное число J и положительное число D. Вопрос: существуют ли во множестве $\mathcal{Y}$ непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_j^1\subset\mathcal{Y}$, $j=1,2,\dots,J$, и $\mathcal{Y}_k^2\subset\mathcal{Y}$, $k=1,2,\dots,K$, такие, что имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{|\mathcal{Y}_j^1|}\|\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_j^1}\mathbf{y}\|^2+\sum_{k=1}^{K}\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_k^2}\{2(\mathbf{y},\mathbf{v}_k)-\|\mathbf{v}_k\|^2\}\ge D? \qquad (1.3.1.3.1)$$

Задача SVS-FN

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_N\}$ и алфавит $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_K\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральные числа $M_1,M_2,\dots,M_J$ и положительное число D. Вопрос: существуют ли во множестве $\mathcal{Y}$ непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_j^1\subset\mathcal{Y}$, $j=1,2,\dots,J$, и $\mathcal{Y}_k^2\subset\mathcal{Y}$, $k=1,2,\dots,K$, такие, что справедливо неравенство (1.3.1.3.1), при ограничениях $|\mathcal{Y}_j^1|=M_j$, $j=1,2,\dots,J$, на мощности подмножеств?

Задача SVS-NF

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_N\}$ и алфавит $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_K\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральные числа $N_1,N_2,\dots,N_K$ и положительное число D. Вопрос: существуют ли во множестве $\mathcal{Y}$ непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_j^1\subset\mathcal{Y}$, $j=1,2,\dots,J$, и $\mathcal{Y}_k^2\subset\mathcal{Y}$, $k=1,2,\dots,K$, такие, что имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{|\mathcal{Y}_j^1|}\|\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_j^1}\mathbf{y}\|^2+2\sum_{k=1}^{K}\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_k^2}(\mathbf{y},\mathbf{v}_k)\ge D, \qquad (1.3.1.3.2)$$

при ограничениях $|\mathcal{Y}_k^2|=N_k$, $k=1,2,\dots,K$, на мощности подмножеств?

Задача SVS-FF

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_N\}$ и алфавит $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_K\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральные числа $M_1,M_2,\dots,M_J$, $N_1,N_2,\dots,N_K$ и положительное число D. Вопрос: существуют ли во множестве $\mathcal{Y}$ непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_j^1\subset\mathcal{Y}$, $j=1,2,\dots,J$, и $\mathcal{Y}_k^2\subset\mathcal{Y}$, $k=1,2,\dots,K$, такие, что имеет место неравенство (1.3.1.3.2), при ограничениях $|\mathcal{Y}_j^1|=M_j$, $j=1,2,\dots,J$ и $|\mathcal{Y}_k^2|=N_k$, $k=1,2,\dots,K$, на мощности подмножеств?

Теорема 1. Задачи MSSC-NN *и* MSSC-FN NP-*полны*.

Доказательство. Для доказательства заметим, что задачи MSSC-NN и MSSC-FN, очевидно, принадлежат классу задач NP. Установим связь между целевыми функциями задач MSSC-NN и SVS-NN. Для целевой функции задачи MSSC-NN имеем

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{\mathbf{y}\in C_j}\|\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}(C_j)\|^2+\sum_{k=1}^{K}\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}_k}\|\mathbf{y}-\mathbf{v}_k\|^2+\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}}\|\mathbf{y}\|^2$$

$$=\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}}\|\mathbf{y}\|^2-\sum_{j=1}^{J}\sum_{\mathbf{y}\in C_j}\{2(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}}(C_j))-\|\overline{\mathbf{y}}(C_j)\|^2\}-\sum_{k=1}^{K}\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}_k}\{2(\mathbf{y},\mathbf{v}_k)-\|\mathbf{v}_k\|^2\}$$

$$=\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}}\|\mathbf{y}\|^2-\sum_{j=1}^{J}\left\{\frac{2}{|C_j|}\sum_{\mathbf{y}\in C_j}(\mathbf{y},\sum_{\mathbf{u}\in C_j}\mathbf{u})-\frac{1}{|C_j|}\|\sum_{\mathbf{y}\in C_j}\mathbf{y}\|^2\right\}-\sum_{k=1}^{K}\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}_k}\{2(\mathbf{y},\mathbf{v}_k)-\|\mathbf{v}_k\|^2\}$$

$$=\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}}\|\mathbf{y}\|^2-\left\{\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{|C_j|}\|\sum_{\mathbf{y}\in C_j}\mathbf{y}\|^2+\sum_{k=1}^{K}\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}_k}\{2(\mathbf{y},\mathbf{v}_k)-\|\mathbf{v}_k\|^2\}\right\}. \quad (1.3.1.3.3).$$

Первый член в правой части полученного равенства – константа, а второй член – выражение в фигурных скобках – целевая функция задачи SVS-NN от подмножеств $\mathcal{Y}_j^1=C_j$, $j=1,2,\dots,J$, и $\mathcal{Y}_k^2=\mathcal{B}_k$, $k=1,2,\dots,K$. Отсюда следует, что NP-полная задача SVS-NN полиномиально сводится к задаче MSSC-NN. Действительно, из (1.3.1.2.1), (1.3.1.3.1) и (1.3.1.3.3) легко видеть, что разбиение множества $\mathcal{Y}$ на кластеры $C_1,C_2,\dots,C_J$, $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\dots,\mathcal{B}_K$ и $\mathcal{B}=\mathcal{Y}\setminus((\cup_j C_j)\cup(\cup_k\mathcal{B}_k))$ в задаче MSSC-NN существует тогда и только тогда, когда в задаче SVS-NN при $D=\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}}\|\mathbf{y}\|^2-A$ существуют соответствующие непустые подмножества $\mathcal{Y}_j^1$, $j=1,2,\dots,J$, и $\mathcal{Y}_k^2$, $k=1,2,\dots,K$.

Аналогичным образом, используя (1.3.1.2.1), (1.3.1.3.1) и (1.3.1.3.3), устанавливаем полиномиальную сводимость задачи SVS-FN к задаче MSSC-FN. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Задачи MSSC-NF *и* MSSC-FF NP-полны.

Доказательство. Легко удостовериться, что задачи MSSC-NF и MSSC-FF, как и рассмотренные выше задачи, принадлежат классу задач NP. Связь между целевыми функциями задач MSSC-NF и SVS-NF установим аналогично выводу равенства (1.3.1.3.3). Для целевой функции задачи MSSC-NF получим

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{\mathbf{y}\in C_j} \| \mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}(C_j) \|^2 + \sum_{k=1}^{K} \sum_{\mathbf{y}\in \mathcal{B}_k} \| \mathbf{y} - \mathbf{v}_k \|^2 + \sum_{\mathbf{y}\in \mathcal{B}} \| \mathbf{y} \|^2$$

$$= \sum_{\mathbf{y}\in \mathcal{Y}} \| \mathbf{y} \|^2 + \sum_{k=1}^{K} N_k \| \mathbf{v}_k \|^2 - \left\{ \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{|C_j|} \| \sum_{\mathbf{y}\in C_j} \mathbf{y} \|^2 + 2\sum_{k=1}^{K} \sum_{\mathbf{y}\in \mathcal{B}_k} (\mathbf{y}, \mathbf{v}_k) \right\}. \qquad (1.3.1.3.4).$$

В правой части равенства (1.3.1.3.4) сумма первых двух членов является константой, а третий член – выражение в фигурных скобках – есть целевая функция задачи SVS-NF от подмножеств $\mathcal{Y}_j^1 = C_j$, $j = 1,2,\ldots,J$, и $\mathcal{Y}_k^2 = \mathcal{B}_k$, $k = 1,2,\ldots,K$. Следовательно, NP-полная задача SVS-NF полиномиально сводится к задаче MSSC-NF. В самом деле, из (1.3.1.2.1), (1.3.1.3.2) и (1.3.1.3.4) легко видеть, что разбиение множества $\mathcal{Y}$ на кластеры $C_1, C_2, \ldots, C_J$, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_K$ и $\mathcal{B} = \mathcal{Y} \setminus ((\cup_j C_j) \cup (\cup_k \mathcal{B}_k))$ в задаче MSSC-NF существует тогда и только тогда, когда в задаче SVS-NF при $D = \sum_{\mathbf{y}\in \mathcal{Y}} \| \mathbf{y} \|^2 + \sum_{k=1}^{K} N_k \| \mathbf{v}_k \|^2 - A$ существуют соответствующие непустые подмножества $\mathcal{Y}_j^1$, $j = 1,2,\ldots,J$, и $\mathcal{Y}_k^2$, $k = 1,2,\ldots,K$.

NP-полнота задачи MSSC-FF доказывается аналогично: устанавливается полиномиальная сводимость к этой задаче известной NP-полнй задачи SVS-FF. Теорема 2 доказана.

Подчеркнем, что задачи остаются NP-полными даже в простейшем случае, когда $J = K = 1$.

1.3.1.4. Заключение 1

В настоящем разделе отчета установлена NP-полнота некоторых актуальных задач кластерного анализа. Установленные факты представляются значимым дополнением как к результатам, опубликованным в [Кельманов А.В., 2010], так и к систематизации труднорешаемых задач кластерного анализа.

Фактически, задачи кластеризации, рассмотренные в настоящей работе, и задачи выбора непересекающихся подмножеств, изученные в [Кельманов А.В., 2010], являются парами взаимно противоположных задач. Взаимная противоположность здесь трактуется в том смысле, что минимизация целевых функций в задачах кластеризации эквивалентна максимизации целевых функций соответствующих задач поиска подмножеств. Эквивалентность следует из того, что сумма двух целевых функций (от одинаковых переменных) взаимно противоположных задач равна константе (см. доказательство теорем 1 и 2). Поэтому по точному или асимптотически точному решению задач поиска подмножеств (или кластеризации) можно найти такое же по точности решение противоположных задач кластеризации (или поиска подмножеств). Однако, из-за связи целевых функций противоположных задач через аддитивную константу для алгоритмического решения задачи поиска подмножеств (или кластеризации), имеющего константную оценку точности, будет весьма проблематично найти константную оценку точности соответствующей задачи кластеризации (или поиска подмножеств). Потребуются индивидуальные подходы к построению алгоритмов с константными оценками точности для решения взаимно противоположных задач.

Остается заметить, что полученные результаты могут служить в качестве полезного инструмента для анализа статуса алгоритмической сложности других задач кластеризации.

1.3.2. Приближённый алгоритм решения одной задачи кластерного анализа

Предмет исследования настоящего раздела является труднорешаемая экстремальная задача, к которой сводится одна из проблем кластерного анализа данных. Цель исследования - разработка приближённого алгоритма для решения этой задачи.

Содержательная трактовка рассматриваемой проблемы анализа данных состоит в следующем. Имеется таблица, содержащая результаты измерения набора числовых информационно значимых характеристик некоторого материального объекта. Объект может находиться в одном из двух состояний: активном (включенном) и пассивном (выключенном). В пассивном состоянии значения всех измеряемых характеристик равны нулю, а в активном - значение хотя бы одной характеристики не равно нулю. В каждом результате измерения, представленном в таблице, имеется ошибка, причем соответствие между результатом измерения и состояниями объекта неизвестно, а число активных состояний объекта известно. Требуется, используя адекватный измеряемым характеристикам критерий, найти подмножество наборов, соответствующих активному состоянию объекта, и оценить по результатам измерения набор характеристик объекта в активном состоянии (учитывая, что данные содержат ошибку измерения). Эта содержательная проблема типична для многих приложений, связанных с компьютерным анализом данных и распознаванием образов (см., например, [Гимади и др., 2006], [Кельманов , 2008], [Kel'manov&Jeon, 2004] и цитированные там работы).

В работе [Гимади и др., 2006] дана формулировка этой содержательной проблемы как задачи поиска во множестве векторов евклидова пространства такого подмножества векторов фиксированной мощности, что его элементы «близки» по критерию минимума суммы квадратов расстояний. Там же установлено, что решение этой, далее - исходной, задачи эквивалентно отысканию во множестве векторов евклидова пространства такого подмножества векторов фиксированной мощности, что длина суммы векторов из этого подмножества максимальна. Ниже, как и в [Гимади и др., 2006], эта задача поиска подмножества на максимум имеет краткое название MLSVS (от английского Maximum of the Length of Sum of Vectors from a Subset). NP-трудность задачи MLSVS показана в [Бабурин и др., 2007] и [Гимади и др., 2006]. Точные и приближенные алгоритмы решения задачи MLSVS были предложены в [Бабурин и др., 2007], [Гимади и др., 2008], [Гимади и др., 2006], [Гимади, Пяткин, Рыков, 2008]. Характеристики этих алгоритмов приведены в следующем параграфе.

Мотивацией исследований послужили следующие факты. Во-первых, алгоритм, представленный в [Гимади и др., 2006], не имеет теоретических гарантий по точности. Во-вторых, приближенный алгоритм решения задачи MLSVS, предложенный в [Бабурин и др., 2007] и реализующий вполне полиномиальную аппроксимационную схему (FPTAS), не обеспечивает гарантированой оценки точности для исходной задачи анализа данных на минимум в неасимптотическом случае, хотя и позволяет находить асимптотически точное решение исходной задачи. В-третьих, временная сложность алгоритмов с оценками точности, обоснованных в [Бабурин и др., 2007], [Гимади и др., 2008] и [Гимади, Пяткин, Рыков, 2008], столь высока (см. следующий параграф), что эти алгоритмы практически непригодны для решения задач большой размерности.

В настоящем разделе рассмотрена одна из неизученных ранее задач кластерного анализа на минимум. Показано, что эта задача NP-трудна и эквивалентна исходной задаче. Для решения задачи предложен 2-приближенный алгоритм.

1.3.2.1. Известные алгоритмические результаты

Напомним, что сформулированная в [Гимади и др., 2006] содержательная проблема анализа данных была сведена к решению задачи поиска во множестве $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ такого подмножества $C \subseteq \mathcal{Y}$, что

$$\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}} \|\mathbf{y}\|^2 - \frac{1}{|C|}\|\sum_{\mathbf{y}\in C}\mathbf{y}\|^2 \to \min, \qquad (1.3.2.1.1)$$

при ограничении $|C| = M$ на мощность искомого подмножества.

Так как первый член в (1.3.2.1.1) является константой и мощность искомого подмножества C фиксирована, решение исходной задачи (1.3.2.1.1) на минимум можно получить максимизируя норму в числителе второго члена функции (1.3.2.1.1). Поэтому в [Гимади и др., 2006] была рассмотрена

Задача MLSVS.

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $M>1$.

Найти: подмножество $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{Y}$ такое, что функция

$$F(\mathcal{U})=\|\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{U}}\mathbf{y}\| \qquad (1.3.2.1.2)$$

максимальна, при ограничении $|\mathcal{U}|=M$ на мощность искомого подмножества.

Приведем характеристики существующих алгоритмов для решения этой задачи. В [Гимади и др., 2006] был построен, эффективный приближённый алгоритм, временная сложность которого есть величина $O(qN)$. К сожалению, этот алгоритм не имеет гарантированной оценки точности. Он примечателен лишь тем, что в численных экспериментах на некоторых подклассах входных данных показывает точность, приемлемую для приложений [Гимади и др., 2006].

Далее, в [Бабурин и др., 2007] предложен алгоритм с гарантированной оценкой относительной погрешности $\varepsilon=(q-1)/(8l^2)$, где l - целочисленный параметр алгоритма. Временная сложность алгоритма есть величина $O(q^2N(2l+1)^{q-1})$. Фактически, в [Бабурин и др., 2007] обоснована вполне полиномиальная аппроксимационная схема, устанавливающая полиномиальную относительно N и ε оценку временной сложности алгоритма, для случая, когда размерность q пространства фиксирована. Для этого же случая в [Гимади, Пяткин, Рыков, 2008] конструктивно установлено, что задача разрешима за полиномиальное время $O(q^2N^{2q})$.

Наконец, в [Бабурин и др., 2007] и [Гимади, Глазков, Рыков, 2008] были построены псевдополиномиальные алгоритмы, гарантирующие оптимальность решения задачи для случая, когда компоненты векторов имеют целочисленные значения. Эти алгоритмы имеют временные сложности $O(Nq^{q+1}(Ma)^{q-1})$ и $O(qMN(2Ma)^{q-1})$ для [Бабурин и др., 2007] и [Гимади, Глазков, Рыков, 2008] соответственно, где a - максимальная абсолютная величина компоненты вектора во множестве $\mathcal{Y}$.

Относительно характеристик существующих алгоритмических решений заметим следующее. Во-первых, как для исходной задачи, так и для задачи MLSVS, в настоящее время отсутствуют эффективные приближенные алгоритмы с константной оценкой точности. Следует, однако, оговориться, что при фиксированной размерности пространства задача MLSVS принадлежит классу P. Факт принадлежности следует из существования полиномиального точного алгоритма, предложенного в [Гимади, Пяткин, Рыков, 2008], для решения этой задачи.

Во-вторых, опираясь на определение (1.3.2.1.2), для целевой функции (1.3.2.1.1) исходной задачи имеем

$$\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}} \|\mathbf{y}\|^2 - \frac{1}{|C|}\|\sum_{\mathbf{y}\in C}\mathbf{y}\|^2 = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}} \|\mathbf{y}\|^2 - \frac{1}{|C|}F^2(C). \qquad (1.3.2.1.3)$$

Отсюда следует, что точное и асимптотически точное алгоритмическое решение исходной задачи может быть найдено с помощью известных ([Бабурин и др., 2007], [Гимади, Глазков, Рыков, 2008], [Гимади, Пяткин, Рыков, 2008]) алгоритмов решения задачи MLSVS, максимизирующих $F(C)$. Однако, получение оценки точности приближенного решения исходной задачи по оценке точности приближенного решения задачи MLSVS (и получение оценок в обратном порядке) проблематично из-за наличия в (1.3.2.1.3) аддитивной константы - суммы квадратов норм векторов из множества $\mathcal{Y}$.

В-третьих, анализируя приведенные выше оценки сложности алгоритмов, обоснованных в [Бабурин и др., 2007], [Гимади, Глазков, Рыков, 2008], [Гимади, Пяткин, Рыков, 2008], легко заметить, что формулы этих оценок содержат в качества множителя величины, в показателе степени которых фигурирует размерность пространства q. Во многих прикладных (естественно-научных и технических) задачах анализа данных размерность пространства составляет сотни и тысячи, а мощности анализируемых множеств еще выше на несколько порядков. Для решения этих прикладных задач известные алгоритмы с оценками точности практически непригодны из-за высокой трудоемкости. С другой стороны, малотрудоемкий алгоритм, предложенный в [Гимади и др., 2006], не имеет теоретических гарантий по точности.

Таким образом, характеристики существующих алгоритмов указывают на актуальность поиска таких приближенных алгоритмических решений исходной задачи и задачи MLSVS, сложность которых не зависит экспоненциально от размерности пространства.

1.3.2.2. Задача кластерного анализа на минимум

Рассмотрим следующую задачу поиска подмножества векторов.

Задача VS (Vector Subset).

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $M > 1$.

Найти: подмножество $C \subseteq \mathcal{Y}$ мощности M такое, что целевая функция

$$S(C) = \sum_{\mathbf{y}\in C} \| \mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}(C) \|^2 + \sum_{\mathbf{y}\in \mathcal{Y}\setminus C} \| \mathbf{y} \|^2, \qquad (1.3.2.2.1)$$

где $\overline{\mathbf{y}}(C) = \frac{1}{|C|}\sum_{\mathbf{y}\in C}\mathbf{y}$, минимальна.

Из (1.3.2.2.1) видно, что задачу VS можно трактовать как задачу кластерного анализа, в которой требуется разбить заданное множество $\mathcal{Y}$ векторов на два таких кластера C и $\mathcal{Y}\setminus C$, мощности которых равны M и $N-M$ соответственно, что целевая функция (1.3.2.2.1) минимальна.

Справедлива следующая

Лемма 1. Целевая функция (1.3.2.2.1) VS минимальна тогда и только тогда, когда целевая функция (1.3.2.1.2) MLSVS максимальна.

Теорема 1. Задача VS NP-трудна.

Теперь легко заметить, что задача VS эквивалентна исходной задаче (1.3.2.1.1).

Построим алгоритм решения задачи VS. Обозначим через C^* множество, доставляющее минимум S^* целевой функции S^*, и положим $\mathbf{y}^* = \overline{\mathbf{y}}(C^*)$, где $\overline{\mathbf{y}}(\cdot)$ - функция, определенная в формулировке задачи VS. Из леммы 1 имеем

Следствие 1. Для любых векторов $\mathbf{y} \in C^*$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Y}\setminus C^*$ справедливо неравенство

$$(\mathbf{y},\mathbf{y}^*) \ge (\mathbf{z},\mathbf{y}^*).$$

Фактически, следствие 1 показывает, что оптимальное подмножество C^* состоит из тех M векторов множества $\mathcal{Y}$, у которых проекции на направление вектора $\mathbf{y}^*$ имеют наибольшие значения. Это следствие указывает на изложенный ниже возможный подход к решению задачи VS.

1.3.2.3. Алгоритм решения задачи кластерного анализа

Идея подхода к приближенному решению задачи VS состоит в замене её решения на решение более простой вспомогательной задачи и последующей оценкой точности этой замены. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача SVSV (Search for a Vector Subset and Vector in the set).

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $M > 1$.

Найти: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Y}$ мощности M и вектор $\mathbf{b}$ такие, что целевая функция

$$G(\mathcal{B},\mathbf{b}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{B}} \|\mathbf{y}-\mathbf{b}\|^2 + \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}\setminus\mathcal{B}} \|\mathbf{y}\|^2, \qquad (1.3.2.3.1)$$

минимальна.

Построим алгоритм решения этой задачи. Обозначим через $\mathcal{B}^*$ и $\mathbf{b}^*$ подмножество и вектор, доставляющие минимум G^* целевой функции G.

Для каждого фиксированного $\mathbf{b}\in\mathcal{Y}$ определим функцию

$$h(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{b}) = (\mathbf{y},\mathbf{b}), \quad \mathbf{y}\in\mathcal{Y}, \qquad (1.3.2.3.2)$$

множество

$$\mathcal{H}(\mathbf{b}) = \{h(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{b}), \mathbf{y}\in\mathcal{Y}\} \qquad (1.3.2.3.3)$$

совокупность

$$\mathcal{H}_M(\mathbf{b}) = \{h_i \,|\, h_i \ge h_j, h_i \in \mathcal{H}(\mathbf{b}), h_i \in \mathcal{H}(\mathbf{b}), i=1,\ldots,M, j=M+1,\ldots,N\}, \qquad (1.3.2.3.4)$$

состоящую из $M<N$ наибольших элементов множества $\mathcal{H}(\mathbf{b})$, и подмножество

$$\mathcal{B}(\mathbf{b}) = \{\mathbf{y}\,|\,\mathbf{y}\in\mathcal{Y}, h(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{b})\in\mathcal{H}_{\mathcal{M}}(\mathbf{b})\}, \qquad (1.3.2.3.5)$$

множества $\mathcal{Y}$. При $M=N$ положим $\mathcal{H}_M(\mathbf{b}) = \mathcal{H}(\mathbf{b})$.

Заметим, что в соответствии с определением (1.3.2.3.5) подмножество $\mathcal{B}(\mathbf{b})$ имеет структуру аналогичную структуре (см. следствие 1) оптимального решения $\mathcal{C}^*$ задачи VS, а именно: подмножество $\mathcal{B}(\mathbf{b})$ состоит из вектора $\mathbf{b}$ и $M-1$ векторов, имеющих наибольшие проекции на направление вектора $\mathbf{b}$.

Суть предлагаемого алгоритма решения задачи SVSV состоит в следующем. Сначала для каждого $\mathbf{b}\in\mathcal{Y}$ вычисляется значение функции $G(\mathcal{B}(\mathbf{b}),\mathbf{b})$. Затем в качестве решения задачи выбирается такой вектор $\mathbf{b}$ и соответствующее ему подмножество $\mathcal{B}(\mathbf{b})$, что значение функции $G(\mathcal{B}(\mathbf{b}),\mathbf{b})$ минимально.

Приведём алгоритм решения задачи SVSV в виде псевдокода.

Алгоритм $\mathcal{A}_1$.

Шаг 1. Положим $\mathbf{b}^*=0$, $\mathcal{B}^*=\varnothing$, $G^*=\infty$, $k:=0$.

Шаг 2. $k:=k+1$; положим $\mathbf{b}=\mathbf{y}_k$.

Шаг 3. Вычислим значение $h(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{b})$ для каждого $\mathbf{y}\in\mathcal{Y}$ и сформируем множество $\mathcal{H}(\mathbf{b})$ по формулам (7)-(8). Построим совокупность $\mathcal{H}_M(\mathbf{b})$ по формуле (1.3.2.3.4). Сформируем подмножество $\mathcal{B}(\mathbf{b})$ по формуле (1.3.2.3.5).

Шаг 4. Вычислим значение $G(\mathcal{B}(\mathbf{b}),\mathbf{b})$ целевой функции (1.3.2.3.1).

Шаг 5. Если $G(\mathcal{B}(\mathbf{b}),\mathbf{b}) \le G^*$, то положим $G^* = G(\mathcal{B}(\mathbf{b}),\mathbf{b})$, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}(\mathbf{b})$, $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}$; иначе переходим к следующему шагу.

Шаг 6. Если $k < N$, то переходим на шаг 2; иначе - к следующему шагу.

Шаг 7. Выход. Подмножество $\mathcal{B}^*$, вектор $\mathbf{b}^*$ и значение G^* целевой функции объявляем результатом работы алгоритма.

Оценку сложности и точности алгоритма устанавливает

Лемма 2. Алгоритм $\mathcal{A}_1$ находит оптимальное решение задачи SVSV за время $O(qN^2)$.

Сформулируем вспомогательные утверждения.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{Z}$ непустое конечное множество векторов из $\mathcal{R}^q$, а $\bar{\mathbf{z}}(\mathcal{Z}) = \frac{1}{|\mathcal{Z}|}\sum_{\mathbf{z}\in\mathcal{Z}} \mathbf{z}$. Тогда, если вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^q$ удовлетворяет условиям

$$\| \mathbf{x} - \bar{\mathbf{z}} \| \le \| \mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}} \|, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{Z},$$

то имеет место неравенство

$$\sum_{\mathbf{z}\in\mathcal{Z}} \| \mathbf{z} - \mathbf{x} \|^2 \le 2 \sum_{\mathbf{z}\in\mathcal{Z}} \| \mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}} \|^2 .$$

Лемма 4. Пусть $\mathcal{B}^*$, $\mathbf{b}^*$ - оптимальное решение вспомогательной задачи SVSV, а $\mathcal{C}^*$ - оптимальное решение задачи VS. Тогда имеет место оценка $S(\mathcal{B}^*) \le 2S(\mathcal{C}^*)$.

Опираясь на лемму 4, представим алгоритм решения задачи VS.

Алгоритм $\mathcal{A}$.

Шаг 1. По заданному множеству $\mathcal{Y}$ и числу M находим оптимальное решение $\mathcal{B}^*$, $\mathbf{b}^*$ вспомогательной задачи SVSV с помощью алгоритма $\mathcal{A}_1$.

Шаг 2. Подмножество $\mathcal{B}^*$ объявляем решением задачи VS.

Теорема 2. Алгоритм $\mathcal{A}$ находит 2-приближённое решение задачи VS за время $O(qN^2)$. Оценка 2 точности алгоритма достижима и неулучшаема.

1.3.2.4. Заключение 2

В настоящем разделе рассмотрена одна из неизученных ранее задач разбиения множества векторов евклидова пространства на два кластера фиксированной мощности по критерию минимума суммы квадратов расстояний. Установлена связь этой задачи с изучавшимися ранее труднорешаемыми задачами поиска подмножества векторов. Показано, что рассматриваемая задача NP-трудна. Построен эффективный приближённый алгоритм с константной оценкой точности 2 для её решения.

Делом ближайшей перспективы является изучение вопросов аппроксимируемости задачи, а также построение более эффективных приближенных алгоритмов. Представляют интерес алгоритмы рандомизированного типа, а также алгоритмы, ориентированные на решение задачи со случайными входами.

1.4. Классификация дистанционно регулярных кодов в бесконечной квадратной решетке

В ходе работ перечислены параметры всех дистанционно регулярных раскрасок бесконечной квадратной решетки.

Совершенная раскраска вершин графа характеризуется тем свойством, что все вершины одинакового цвета имеют одинаковый цветовой состав окружения (строгие определения см. ниже). Понятие дистанционно регулярной совершенной раскраски (в другой терминологии - дистанционно регулярное расслоение графа) является весьма полезным инструментом при изучении инвариантных свойств (скажем, весовых распределений) различных совершенных структур. Восходящее к Дельсарту, оно неоднократно переоткрывалось и подвергалось разностороннему изучению. Достаточно сказать, что в дистанционно регулярных графах дистанционное расслоение множества его вершин относительно любой вершины является совершенной раскраской. При этом параметры раскраски от выбора вершины не зависят.

Всякая совершенная раскраска в 2 цвета является дистанционно регулярной. Со случая двух цветов обычно и начинается исследование тех или иных классов графов. Для бесконечной квадратной решетки полное описание всех совершенных 2-раскрасок получено в [Axenovich, 2003], параметры трехцветных раскрасок описаны в [Киселев, Токарева, 2011].

Значительное продвижение в описании параметров совершенных 2-раскрасок графов Кели бесконечной циклической группы имеется в [Хорошилова, 2009]. Для плоских триангуляций частичное исследование проведено в [Августинович и др., 2001]. Случай гиперкуба, половинного гиперкуба и графа Джонсона рассматривался ранее. Также в данной области есть ряд результатов, касающихся нескольких бесконечных серий транзитивных кубических графов.

Раскраска вершин графа в цвета от 1 до k называется совершенной, если для всех не обязательно различных i,j=1,2,...,k однозначно определено целое $A_{i,j}$, равное числу вершин цвета j в окружении каждой вершины цвета i. Матрица A называется матрицей параметров соответствующей раскраски.

Совершенная раскраска называется дистанционно регулярной, если ее матрица параметров приводима к тридиагональному виду. Фактически это означает, что цвета в раскраске можно упорядочить так, что каждый из них будет видеть лишь соседние цвета. Понятие дистанционно регулярной раскраски напрямую связано с понятием вполне регулярного кода в графе. В нашей терминологии вершины и первого и последнего цветов дистанционно регулярных раскрасок являются вполне регулярными кодами. Таким образом, из доказанного вытекает полная характеризация параметров всех таких кодов в Z^2.

1.5. Полное описание параметров совершенных 2-раскрасок транзитивных кубических графов с числом вершин, не превосходящим 18

Для всех транзитивных кубических графов с числом вершин, не превосходящим 18, получено полное описание допустимых параметров совершенных 2-раскрасок.

Данная работа посвящена исследованию совершенных раскрасок в 2 цвета некоторых бесконечных серий транзитивных кубических графов.

Раскраска вершин графа G называется совершенной, если для любых двух вершин одного цвета цветовые составы их окружения совпадают. Более формальное определение можно посмотреть в предыдущем разделе.

Изучение совершенных раскрасок обычно начинается со случая двух цветов. Этот случай представляется самым простым, но он и наиболее интересен, поскольку обладает большим потенциалом обобщения. Как правило, рассматриваемые графы однородны и вершинно транзитивны. К редким исключениям следует отнести работы [Августинович и др, 2001], в которых неоднородность графа является условием невыхолощенности исследования. Так сложилось исторически, что по данной теме исследователи уделяли внимание классам регулярных графов достаточно большой степени [Августинович, Могильных, 2010], [Кротов, 2008]. Случай степени 3 оказался незаслуженно пропущен, возможно, из-за своей кажущейся простоты. Вместе с тем, транзитивных кубических графов очень много, что может быть продемонстрировано на примере списка диаграмм таких графов с числом вершин, не превосходящих 18 [Кохов, 1986]. Для удобства совершенные раскраски в 2 цвета будем называть совершенными 2-раскрасками, причем цвет 1 будем называть белым, а цвет 2 - черным.

Матрица параметров совершенной 2-раскраски является квадратной и определяется четырьмя параметрами a,b,c и d. Параметры a и d называются внутренними степенями белого и черного цветов соответственно. Эта терминология делает наглядной смежность каждой белой вершины с a вершинами одноименного ей цвета и смежность каждой черной вершины с d вершинами одноименного ей цвета в совершенной 2-раскраске графа. Аналогично, b и c называются внешними степенями белого и черного цветов соответственно.

Две матрицы совершенных раскрасок называются эквивалентными, если одна может быть получена из другой перестановкой строк и столбцов, соответствующей некоторому переобозначению цветов. Для того, чтобы не рассматривать эквивалентные матрицы, мы ограничились рассмотрением матриц параметров совершенных 2-раскрасок, характеристический вектор которых удовлетворяет условию b> c.

Основным инструментом исследования совершенных 2-раскрасок графа является понятие локально жесткого фрагмента. Подмножество вершин графа G называется локально жестким фрагментом, если всякая совершенная раскраска G однозначно восстанавливается по своему сужению на этот фрагмент. Для тех бесконечных серий кубических графов, которые пришлось рассмотреть, минимальные локально жесткие фрагменты содержали от 4 до 6 вершин, что позволило значительно сократить перебор вариантов.

Заметим, что полученные результаты носят предварительный характер. Как уже подчеркивалось выше, множество транзитивных кубических графов необозримо. Трудности перечисления совершенных раскрасок таких графов растут с ростом их обхвата, ибо перестают работать методы, связанные с понятием локальной жесткости.

1.6. Характеризация отдельных классов n-арных квазигрупп, улучшение оценки их числа и получение новых признаков разделимости

Определение: n-местная операция $f{:}S^n \to S$, где S – некоторое непустое множество, называется n-арной квазигрупой порядка $|S|$, если в уравнении $x_0=f(x_1,\ldots,x_n)$ любые n переменных однозначно задают оставшуюся. Ретрактом n-арной квазигрупы f называется многоместная квазигруппа, получаемая из f или ее обращения по некоторому аргументу фиксацией значений одного или более аргументов. n-Арная квазигрупа называется разделимой, если она представима в виде бесповторной суперпозиции квазигрупп меньшей арности.

Доказано, что если все $(n\text{-}1)$- и $(n\text{-}2)$- арные ретракты n-арной квазигруппы f разделимы, то и сама f является разделимой. В случае конечного простого порядка получено более сильное утверждение: если все $(n\text{-}1)$-арные ретракты n-арной квазигруппы f разделимы, то и сама f является разделимой. Для произвольного порядка такого утверждать нельзя, так как имеются контрпримеры.

Получена характеризация отдельных классов n-арных квазигрупп: доказано, что все n-арные квазигруппы порядков $k=5$ и $k=7$, бинарные ретракты которых изотопны группе (т.е. имеют вид $g(h(x)+l(y) \bmod k)$), являются разделимыми, кроме случая $n=3$, $k=5$.

Пусть $Q(n,k)$ – число n-арных квазигрупп порядка k. Получена рекуррентная формула для чисел $Q(n,4)$. Доказано, что при любых $n>1$ и $k>4$ справедливы неравенства $((k\text{-}3)/2)^{n/2}$ $((k\text{-}1)/2)^{n/2} < \log_2 Q(n,k) < c_k(k\text{-}2)^n$, где c_k не зависит от n. Таким образом, верхняя асимтотическая граница для чисел $Q(n,k)$ улучшена при любых $k>4$, нижняя – при нечетных

$k>6$. Оценки числа $Q(n,k)$ использованы для получения рекордной нижней оценки числа совершенных кодов в q-значном алфавите, $q>2$.

1.7. Разработка ландшафтов, характеризующих поведение жадного алгоритма относительно целевой функции общего вида на двусвязных обыкновенных графах

Получена полная характеризация возможных распределений локальных экстремумов произвольной целевой функции на вершинах произвольного связного графа.

Пусть G - произвольный связный граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Рассмотрим произвольную действительнозначную функцию F на множестве вершин графа с несовпадающими значениями (в дальнейшем такие функции мы будем называть целевыми). Вершину v графа G будем называть локальным минимумом (максимумом)} функции F, если F(v)<F(u) (соответственно F(v)>f(u)) для всех u таких, что v и u соединены ребром. Множество локальных минимумов функции F мы будем обозначать через m, а множество локальных максимумов через M. Пару (M,m) подмножеств множества V будем называть допустимой для графа G, если найдется такая целевая функция F, для которой m и M в точности множества локальных экстремумов. Нами дана полная характеризация допустимых пар подмножеств для произвольного связного графа.

Следует заметить, что распределение значений целевой функции на множестве допустимых решений дискретной оптимизационной задачи обычно называется ландшафтом (landscape). Изучение ландшафтов на предмет взаимного расположения локальных экстремумов (их количество, близость друг к другу, тяготение к глобальному экстремуму) дает полезную информацию для оценки качества работы алгоритмов локального спуска.

Основной результат

Итак, нам задан некоторый связный граф G=(V,E) и пара (M,m) подмножеств множества V. Требуется определить, является пара (M,m) допустимой или нет. Прежде, чем формулировать основную теорему, сделаем ряд несложных замечаний.

В дальнейшем будем называть целевую функцию F подходящей для пары (M,m). Во-первых, вполне очевидно, что в допустимой паре множества M и m не пересекаются и каждое из них является независимым множеством в G. Рассмотрим множество P вершин из V, но не из M или m. Вершины множества P будем называть промежуточными. Зафиксируем какую-либо промежуточную вершину v и проследим действие алгоритма локального спуска (подъема), начинающего свою работу с вершины v. Переходя от вершины к вершине с меньшими (большими) значениями целевой функции, мы в некоторый момент достигнем множества m (соответсвенно M). Обе траектории образуют простой путь, соединяющий некоторую вершину v1 из m с некоторой вершиной v2 из M и проходящий через вершину v. По построению все вершины этого пути, кроме первой и последней, являются промежуточными.

Как видим, существование такого пути является необходимым условием допустимости пары (M,m). Можно доказать следующее утверждение:

Теорема. Пара подмножеств (M,m) множества вершин связного графа G является допустимой, если и только если выполняются условия:

1. Множества M и m не пересекаются и являются независимыми множествами в G.
2. Для всякой промежуточной вершины v найдется простой путь, проходящий через v, в котором первая и последняя вершины принадлежат, соответственно, множествам M и m, а все остальные вершины промежуточные.

В одну сторону (только если) утверждение уже доказано. Пусть множества M и m удовлетворяют условиям теоремы. Наша задача - построить такую целевую функцию F, для которой множество локальных максимумов совпадает с M, а множество минимумов - с m, причем других экстремумов нет. Для этого зафиксируем произвольные действительные числа A и B, A>B, и придадим искомой функции произвольные несовпадающие значения, большие A, на всех вершинах множества M, а на всех вершинах множества m - произвольные несовпадающие значения, меньшие B. В промежуточных вершинах будем доопределять функцию F следующим образом. Рассмотрим какую-либо вершину v, на которой F пока не определена. По условию 2 существует простой путь (V1,V2,...,Vk), проходящий через v, причем на вершинах V1 и Vk функция F уже определена, а на всех оставшихся вершинах цепи - нет. Пусть, не теряя общности, F(V1)>F(Vk). Назначим вершинам (V2,V3,...,V(k-1)) произвольные несовпадающие, монотонно убывающие от min(F(V1),A) к max(F(V2),B) значения. Продолжая в том же духе, мы наконец определим функцию F полностью, причем, по построению, ни одна из вершин множества P не может оказаться локальным экстремумом. Очевидно также, что все вершины из M будут локальными максимумами, а все вершины из m будут локальными минимумами. Теорема доказана.

Возможно иное, "физическое" доказательство. Представим наш граф, как электрическую сеть, в которой каждому ребру придано некоторое случайно выбранное сопротивление, к вершинам из M приложен достаточно большой положительный потенциал, а к вершинам из m - большой отрицательный. Вероятность установления одинаковых потенциалов в двух разных вершинах и, как следствие, нулевого тока в каком-либо из ребер равна нулю. Это значит, что функция потенциала в вершинах графа - искомая. При желании можно мыслить наш граф, как сеть труб различного сечения, по которым протекает жидкость, а в вершины из M и m помещены насосы, создающие положительное и, соответственно, отрицательное давление. Несмотря на кажущуюся нестрогость, это доказательство задает, как нам кажется, правильное направление для дальнейших размышлений на данную тему.

Заметим в заключение, что теорема доказана в предположении отсутствия каких-либо ограничений на целевую функцию F. В содержательных задачах распределение локальных экстремумов должно удовлетворять гораздо более сильным условиям, чем условия 1 и 2. Выявление таких условий мы считаем актуальной задачей.

1.8. Геометрический анализ эффективности покрытий сенсорами плоских областей

Проблемы поиска эффективных покрытий плоских областей кругами различного радиуса возникают во многих практических приложениях [Asano et al., 2004], [Bulusu et al., 2000], [Pottie, 2000], [Wu&Yang, 2005], [Астраков и др., 2009]. В рамках данной НИР эта проблема рассматривается для сенсорных сетей, осуществляющих мониторинг полосы. Как и авторы работы [Wu&Yang, 2005], мы предполагаем, что область мониторинга сенсора является кругом определённого радиуса с центром в месте расположения сенсора. Будем говорить, что сенсор покрывает часть плоскости находящуюся внутри его круга мониторинга. Плоская область считается покрытой множеством сенсоров *C*, если каждая точка области покрыта хотя бы одним сенсором из *C*.

Плотностью покрытия плоской области кругами называется отношение суммы площадей кругов покрытия к площади области. Очевидно, что плотность не может быть меньше единицы, и отклонение её значения от единицы характеризует эффективность покрытия. Так как энергозатраты сенсора на мониторинг пропорциональны покрытой им площади, основная задача сенсорных сетей – максимизация жизни – сводится к решению задачи построения наименее плотного покрытия.

Существует бесконечное число способов покрытия плоской области кругами различного радиуса. В связи с этим в большинстве работ по данной тематике [Kershner, 1939], [Wu&Yang, 2005], [Астраков и др., 2009], [Zhang&Hou, 2005] авторы рассматривают, так называемые, регулярные покрытия, что существенно сужает множество допустимых покрытий и позволяет осуществить анализ определённого класса покрытий. В регулярном покрытии плоская область (виртуально) замощается многоугольниками (плитками), и все многоугольники покрываются кругами одинаково. При этом сенсоры (центры кругов) располагаются в определённых местах плиток и определяются оптимальные радиусы мониторинга сенсоров [Wu&Yang, 2005], [Астраков и др., 2009].

Значительное число публикаций посвящено покрытию кругами всей плоскости. При покрытии ограниченных областей основные трудности возникают на границе области. Нами рассматривается практически не изученная проблема наименее плотного покрытия бесконечной полосы кругами. Предложены покрытия, использующие круги одного, двух и трёх радиусов. Учтены возникающие при этом граничные эффекты и проведен анализ эффективности предложенных покрытий.

Многие реальные объекты моделируются бесконечно длинными полосами. Это автомобильные и железнодорожные дороги, различные линии связи, государственные границы, трубопроводы и прочие сооружения, у которых длина существенно превышает ширину, и которые имеют незначительную кривизну. Задачи мониторинга подобных объектов требуют построения эффективных моделей покрытия, удовлетворяющим определённым требованиям.

Рассмотрим линию, которую требуется покрыть одинаковыми кругами. В случае, когда линия покрыта касающимися кругами, точки касания входят в покрытие без своих окрестностей, и такое покрытие может оказаться недостаточным, например, по причине надежности. В случае, когда линия содержится в некоторой полосе, границы которой проходят через точки пересечения окружностей, покрытие полосы дает «гарантированное» покрытие линии, а задача о покрытии полосы становится эквивалентна задаче о гарантированном покрытии прямой линии.

С другой стороны, практически любой физический предмет имеет ширину (толщину). Поэтому далее будем рассматривать регулярные покрытия полосы, отождествляя эффективность покрытия с плотностью. Напомним, что в регулярном покрытии область мониторинга разбивается на равные многоугольниками, и все многоугольники покрываются одинаково. В дальнейшем рассматриваются только регулярные покрытия, поэтому регулярность покрытия подразумевается по умолчанию.

Назовем покрытие n-слойным, если центры всех кругов покрытия располагаются на n прямых параллельных границам полосы. Нами предложены и исследованы регулярные многослойные покрытия полосы кругами одного, двух и трёх радиусов. При этом радиусы кругов – это регулируемые параметры покрытий. В каждом классе покрытий выделены наиболее эффективные и показаны их преимущества. Приведенные результаты, не претендуя на полный анализ многообразия возможных вариантов покрытий, демонстрируют общие методы построения эффективных покрытий, которые могут быть использованы при решении практических задач.

Детально рассмотрены покрытия полосы кругами одного радиуса. Существует большое число регулярных покрытий полосы кругами одного радиуса. При этом эффективность покрытия зависит как от числа слоев, так и от расположения кругов. Нами рассмотрены наиболее перспективные однослойные покрытия, двухслойные покрытия и многослойные покрытия. В частности, для двухслойного покрытия, которое использует треугольную решётку, получен нетривиальный результат. Треугольник, образованный центрами трёх соседних кругов не является правильным, как в покрытии плоскости одинаковыми кругами тематике [Kershner, 1939], он равнобедренный! Это обусловлено граничным эффектом. В случае правильной треугольной решётки плотность покрытия больше. В многослойном покрытии плотность стремится к 1.2, что согласуется с классическим результатом для покрытия всей плоскости кругами одного радиуса тематике [Kershner, 1939]. Такой результат объясняется тем, что при большой ширине полосы влияние границ несущественно.

Покрытие полосы кругами двух и трех радиусов даёт ещё большее разнообразие. В рамках проекта рассмотрено несколько моделей таких покрытий и проведена их классификация. Каждое покрытие мы отнесли к одному из классов $P(n, k)$, где n – число слоев покрытия, а k – число различных радиусов кругов. В таблице 1 приведены результаты исследований.

Таблица 1. Результаты исследования плотности лучшего покрытия.

Класс моделей	Плотность лучшего покрытия	Примечание
$P(1, 1)$	$\approx 1{,}571$	Простая структура
$P(2, 1)$	$\approx 1{,}399$	Треугольная решётка
$P(n, 1)$	$\dfrac{n\pi}{2(n-1+(n+1)\sin\alpha)\cos\alpha}$	Плотность стремится к 1.2 при $n \to \infty$
$P(3, 2)$	$\approx 1{,}294$	Простая и эффективная модель
$P(4, 2)$	$\approx 1{,}254$	Треугольная решётка
$P(5, 3)$	$\approx 1{,}234$	Квадратная решётка
$P(6, 3)$	$\approx 1{,}204$	Треугольная решётка

В заключение отметим, что исследования предложенных покрытий показали, что для уменьшения плотности покрытий необходимо учитывать такие факторы как:

(1) количество уровней;

(2) расположение кругов;

(3) радиусы кругов;

(4) соотношения между радиусами различных кругов;

(5) структуру покрытия.

Достоинством покрытия является не только низкая плотность, но и простота структуры. В связи с этим, приведена классификация покрытий и в каждом классе указаны наиболее эффективные покрытия. Доказательство оптимальности отдельных покрытий в определённом классе является сложной проблемой и требует отдельных исследований.

Отметим, что рассмотрены модели, в которых радиусы кругов являются регулируемыми параметрами (как и в работах [Cardei, 2006], [Wu&Yang, 2005], [Астраков и др., 2009]). Это не всегда так. В некоторых приложениях радиусы кругов могут быть заданы, и требуется найти наименее плотное покрытие полосы заданной ширины. Например, если диаметр круга меньше ширины полосы, то не существует однослойного покрытия полосы такими кругами. В будущем планируется рассмотреть способы построения наименее плотных покрытий кругами заданных радиусов.

1.9. Исследование возможности сведения задач конкурентного размещения к задачам математического программирования

В отчете по первому этапу НИР были даны математические формулировки задач конкурентного размещения предприятий в виде задач двухуровневого математического программирования. Рассмотрены две задачи, отличающиеся видом целевой функции у задачи нижнего уровня. Даны также два определения «наилучших» решений задач конкурентного размещения предприятий. Такими решениями являются оптимальные кооперативные и оптимальные некооперативные решения. Ниже исследуется возможность сведения задач поиска оптимальных кооперативных (некооперативных) решений рассматриваемых моделей конкурентного размещения предприятий к «обычным» задачам математического программирования.

1.9.1. Задачи конкурентного размещения предприятий

На предыдущем этапе НИР задача конкурентного размещения предприятий формулируется как задача Лидера в игре Штакельберга, которая состоит в определении такого множества открываемых Лидером предприятий, которое максимизирует его прибыль при условии, что часть потребителей будет захвачена Последователем.

В случае, когда целью Последователя является получение максимальной прибыли задача конкурентного размещения предприятий записывается следующим образом:

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \left\{ -\sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij} \right) \right\}; \tag{1.9.1.1}$$

$$x_i + \sum_{k | i \succ_j k} x_{kj} \le 1, \quad i \in I, \quad j \in J; \tag{1.9.1.2}$$

$$x_i \ge x_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J; \tag{1.9.1.3}$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J; \tag{1.9.1.4}$$

$$((\tilde{z}_i),(\tilde{z}_{ij})) \text{ — оптимальное решение задачи:} \tag{1.9.1.5}$$

$$\max_{(z_i),(z_{ij})} \left\{ -\sum_{i\in I} g_i z_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij} z_{ij} \right\}; \qquad (1.9.1.6)$$

$$x_i + z_i + \sum_{k|i \succ_j k} z_{kj} \le 1, \quad i\in I, \quad j \in J; \qquad (1.9.1.7)$$

$$z_i \ge z_{ij}, \quad i\in I, \quad j\in J; \qquad (1.9.1.8)$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i\in I, \quad j\in J. \qquad (1.9.1.9)$$

Целевая функция (1.9.1.1) сформулированной задачи выражает величину прибыли, получаемой Лидером с учетом потери части потребителей, «захваченных» Последователем. Неравенство (1.9.1.2) реализует правило выбора потребителем наиболее предпочтительного предприятия среди всех предприятий, открытых Лидером. Это же неравенство гарантирует, что каждый потребитель может выбрать для своего обслуживания не более одного открытого предприятия. Ограничение (1.9.1.3) означает, что потребитель для своего обслуживания может выбрать только открытое предприятие. Аналогичный смысл имеют целевая функция и ограничения задачи (1.9.1.6)–(1.9.1.9). Целевая функция (1.9.1.6) выражает суммарную прибыль, получаемую Последователем, а неравенство (1.9.1.7) обеспечивает выполнение правила выбора потребителем наиболее предпочтительного для него предприятия среди всех предприятий, открытых как Лидером, так и Последователем. Помимо этого ограничение (1.9.1.7) показывает, что если предприятие открыто Лидером, то оно не может быть открыто Последователем.

Представленная задача является задачей двухуровневого математического программирования. Как и всякая такая задача, она включает задачу первого уровня (1.9.1.1)–(1.9.1.4), которую будем называть задачей Лидера и обозначать L, и задачу второго уровня (1.9.1.6)–(1.9.1.9), которую будем называть задачей Последователя и обозначать через F. Для задачи (1.9.1.1)–(1.9.1.9) будем использовать обозначение (L,F).

Наряду с рассмотренной моделью рассмотрим еще один вариант задачи конкурентного размещения предприятий. Предположим, что цель Последователя состоит не в максимизации прибыли, а максимизации суммарного дохода, полученного от потребителей. При этом в качестве дополнительного ограничения будем считать, что доход, полученный предприятием не может быть меньше величины фиксированных затрат на открытие этого предприятия.

В этом случае задача нижнего уровня в задаче конкурентного размещения предприятий записывается следующим образом:

$$\max_{(z_i)(z_{ij})} \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} p_{ij} z_{ij} \quad (1.9.1.10)$$

$$x_i + z_i \sum_{k|i \succ_j k} z_{kj} \le 1, \quad i \in I,\ j \in J; \quad (1.9.1.11)$$

$$z_i \ge z_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J; \quad (1.9.1.12)$$

$$z_i g_i \le \sum_{j\in J} p_{ij} z_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J; \quad (1.9.1.13)$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I,\ j \in J. \quad (1.9.1.14)$$

Эту задачу будем обозначать через F', а задачу конкурентного размещения предприятий с такой задачей нижнего уровня — через (L, F').

Обозначим через $X = ((x_i), (x_{ij}))$ допустимое решение задачи L, а через $Z = ((z_i), (z_{ij}))$ и $\tilde{Z} = ((\tilde{z}_i),(\tilde{z}_{ij}))$ соответственно допустимое и оптимальное решение задач F и F'.

Пару $(X, \tilde{Z})$ назовем допустимым решением задачи (L, F) (задачи (L, F')), если X — допустимое решение задачи L, а $\tilde{Z}$ — оптимальное решение задачи F (задачи F').

Обозначим через $L(X, Z)$ целевую функцию задач (L, F) и (L, F').

Допустимое решение $(X, \bar{Z})$ задачи (L, F) (задачи (L, F')) назовем допустимым кооперативным решением задачи (L, F) (задачи (L, F')), если для всякого оптимального решения $\tilde{Z}$ задачи F (задачи F')выполняется неравенство $L(X,\bar{Z}) \ge L(X,\tilde{Z})$. Допустимое кооперативное решение $(X^*, \bar{Z}^*)$ задачи (L,F) (задачи (L, F')) назовем *оптимальным кооперативным решением*, если для любого допустимого кооперативного решения $(X, \bar{Z})$ задачи (L, F) (задачи (L, F')) выполняется неравенство $L(X^*, \bar{Z}^*) \ge L(X, \bar{Z})$.

Допустимое решение $(X, \bar{Z})$ задачи (L, F) (задачи (L, F')) назовем *допустимым некооперативным решением* задачи (L, F) (задачи (L, F')), если для всякого оптимального решения $\tilde{Z}$ задачи F (задачи F') выполняется неравенство $L(X,\bar{Z}) \le L(X,\tilde{Z})$. Допустимое некооперативное решение $(X^*, \bar{Z}^*)$ задачи (L, F) (задачи (L, F')) назовем *оптимальным некооперативным* решением задачи (L, F) (задачи (L, F')), если для любого допустимого некооперативного решения $(X, \bar{Z})$ задачи (L, F) (задачи (L, F')) выполняется неравенство $L(X^*, \bar{Z}^*) \ge L(X, \bar{Z})$.

Далее в поле нашего внимания будут модели конкурентного размещения предприятий (L, F) и (L, $F\,'$) и задачи поиска оптимальных кооперативных и оптимальных некооперативных решений для этих моделей.

1.9.2. Линейные задачи конкурентного размещения предприятий

Рассмотрим частные случаи задач (L, F) и (L, $F\,'$), в которых величины p_{ij}, $i\in I$, $j\in J$ имеют вид $p_{ij} = b_j$.

В этом случае при любом допустимом решении $(X, \widetilde{Z})$ рассматриваемых задач конкурентного размещения предприятий выполняется равенство

$$L(X,\widetilde{Z}) = -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} b_j (1 - \sum_{i\in I} \widetilde{z}_{ij}).$$

Задачи (L, F) и (L, $F\,'$) с такими целевыми функциями будем называть *линейными*, поскольку целевая функция этих задач становится линейной. Понятно, что в случае линейных задач (L, F) и (L, $F\,'$) переменные x_{ij}, $i\in I$, $j\in J$, могут быть исключены из задачи L. Поэтому линейная задача (L, F) может быть переписана следующим образом:

$$\max_{(x_i)} \left\{ -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} b_j (1 - \sum_{i\in I} \widetilde{z}_{ij}) \right\};$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I;$$

$((\widetilde{z}_i),(\widetilde{z}_{ij}))$ — оптимальное решение задачи:

$$\max_{(z_i),(z_{ij})} \left\{ -\sum_{i\in I} g_i z_i + b_j \sum_{i\in I} z_{ij} \right\};$$

$$x_i + z_i + \sum_{k | i \succ_j k} z_{kj} \le 1, \quad i \in I, \quad j \in J;$$

$$z_i \ge z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J;$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J.$$

Аналогичным образом может быть переписана и линейная задача (L, $F\,'$).

Поскольку в случае линейной задачи (L, F') целевые функции задач L и $F\,'$ имеют вид:

$$L(X,\tilde{Z}) = -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} b_j (1-\sum_{i\in I}\tilde{z}_{ij});$$

$$F'(Z) = \sum_{j\in J} b_j \sum_{i\in I} z_{ij},$$

то для любого допустимого решения $(X,\tilde{Z})$ линейной задачи (L, F') выполняется равенство

$$L(X,\tilde{Z}) = -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} b_j - F'(\tilde{Z}).$$

Отсюда, с учетом показанного в [1] получаем, что оптимальные некооперативные решения линейной задачи (L, F') совпадают, а сама задача (L, F') принимает вид

$$\max_{(x_i)} \min_{(z_i)(z_{ij})} \left\{ -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} b_j (1-\sum_{i\in I} z_{ij}) \right\};$$

$$x_i + z_i + \sum_{k|i \succ_j k} z_{kj} \le 1, \quad i\in I, \quad j\in J;$$

$$z_i \ge z_{ij}, \quad i\in I, \quad j\in J;$$

$$\sum_{j\in J} b_j z_{ij} \ge g_i z_i, \quad i\in I;$$

$$x_i, z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i\in I, \quad j\in J.$$

Таким образом, линейная задача (L, F') может быть эквивалентным образом представлена как максиминная задача математического программирования.

1.9.3. Сведение задач конкурентного размещения предприятий к задаче максимизации псевдобулевой функции

Заметим, что всякое допустимое кооперативное (некооперативное) решение $(X,\bar{Z})$ задачи (L, F) или задачи (L, F') определяется допустимым решением X задачи L. Для любого допустимого решения X значение целевой функции $L(X,\bar{Z})$ на соответствующем допустимом кооперативном (некооперативном) решении $(X,\bar{Z})$ определяется однозначно.

Действительно, рассмотрим задачу (L, F) и допустимое решение $X = ((x_i), (x_{ij}))$ задачи L. Соответствующее допустимое кооперативное решение $(X,\bar{Z})$ задачи (L, F) определяется алгоритмом, включающим два этапа.

На этапе 1 при фиксированном решении X решается задача F и вычисляется оптимальное значение $F'(\tilde{Z})$ ее целевой функции.

На этапе 2 при фиксированном решении X решается следующая вспомогательная задача:

$$\max_{(z_i)(z_{ij})} \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i \in I} z_{ij} \right); \tag{1.9.3.1}$$

$$x_i + z_i + \sum_{k | i \succ_j k} z_{kj} \le 1, \quad i \in I, \quad j \in J; \tag{1.9.3.2}$$

$$z_i \ge z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J; \tag{1.9.3.3}$$

$$-\sum_{i \in I} g_i z_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \ge F(\tilde{Z}); \tag{1.9.3.4}$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J. \tag{1.9.3.5}$$

Оптимальное решение $\bar{Z} = ((\bar{z}_i),(\bar{z}_{ij}))$ этой задачи дает искомое допустимое кооперативное решение $(X,\bar{Z})$ задачи (L, F).

Допустимое некооперативное решение $(X,\bar{Z})$ задачи (L, F) строится аналогичным образом. Отличие состоит в том, что на этапе 2 рассматривается вспомогательная задача, в которой требуется найти

$$\min_{(z_i)(z_{ij})} \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i \in I} z_{ij} \right);$$

При ограничениях (1.9.3.1)–(1.9.3.5).

В случае задачи (L, F') допустимое кооперативное и допустимое некооперативное решения определяются по заданному решению X аналогичным образом.

Заметим также, что само допустимое решение $X = ((x_i), (x_{ij}))$ задачи L однозначно определяется (0,1)-вектором $x = (x_i)$. Поэтому любой (0,1)-вектор x однозначно определяет значение $L(X,\bar{Z})$ целевой функции задачи (L, F) или задачи (L, F') на соответствующем допустимом кооперативном или некооперативном решении $(X,\bar{Z})$.

Таким образом, получаем, что задачу поиска оптимального кооперативного или некооперативного решения задачи (L, F) или задачи (L, F') можно представить как задачу максимизации некоторой псевдобулевой функции $f(x)$, $x \in B^m$. Эта функция задана неявным образом и для вычисления ее значения необходимо найти оптимальные решения двух задач целочисленного линейного программирования.

2 Показатели

2.1. Защиты диссертаций

Исполнителями НИР представлена 1 кандидатская и защищена 1 докторская диссертации (см. Приложение В).

2.2. Список студентов, аспирантов, докторантов и молодых исследователей, закрепленных в сфере науки и образования.

Приняты в штат ИМ СО РАН:

1. Лось А.В.

2. Алдын-оол Т.А.

3. Плотников Р.В.

2.3. Количество подготовленных и опубликованных статей:

Опубликовано 17, принято к печати 13, сдано в печать 14 статей (см. Приложение А).

2.4. Количество сделанных докладов:

Сделано 13 докладов на отечественных и 6 докладов на международных научных форумах. (см. Приложение Б).

3. Заключение

В процессе выполнения 2 этапа НИР получены следующие основные результаты.

1. Разработаны новые эффективные алгоритмы с оценками для задачи 2-PSP-max**,** обоснована полиномиальность и выяснены условия асимптотической точности алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве R^k.

2. Исследованы задачи на построение расписаний с разрешением прерываний операций, в которых каждая операция может быть прервана и возобновлена позднее без какого-либо штрафа. Изучены фундаментальные свойства оптимальных решений таких задач – существование, конечность/полиномиальность числа прерываний и целочисленность/рациональность моментов прерываний в оптимальном решении. Для двух специальных классов целевых функций (включающих, тем не менее, все классические целевые функции) доказано существование оптимального решения, обладающего специальной «рациональной» структурой.

3. Для цеховых задач и задач на параллельных машинах исследованы структурные свойства оптимальных расписаний и приведены условия существования оптимального решения с целочисленными прерываниями. Построены примеры, в которых такие решения не существуют, если хотя бы одно из достаточных условий нарушено. Получены новые улучшенные по сравнению с известными верхние оценки на число прерываний в оптимальном решении.

4. Доказана NP-полнота нескольких актуальных задач кластеризации конечного множества векторов евклидова пространства. Предложен 2-приближённый алгоритм для труднорешаемой задачи, к которой сводится одна из проблем разбиения множества векторов евклидова пространства на два подмножества (кластера) по критерию минимума суммы квадратов расстояний.

5. Доказан признак разделимости n-арных квазигрупп произвольного порядка в терминах разделимости ретрактов. Охарактеризованы классы сублинейных n-арных квазигрупп порядков 5 и 7. Установлены новые нижняя и верхняя оценки числа n-арных квазигрупп конечного порядка, при помощи них установлена нижняя оценка числа q-ичных совершенных кодов.

6. Получена полная характеризация возможных распределений локальных экстремумов произвольной целевой функции на вершинах произвольного связного графа.

7. Для всех транзитивных кубических графов с числом вершин, не превосходящим 18, получено полное описание допустимых параметров совершенных 2-раскрасок. Перечислены параметры всех дистанционно регулярных раскрасок бесконечной квадратной решетки. Как

следствие, получена полная классификация дистанционно регулярных кодов в бесконечной квадратной решетке

8. Изучена проблема наименее плотного покрытия полосы кругами одного, двух и трёх радиусов. Предложены и исследованы новые регулярные покрытия, построен инструментарий для энергоэффективного мониторинга протяженных объектов сенсорными сетями.

9. Предложен способ сведение задач конкурентного размещения предприятий к задаче максимизации псевдобулевой функции.

Получены новые фундаментальные результаты мирового уровня, которые доложены на различных научных форумах и опубликованы в монографиях и статьях.

Приведены списки опубликованных работ, выступлений на научных форумах, а также другие показатели успешной работы в рамках данного проекта.

Полученные результаты имеют мировой уровень, а исполнители представляют передовой фронт науки в указанных областях.

По результатам 2 этапа НИР напрашивается вывод о целесообразности продолжения работ.

4. Список использованных источников

1. Krarup J. The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorical programming: methods and applications (Proc. NATO Advanced Study Inst., Versailles, 1974). 1975. P. 173–178.

2. De Kort J.B. Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems // Optimization. 1991. Vol. 22, N 1. P. 113–122.

3. De Brey M.J.D., Volgenant A. Well-solved cases of the 2-peripatetic salesman problem // Optimization. 1997. Vol. 39, N 3. P. 275–293.

4. Duchenne E., Laporte G., Semet F. Branch-and-cut algorithms for the undirected m-peripatetic salesman problem // European J. Oper. Res. 2005. Vol. 162, N 3. P. 700–712.

5. Сердюков А.И. Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжера на максимум // Управляемые системы. Сб. науч. тр. Вып. 25. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. С. 80–86.

6. Hassin R., Rubinstein S. Better approximations for max TSP // Inform. Process. Lett. 2000. Vol. 75, N 4. P. 181–186.

7. Chen Z.-Z., Wang L. An improved randomized approximation algorithm for Max TSP // J. Comb. Optim. 2005. Vol. 9, N 4. P. 401–432.

8. Chen Z.-Z., Okamoto Y., Wang L. Improved deterministic approximation algorithms for Max TSP // Inform. Process. Lett. 2005. Vol. 95, N 2. P. 333–342.

9. A. van Zuylen. Multiplying Pessimistic Estimators: Deterministic Approximation of Max TSP and Maximum Triangle Packing // Computing and Combinatorics, 16th Annual International Conference (COCOON 2010). Nha Trang, Vietnam, July 19–21, 2010. Proceedings. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 6196. P. 60–69.

10. Агеев А.А., Бабурин А.Е., Гимади Э.Х. Полиномиальный алгоритм с оценкой 3/4 для нахождения двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 2. С. 11–20.

11. Gimadi E.Kh. Asymptotically Exact Algorithm for Finding One and Two Edge-Disjoint Traveling Salesman Routes of Maximal Weight in Euclidean Space // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2008, Suppl. 2, pp. 1–10.

12. Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж. Эффективный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжерах на максимум // XIV Всероссийская конференция "Математическое программирование и приложения". Екатеринбург, 28 февраля – 4 марта 2011. С. 168–169.

13. Гимади Э.Х., Глазков Ю.В., Глебов А.Н. Приближенные алгоритмы решения задачи о двух коммивояжерах в полном графе с весами ребер 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2007. Т. 14, № 2. С. 41–61.

14. Gabow H.N. An efficient reduction technique for degree-restricted subgraph and bidirected network flow problems // Proc. 15th annual ACM symposium on theory of computing (Boston, April 25–27, 1983). New York: ACM, 1983. P. 448–456.

15. Гимади Э.Х., Ивонина Е.В. Алгоритмы решения задачи о двух коммивояжерах // Всероссийская конференция "Математическое программирование и приложения" (МПА 2011), Екатеринбург, 28 февраля–4 марта 2011 г. С. 17-19.

16. Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж., Ивонина Е.В. Эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для задач одного и двух коммивояжеров на максимум // XV Байкальская международная школа-семинар "Методы оптимизации и их приложения", июнь 2011 (принята в печать).

17. Baburin A.E., Gimadi E.Kh. On the Asymptotic Optimality of an Algorithm for Solving the Maximum m-PSP in a Multidimensional Euclidean Space // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2011, P. 3–16.

18. Гимади Э.Х. Новая версия асимптотически точного алгоритма решения евклидовой задачи коммивояжера // Методы оптимизации и их приложения: тр. XII Байкальской междунар. конф. / ИСЭМ СО РАН. Иркутск, 2000. Т. 1. С. 117–124.

19. Baburin A.E., Della Croce F., Gimadi E.K., Glazkov Y.V., Paschos V.Th. Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2 // Discrete Applied Mathematics. 2009. Vol. 157, No 9. P. 1988–1992.

20. Papadimitriou C.H., Yannakakis M. The travelling salesman problem with distances One and Two // Math. Oper. Res. 1993. V. 18, N 1. P. 1–11.

21. Glebov A.N., Gordeeva A.V., Zambalaeva D.Zh. 7/5-approximation algorithm for 2-Peripatetic Salesman Problem on minimum with different weight functions valued 1 and 2 // Discrete Applied Mathematics, 2011, (submitted).

22. Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж. Задача о двух коммивояжерах на минимум в полном графе с различными весовыми функциями // Материалы конф. "Дискр. оптимизация и исслед. операций" (DOOR-2010). Алтай, 27 июня – 3 июля 2010. С. 131.

23. Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж.} Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжерах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т.18. № 3.

24. A.E.Baburin, E.Kh.Gimadi. On the Asymptotic Optimality of an Algorithm for Solving the Maximum m-PSP in a Multidimensional Euclidean Space // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2011, P. 3–16.

25. De Kort J.B. J.M. Upper bounds for the symmetric 2-peripatetic salesman problem // Optimization. 1992. Vol. 23, N 4. P. 357–367.

26. De Kort J.B. J.M. A branch and bound algorithm for symmetric 2-peripatetic salesman problems // European J. Oper. Res. 1993. Vol. 70, N 2. P. 229–243.

27. Gimadi E.Kh., Ivonina E.V. Approximation algorithms for maximum-weight 2-Peripatetic Salesman Problem in complete graph with restricted distances // Discrete Applied Mathematics, 2011 (submitted).

28. [Kowalik L., Mucha M. Deterministic 7/8-approximation for the Metric Maximum TSP. Theoretical Computer Science. 2009. Vol. 410, Is. 47–49. P. 5000–5009.

29. R. Mc. Naughton. Scheduling with deadlines and loss functions // Management Science. 1959. V. 6. P.1-12.

30. T. Gonzalez and S. Sahni. Open Shop Scheduling to Minimize Finish Time // Journal of the ACM. 1976. V. 23. P. 665-679.

31. Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G., Shmoys D.B. Sequencing and Scheduling: Algorithms and Complexity // Logistics of Production and Inventory. Handbooks in Operations Research and Management Science. Vol. 4. North-Holland: Elsevier, 1993, P. 445-522.

32. Ph. Baptiste, V. Timkovsky. On Preemption Redundancy in Scheduling Unit Processing Time Jobs on Two Parallel Machines // Operations Research Letters. 2001. V. 28. P. 205-212.

33. P. Brucker, S. Heitmann and J. Hurink. How Useful are Preemptive Schedules? // Oper. Res. Lett. 2003. V. 31(2). P. 129-136.

34. Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.Н. Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1984.

35. T. Gonzalez and S. Sahni. Preemptive Scheduling of Uniform Processor Systems // J. of the Assoc. Comput. Mach. 1978. V. 25. P. 92-101.

36. Labetoulle J., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G. Preemptive scheduling of uniform machines subject to release dates //Progress in Combinatorial Optimization. New York: Academic Press, 1984. P. 245-261.

37. E.L. Lawler and J. Labetoulle. On Preemptive Scheduling of Unrelated Parallel Processors by Linear Programming // Journal of the ACM. 1978. V. 25. P. 612-619.

38. J. Du and J. Y. T. Leung. Minimizing mean flow time in two-machine open shops and flow shops // J. Algorithms. 1993. V.14. P. 24-44.

39. N. Sauer and M. Stone. Rational preemptive scheduling // Order. 1987. V. 4(2). P. 195-206.

40. N. Sauer and M. Stone, Preemptive scheduling. Algorithms and order (Ottawa, ON, 1987), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989. P. 307-323.

41. Ph. Baptiste, P. Brucker, S. Knust, and V. G. Timkovsky. Ten notes on equal-processing-time scheduling: at the frontiers of solvability in polynomial time // 4OR-Q J. Oper. Res. 2004. V. 2(2). P. 111-127.

42. J. Du, J. Y.-T. Leung, and G. H. Young. Scheduling chain-structured tasks to minimize makespan and mean flow time // Inform. and Comput. 1991. V. 92. P. 219-236.

43. V.G. Timkovsky. Identical parallel machines vs. unit-time shops and preemptions vs. chains in scheduling complexity // European J. Oper. Res. 2003. V. 149. P. 355-376.

44. Ph. Baptiste. On preemption redundancy. Technical Report, IBM T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY. 2002.

45. Anil K. Jain K. Data Clustering: 50 Years Beyond k-Means // Pattern Recognition Letters. 2010. Vol. 31. P. 651-666.

46. Aloise D., Hansen P. On the Complexity of Minimum Sum-of-Squares Clustering // Les Cahiers du GERAD, G-2007-50. 2007. 12 p.

47. Aloise D., Deshpande A., Hansen P., Popat P. NP-Hardness of Euclidean Sum-of-Squares Clustering // Les Cahiers du GERAD, G-2008-33. 2008. 4 p.

48. Mahajan M., Nimbhorkar P., Varadarajan K. The Planar k-means Problem is NP-Hard // Lecture Notes in Computer Science. 2009. Vol. 5431. P. 284-285.

49. Долгушев А.В., Кельманов А.В. К вопросу об алгоритмической сложности одной задачи кластерного анализа // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17, №2. С. 39-45.

50. MacQueen J.B. Some Methods for Classification and Analysis of Multivariate Observations // Proc. 5-th Berkeley Symp. Of Mathematical Statistics and Probability. 1967. Vol. 1. P. 281-297.

51. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности одного из вариантов задачи выбора подмножества «похожих» векторов // Доклады РАН. 2008. Т.421, №5. С. 590-592.

52. Кельманов А.В., Пяткин А.В. Об одном варианте задачи выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т.15, №5. С. 25-40.

53. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009, Т.49, №11. С. 2059-2067.

54. Кельманов А.В., Пяткин А.В. NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т.15, №5. С. 31-45.

55. Кельманов А.В. О сложности некоторых задач анализа данных // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010, Т.50, №11. С. 2045-2051.

56. Кельманов А. В. NP-полнота некоторых задач поиска подмножеств векторов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 121-129.

57. Кельманов А.В. NP-полнота некоторых задач анализа данных // Интеллектуализация обработки информации: 8-я международная конференция. Республика Кипр, г. Пафос, 17–24 октября 2010 г.: Сборник докладов. – М.: МАКС Пресс, 2010. – С. 262-265.

58. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Пяткин А.В. Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2007. Т. 14, №1. С. 32-42.

59. Гимади Э.Х., Глазков Ю. В., Рыков И. А. О двух задачах выбора подмножества векторов с целочисленными координатами в евклидовом пространстве с максимальной нормой суммой разности // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15, №5. С. 30-43.

60. Гимади Э.Х., Кельманов А.В., Кельманова М.А., Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодического фрагмента при заданном числе повторов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, №1(25). С.55-74.

61. Гимади Э.Х., Пяткин А.В., Рыков И.А. О полиномиальной разрешимости некоторых задач выбора подмножества векторов в евклидовом пространстве фиксированной размерности // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т.15, №6. С.11-19.

62. Кельманов А. В. Проблема off-line обнаружения повторяющегося фрагмента в числовой последовательности // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т.14, №2. С.81-88.

63. Kel'manov A.V., Jeon B. A Posteriori Joint Detection and Discrimination of Pulses in a Quasiperiodic Pulse Train // IEEE Transactions on Signal Processing. 2004. Vol.52, №3. P.1-12.

64. Wirth H. Algorithms + Data Structures = Programs // New Jersey: Prentice Hall. 1976. 366 p.

65. Axenovich M.A. On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Maths. 2003. V. 268, N 1–3. P. 31–49.

66. Киселев С.А., Токарева Н. Н. О сокращении ключевого пространства шифра A5/1 и обратимости функции следующего состояния в поточном генераторе // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18. N 2. С. 51-63.

67. Хорошилова Д.Б. О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2009. Т. 16, N 1. – С. 80-92.

68. Августинович С.В., Бородин О.В., Фрид А.Э. Дистрибутивные раскраски плоских триангуляций минимальной степени 5 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. – 2001. Т. 8, N 3. – С. 3–16.

69. Августинович С.В., Могильных И.Ю. Совершенные раскраски графов Джонсона J(8,3) и J(8,4) в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2010. – Т. 17, N 2. – С. 3-19.

70. Кротов Д. С. О совершенных раскрасках половинного 24-куба // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2008. – Т. 15, N 5. – С. 35-46.

71. Кохов В.А. Диаграммы, числа стабильности и цикловые индексы групп автоморфизмов транзитивных графов // Исследования по прикладной теории графов. – Новосибирск: Наука, 1986. – С.113-114.

72. Asano T., Brass P., and Sasahara S. Discovering problem with application to digital half toning // LNCS 3045. 2004. P. 14-17.

73. Bulusu~N., Heidemann J., Estrin D. GPS-less low cost outdoor localization for very small devices // Technical report, Computer science department, University of Southern California. 2000.

74. Pottie G.J. Wireless Integrated Network Sensors // Communications CM. 2000. V. 43. No. 5. P. 51-58.

75. Wu J., Yang S. Energy-Efficient Node Scheduling Models in Sensor Networks with Adjustable Ranges // Int. J. of Foundations of Computer Science. 2005. V. 6. No. 1. P. 3-17.

76. Астраков С.Н., Ерзин А.И., Залюбовский В.В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16. № 3.С. 3-19.

77. Kershner R. The Number of Circles Covering a Set // American J. of Mathematics. 1939. V. 61. No. 3. P. 665-671;

78. Zhang H., Hou J.C. Maintaining Sensing Coverage and Connectivity in Large Sensor Networks // Ad Hoc & Sensor Wireless Networks. 2005. V. 1. No. (1-2). P. 89-124.

79. Cardei M. Improving Network Lifetime using Sensors with Adjustable Sensing Ranges // Int. J. of Sensor Networks. 2006. No. 1. 41-49.

Приложение А. Список публикаций исполнителей

Монографии и учебные пособия

1. Токарева Н. Н. Нелинейные булевы функции: бент-функции и их обобщения // Издательство LAP LAMBERT Academic Publishing (Saarbrucken, Germany), 2011. ISBN: 978-3-8433-0904-2. 180 с., на русском.

Опубликованные статьи:

1. Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжерах на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т.18. № 3.
2. A.E.Baburin, E.Kh.Gimadi. On the Asymptotic Optimality of an Algorithm for Solving the Maximum m-PSP in a Multidimensional Euclidean Space // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2011, P. 3-16.
3. Ilya Chernykh, Nikita Dryuck, Alexander Kononov and Sergey Sevastyanov, The Routing Open Shop Problem: New Approximation Algorithms // WAOA 2009, Lecture Notes in Computer Science, 2010, V. 5893, p. 75-85.
4. Ph. Baptiste, J. Carlier, A. Kononov, M. Queyranne, S. Sevastyanov and M. Sviridenko // Structural properties of optimal schedules with preemption, Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2010, 4(4), P. 455-474.
5. Козлов А.С. О задаче компактного суммирования векторов внутри минимальной полосы // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 6. С. 56–67.
6. Кельманов А.В., Романченко С.М. Приближённый алгоритм для решения одной задачи поиска подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т.18, № 1. С. 61-69.
7. Долгушев А.В., Кельманов А.В. Приближённый алгоритм решения одной задачи кластерного анализа // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т.18, № 2. С. 29-40.
8. A.V. Dolgushev, A.V. Kel’manov. On the Algorithmic Complexity of a Problem in Cluster Analysis // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2011. Vol. 5, No.2, pp. 1-5.
9. С.В.Августинович, М.А.Лисицына Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18. N 2. С. 3-17.
10. Киселев С.А., Токарева Н. Н. О сокращении ключевого пространства шифра A5/1 и обратимости функции следующего состояния в поточном генераторе // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18. N 2. С. 51-63.

11. Токарева Н. Н. Группа автоморфизмов множества бент-функций // Дискретная математика. 2010. Т. 22. N 4. С. 34-42. (English translation: Discrete Mathematics and Applications. 2010. V. 20. N 5-6. P. 655-664).

12. D. S. Krotov, V. N. Potapov, "On Connection Between Reducibility of an n-Ary Quasigroup and That of Its Rretracts", Discrete Mathematics, 311:1 (2011), 58–66.

13. O. Heden, D. S. Krotov, "On the Structure of Non-Full-Rank Perfect q-Ary Codes", Advances in Mathematics of Communications, 5:2, A special issue ALCOMA'10 (2011), 149-156.

14. Е.В. Горкунов Группа автоморфизмов q-ичного кода Хэмминга // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17. N 6. С. 50-55.

15. A.I. Erzin, V.V. Zalyubovskiy, Y.V. Shamardin, I.I. Takhonov, R. Samanta, S. Raha. A Timing Driven Congestion Aware Global Router // Proc. of 2nd Int. Conf. on Emerging Applications of Information Technology, 2011, published by IEEE Computer Society, P. 375-378.

16. A.I. Erzin, S.N. Astrakov. Min-Density Stripe Covering and Applications in Sensor Networks // Lecture Notes in Computer Science, No. 6784, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, P. 152-162.

17. A.I. Erzin, R.V. Plotnikov. Wireless Sensor Network's Lifetime Maximization Problem in Case of Given Set of Covers // Lecture Notes in Computer Science, No. 6786, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, P. 44-57.

Статьи, принятые к печати:

1. Гимади Э.Х. Задача об оптимальном назначении и ее некоторые трудноpешаемые версии // Сб. трудов 15 Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения" - 2011, 6 стр. (материалы приняты к печати).

2. Глебов А.Н, Замбалаева Д.Ж., Ивонина Е.В. Эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для задач одного и двух коммивояжеров на максимум // Сб. трудов 15 Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения" - 2011, 6 стр. (материалы приняты к печати).

3. Истомин А. Вероятностный анализ полиномиального алгоритма решения задачи коммивояжера на минимум // Сб. трудов 15 Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения" - 2011, 6 стр. (материалы приняты к печати).

4. Ph. Baptiste, J. Carlier, A. Kononov, M. Queyranne, S. Sevastyanov, and M. Sviridenko, Integrality Property in Preemptive Shop Scheduling // Discrete Applied Mathematics, to appear.

5. Bertrand M.T. Lin, Sergey V. Sevastyanov, and H.L. Huang, Tight Complexity Analysis of the Relocation Problem with Arbitrary Release Dates // Theoretical Computer Science, to appear.

6. Кельманов А.В. О сложности некоторых задач кластерного анализа // Труды XV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск, 2011 г. (принята в печать).

7. Кельманов А.В., Романченко С.М. Псевдополиномиальные алгоритмы для некоторых задач поиска подмножества векторов и кластерного анализа // Труды XV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск, 2011 г. (принята в печать).

8. Кельманов А.В. NP-полнота некоторых задач кластеризации // Математические методы распознавания образов: 15-я Всероссийская конференция (ММРО-15). Петрозаводск, 2011 г.: Сборник докладов. – М.: МАКС Пресс (принята в печать).

9. Кельманов А.В., Романченко С.М. Алгоритмы с оценками для некоторых задач поиска подмножества векторов и кластерного анализа // Математические методы распознавания образов: 15-я Всероссийская конференция (ММРО-15). Петрозаводск, 2011 г.: Сборник докладов. – М.: МАКС Пресс (принята в печать).

10. Кельманов А.В., Михайлова Л.В., Хамидуллин С.А. Об одной задаче поиска и идентификация векторных наборов в последовательности // Математические методы распознавания образов: 15-я Всероссийская конференция (ММРО-15). Петрозаводск, 2011 г.: Сборник докладов. – М.: МАКС Пресс (принята в печать).

11. Кельманов А.В., Романченко С.М., Хамидуллин С.А. 2-приближенный алгоритм для одной задачи поиска в векторной последовательности совокупности «похожих» элементов // Математические методы распознавания образов: 15-я Всероссийская конференция (ММРО-15). Петрозаводск, 2011 г.: Сборник докладов. – М.: МАКС Пресс (принята в печать).

12. Д. С. Кротов, В. Н. Потапов. «О числе *n*-арных квазигрупп конечного порядка», Дискретная математика, принято к печати.

13. A.I. Erzin, S. Raha, R. Srinivasan. Pseudoregular plane covering by mobile sensors, 4 стр. // Сб. трудов 15 Байкальской школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения» – 2011 (материалы приняты к печати).

Статьи, сданные в печать:

1. Gimadi E.K., Ivonina Eugeniya. Approximation algorithms for maximum-weight 2-Peripatetic Salesman Problem in complete graph with restricted distances // Discrete Applied Mathematics. Elsevier. 2011 (submited).

2. Aleksey Glebov, Dolgor Zambalaeva. Approximation algorithm for 2-PSP on minimum with weights valued 1 and 2 // Discrete Applied Mathematics. Elsevier 2011 (submited).

3. Залюбовский В.В., Истомин А. Вероятностный анализ полиномиального алгоритма решения задачи коммивояжера на минимум // Дискретный анализ и исследование операций. 2011.

4. Ph. Baptiste, J. Carlier, A. Kononov, M. Queyranne, S. Sevastyanov, and M. Sviridenko. Integrality Property in Preemptive Parallel Machine Scheduling // Operations Research Letters, submitted.

5. A. Kononov, S. Sevastyanov, and M. Sviridenko, Complete 4-parametric Complexity Classification of Short Shop Scheduling // Journal of Scheduling, submitted.

6. I. Chernykh, A. Kononov, S. Sevastyanov, Efficient Approximation Algorithms for the Routing Open Shop Problem // Computers & Operations Research, submitted.

7. Sergey Sevastyanov, Darya Chemisova, Ilya Chernykh, On some properties of optimal schedules in the job shop problem with preemption and an arbitrary regular criterion // Annals of Operations Research, submitted.

8. S. Sevastyanov and B.M.T. Lin, Efficient enumeration of optimal and approximate solutions for the two-machine flow-shop problem // Navel Research Logistics, submitted.

9. Кельманов А.В. О сложности некоторых задач кластерного анализа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011.

10. Кельманов А.В., Романченко С.М. Псевдополиномиальные алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подмножества векторов и кластерного анализа // Автоматика и телемеханика. 2011.

11. Н.А. Коломеец Построение бент-функций на минимальном расстоянии от квадратичной бент-функции // статья сдана в журнал Дискретный анализ и исследование операций.

12. A.I. Erzin, S. Raha, R. Samanta, Y.V. Shamardin, I.I. Takhonov, V.V. Zalyubovskiy. Delay-Driven Steiner Tree Constructing Algorithm and its Application in VLSI Global Routing // Computational Optimization and Applications (статья сдана в печать).

13. С.Н. Астраков, А.И. Ерзин. Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов // Вычислительные технологии (статья сдана в печать).

14. А.И. Ерзин, Р.В. Плотников. Максимизация времени функционирования покрытий в условиях ограниченности ресурсов их элементов // Дискретный анализ и исследование операций (статья сдана в печать).

Приложение Б. Список сделанных исполнителями докладов

На всероссийских конференциях и семинарах:

1. Гимади Э.Х. Алгоритмы с оценками для некоторых задач маршрутизации // Всероссийская конференция "Математическое программирование и приложения" (МПА 2011), Екатеринбург, 28 февраля–4 марта 2011 (пленарный доклад).

2. Гимади Э.Х., Ивонина Е.В. Алгоритмы решения задачи о двух коммивояжерах // Всероссийская конференция "Математическое программирование и приложения" (МПА 2011), Екатеринбург, 28 февраля–4 марта 2011 (секционный доклад).

3. Глебов А.Н, Замбалаева Д.Ж. Эффективный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжерах на максимум // Всероссийская конференция "Математическое программирование и приложения" (МПА 2011), Екатеринбург, 28 февраля–4 марта 2011 (секционный доклад).

4. Гимади Э.Х. Задача об оптимальном назначении и ее некоторые труднорешаемые версии // Байкальская школа-семинар "Методы оптимизации и их приложения" - 2011, пос. Листвянка, о. Байкал, 23–29 июня 2011 (секционный доклад).

5. Глебов А.Н, Замбалаева Д.Ж., Ивонина Е.В. Эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для задач одного и двух коммивояжеров на максимум // Байкальская школа-семинар "Методы оптимизации и их приложения" - 2011, пос. Листвянка, о. Байкал, 23–29 июня 2011 (секционный доклад).

6. Залюбовский В.В., Истомин А. Вероятностный анализ полиномиального алгоритма решения задачи коммивояжера на минимум // Байкальская школа-семинар "Методы оптимизации и их приложения" - 2011, пос. Листвянка, о. Байкал, 23–29 июня 2011 (секционный доклад).

7. Кельманов А.В. О сложности некоторых задач кластеризации в евклидовом пространстве // Тез. докл. XIV-й Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения». Екатеринбург, 2011. С. 98-99. (пленарный доклад).

8. Кельманов А.В., Романченко С.М. Приближённый алгоритм для решения одной задачи поиска подмножества векторов // Тез. докл. XIV-й Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения». Екатеринбург, 2011. С. 100. (секционный доклад).

9. Долгушев А.В., Кельманов А.В. Приближённый алгоритм для решения одной задачи кластерного анализа // Тез. докл. XIV-й Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения». Екатеринбург, 2011. С. 84. (секционный доклад).

10. Романченко С.М. Алгоритмы с оценками для одной задачи поиска подмножества векторов // Тез. докл. XLIX-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 2011, с. 180. (Диплом II-степени). (секционный доклад).

11. Чубарова И.В. Приближенный алгоритм для одной задачи кластерного анализа // Тез. докл. XLIX-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 2011. с. 188. (секционный доклад).

12. Н.А. Коломеец Количество бент-функций на минимальном расстоянии от квадратичной бент-функции // МНСК-2011, секция математика (секционный).

13. A.I. Erzin, S. Raha, R. Srinivasan. Pseudoregular plane covering by mobile sensors. 15 Байкальская школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения» – 2011, пос. Листвянка, о. Байкал, 23-29 июня 2011 г. (секционный доклад)

На международных конференциях и семинарах:

1. Sergey Sevastyanov. Efficient enumeration of optimal and approximate solutions of a scheduling problem, 10th Cologne-Twente Workshop (CTW'11), Frascati (Italy), June 14-16, 2011 (joint with B.M.T. Lin).

2. Sergey Sevastyanov. Efficient enumeration of optimal and approximate solutions of the two-machine flow-shop problem, 10th Workshop on Models and Algorithms for Planning and Scheduling Problems (MAPSP 2011), Nymburk (Czech Republic), June 19-24, 2011 (joint with B.M.T. Lin).

3. Alexander Kozlov, To the conjecture on the minimum number of migrations in the optimal schedule for the Pm | pmtn(delay=d) | Cmax problem, 10th Workshop on Models and Algorithms for Planning and Scheduling Problems (MAPSP 2011), Nymburk (Czech Republic), June 19-24, 2011.

4. A.I. Erzin, V.V. Zalyubovskiy, Y.V. Shamardin, I.I. Takhonov, R. Samanta, S. Raha. A Timing Driven Congestion Aware Global Router. 2nd Int. Conf. on Emerging Applications of Information Technology, Kolkata, India, Feb. 18-20, 2011 (секционный доклад).

5. A.I. Erzin, S.N. Astrakov. Min-Density Stripe Covering and Applications in Sensor Networks. 11th International Conference on Computational Science and Its Applications, Santander, Spain, 20-23 June (секционный доклад).

6. A.I. Erzin, R.V. Plotnikov. Wireless Sensor Network's Lifetime Maximization Problem in Case of Given Set of Covers. 11th International Conference on Computational Science and Its Applications, Santander, Spain, 20-23 June (секционный доклад).

Приложение В. Список представленных диссертаций

1. Кротов Денис Станиславович. Совершенные коды и *n*-арные квазигруппы: конструкции и классификация. Специальность 01.01.09 - дискретная математика и математическая кибернетика. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.
Ведущая организация: Московский Государственный Университет. Успешная защита состоялась 23 марта 2011 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.01 при Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН по адресу: ауд. 417, пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск 630090.

2. Алдын-оол Татьяна Андреевна «Анализ вероятностных характеристик некоторых систем сетевой структуры», диссертация представлена 10.05.2011 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в спец. совет Д 003.061.02 при ИВМиМГ СО РАН.